Grażyna Trzpiot

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Informatyki i Komunikacji
Katedra Demografii i Statystyki Ekonomicznej
grazyna.trzpiot@ue.katowice.pl

Optymalizacja portfela z wykorzystaniem koherentnych transformujących miar ryzyka

Streszczenie: Celem artykułu jest wykorzystanie metod optymalizacji liniowej w analizie portfelowej. Poszerzymy problem wyboru optymalnego portfela z kryterium ograniczającym dla kwantylowej miary ryzyka, jakim jest minimalizacja CVaR (*conditional value-at-risk*) do klasy zadań z koherentnymi transformującymi miarami ryzyka. Omówimy niezależnie koherentne miary ryzyka (KMR) oraz transformujące miary ryzyka (TMR) podając własności i wzajemne zależności. Przejdziemy następnie do klasy miar łączących te podejścia. Koherentne transformujące miary ryzyka (KTMR) obejmują wiele znanych miar ryzyka.

Słowa kluczowe: koherentne miary ryzyka, transformujące miary ryzyka, analiza portfelowa.

1. Wprowadzenie

Problem wyboru składu optymalnego portfela jest istotny zarówno dla zarządzających funduszami inwestycyjnymi czy emerytalnymi, jak i również dla indywidualnych inwestorów. Od seminaryjnej pracy Markowitza [1952, s. 77-91] obserwujemy intensywny rozwój metod wyznaczania optymalnego portfela. Poszukujemy nowych lepszych oraz bardziej sprawnych miar ryzyka, a wraz z nimi metod doboru optymalnego portfela.

Model Markowitza wykorzystuje wariancję jako *benchmark* dla pomiaru ryzyka ale jest to niezrozumiałe, ponieważ rozważamy w sposób równoważny straty oraz zyski. W konsekwencji, zaproponowano inne miary ryzyka w powiązaniu z analizą portfelową takie jak przykładowo semi-wariancja [Markowitz, 1959; Trzpiot, 2006], momenty cząstkowe [Bawa, Lindenberg, 1977, s. 189-200; Trzpiot, 2005, s. 181-188], zasadę safety first [Roy, 1952, s. 431-449], skośność i kurtozę [Harvey i in., 2010, s. 469-485] czy wreszcie Value-at-risk (VaR) oraz Conditional Value-at-risk (CVaR) [Rockafellar, Uryasev, 2000, s. 21-42].

Przyjmiemy następującą notację: funkcję, która mierzy ryzyko portfela **x** zapiszemy jako $\rho(\mathbf{x})$. Wówczas, zapisując zadanie ogólnie, problem wyboru portfela to problem wyznaczenia rozwiązania następującego zadania:

$$\min \rho(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{S},$$

gdzie zbiorem ograniczającym jest zbiór wszystkich możliwych portfeli **S**.

Jeżeli ρ odpowiada wariancji stopy zwrotu portfela **x**, wówczas powyższe zadanie można zredukować do modelu Markowitza.

Rozpatrzymy problem wyboru portfela rozważając klasę szczególnych miar ryzyka – koherentne transformujące miary ryzyka (KTMR). Zapiszemy zdefiniowany problem następnie równoważnie jako zadanie programowania liniowego. Koherentne transformujące miary ryzyka (KTMR) to część wspólna dwóch ważnych klas miar ryzyka: koherentnych miary ryzyka (KMR) [Artzner i in., 1999, s. 203-228] oraz transformujących miar ryzyka (TMR) [Wang, 2000, s. 15-36]. Z prowadzonych analiz wiadomo, że CVaR jest przykładem KTRM, podczas gdy VaR nie jest ani KRM ani TRM, zatem nie jest KTRM [Trzpiot, 2012, s. 21-36].

2. Model optymalnego portfela z wykorzystaniem CVaR

Zapiszemy stratę wartości portfela jako funkcję $\boldsymbol{L} = f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ wektora decyzyjnego **x**, który jest wybierany ze zbioru $\mathbf{S} \subseteq \mathrm{R}^n$, oraz wektora losowego $\mathbf{y} \in \mathrm{R}^m$. Wektor **x** reprezentuje zapisany w sposób ogólny portfel, a **S** pokrywa zbiór wszystkich możliwych portfeli wyznaczanych przy przyjętych subiektywnie, szczegółowo zapisanych ograniczeniach. Dla każdego **x**, strata $\boldsymbol{L} = f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ jest zmienną losową posiadającą rozkład z dystrybuantą indukowaną przez rozkład $\mathbf{y} \in \mathrm{R}^m$.
Przyjmujemy, że rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej **y** jest rozkładem dyskretnym z masą prawdopodobieństwa $\boldsymbol{p}$, tzn., P $[\boldsymbol{L} = L(\mathbf{x}, y_i)] = p_i$ dla $i = 1, \ldots, m$.

Zauważmy, że w wielu przypadkach zakłada się, że X, czyli strata portfela, jest jednowymiarowym rozkładem dyskretnym. Dodajmy, że otrzymujemy dyskretny rozkład strat, w przypadku generowania scenariuszy lub dla danych historycznych. Dodatkowo, mając arbitralnie ustaloną dyskretną zmienną losową mającą jako wartości liczby rzeczywiste, możemy zawsze przekonwertować ją w dyskretną jednowymiarową dystrybuantę dla dostatecznie dużego m.

Dla każdego portfela **x** oraz dla funkcji straty wartości portfela $\boldsymbol{L} = f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ zapiszemy funkcję dystrybuanty tego portfela następująco:

$$\Psi(x,\zeta) = \sum_{i=1}^{m} p_i I\{l_i \le \zeta\}. \tag{1}$$

Wówczas VaR_α oraz $CVaR_\alpha$ możemy zapisać następująco [Rockafellar, Uryasev, 2002, 1443-1471]:

Definicja 2.1 Załóżmy, że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$, rozkład strat portfela $\boldsymbol{L} = f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ jest skoncentrowany w $m < \infty$ punktach, oraz $\Psi(\mathbf{x},\cdot)$ jest funkcją schodkową ze skokami w tych punktach. Dla ustalonego $\mathbf{x}$ dodatkowo zapiszemy jako $l_{(1)} < ... < l_{(m)}$ odpowiednio porządek w zbiorze strat, a wartości $p_{(i)} > 0$, $i = 1, \dots, m$, reprezentują prawdopodobieństwa zrealizowanych strat $l_{(i)}$.
Jeżeli $\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \rho(\mathbf{x})$ jest jedyne dla ustalonego α wówczas VaR_α oraz $CVaR_\alpha$ dla portfela jest dane odpowiednio jako $\zeta_\alpha(\mathbf{x}) = l_{(i\alpha)}$ oraz

$$\phi_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\left(\sum_{i=1}^{i\alpha} p_{(i)} - \alpha\right) l_{i\alpha} + \sum_{i=i\alpha}^{m} p_{(i)} l_{(i)}\right]. \tag{2}$$

Jeżeli miara ρ to VaR, wówczas problem wyznaczenia portfela (1) jest zadaniem numerycznym. Dla zadania z CVaR jako kryterium problem optymalizacyjny dla portfela (1) jest programowaniem wypukłym i można wyznaczyć rozwiązanie analitycznie.

Zatem CVaR jest wykorzystywane w modelowaniu portfelowym, ponieważ może być zapisane jako zadania programowania liniowego. Programowanie wypukłe, może być zapisane jako programowanie liniowe. Rockafellar i Uryasev zaproponowali wyznaczenie modelu linowego dla portfela wykorzystującego *CVaR* jako kryterium selekcji aktywów do portfela wykorzystujące $\phi_\alpha(\mathbf{x})$ oraz $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ jako argumenty następującej funkcji[1]:

$$F_\alpha(x,\zeta) = \zeta + \frac{1}{1-\alpha} E\left[\left(l(x,y) - \zeta\right)^+\right] = \zeta \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^{m} p_i \left(l_i - \zeta\right)^+. \tag{3}$$

Jeżeli $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ jest wypukła (convex) względem $\mathbf{x}$, wówczas $\phi_\alpha(\mathbf{x})$ jest wypukła względem $\mathbf{x}$. W takim przypadku, $F_\alpha(\mathbf{x},\zeta)$ jest również wypukła (*jointly convex*) w $(\mathbf{x}, \zeta)$. Udowodniono następujące twierdzenie podające równoważne sformułowanie problemu [Rockafellar, Uryasev, 2002, s. 1443-1471]:

[1] $[x]^+ = \max(x; 0)$.

Twierdzenie. 2. 1. Minimalizacja $\phi_\alpha(\mathbf{x})$ względem $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ jest równoważna minimalizacji F_α $(\mathbf{x},\zeta)$ względem wszystkich $(\mathbf{x}, \zeta) \in \mathbf{S} \times \mathbf{R}$ w tym znaczeniu, że

$$\min_{x\in S} \phi_\alpha(x) = \min_{(x,\zeta)\in S\times R} F_\alpha(x,\zeta), \tag{4}$$

ponadto

$$\left(x^*,\zeta^*\right) \in \min_{(x,\zeta)\in S\times R} F_\alpha(x,\zeta) \Leftrightarrow x^* \in \arg\min_{x\in S} \phi_\alpha(x),\ \zeta^* \in \min_{(x,\zeta)\in S\times R} F_\alpha\left(x^*,\zeta\right) \tag{5}$$

Powyższe twierdzenie łączy równanie reprezentacyjne (3) zarówno z VaR jak i z CVaR. Twierdzenie pozwala, w celu wyznaczenia optymalnego portfela z przyjętym kryterium z miarą CVaR, zastąpić funkcję $\phi_\alpha(\mathbf{x})$ przez $F_\alpha(\mathbf{x},\zeta)$ przy formułowaniu i rozwiązywaniu zadania selekcji portfela.

Najważniejszy w rozwinięciu równania (3) w ogólnie rozumianym programowaniu wypukłym jest fakt, że w celu wyznaczenia optymalnego portfela, z przyjętym kryterium z miarą CVaR w celu wyznaczenia optymalnego portfela, możemy wykorzystać linearyzację poprzez wprowadzenie liniowej funkcji celu oraz liniowych ograniczeń. Z wykorzystaniem takiej liniowej reprezentacji możemy traktować dowolny problem selekcji portfela z CVaR jako zadanie programowania liniowego.

3. Koherentne miary ryzyka i transformujące miary ryzyka

Niepewna przyszła wartość pozycji inwestycyjnej jest zazwyczaj zapisywana jako funkcja X: $\Omega \to$R, gdzie Ω jest ustalonym zbiorem scenariuszy w przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P). Zapiszemy jako $\boldsymbol{X}$ przestrzeń liniową zmiennych losowych na Ω, czyli zbiór funkcji $X : \Omega \to$R. Zauważmy, że X może być rozpatrywana jako funkcja straty niepewnej pozycji inwestycyjnej.

Zbiór własności definiowanych miar ryzyka można zapisać następująco:

1. Subaddytywność:
   dla dowolnych $X, Y \in \boldsymbol{X}$ zachodzi $\rho(X + Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$.
2. Dodatnia homogeniczność:
   dla dowolnych $X \in \boldsymbol{X}$ oraz $\lambda \ge 0$, zachodzi $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$.
3. Translacja inwariantna:
   dla ustalonego $X \in \boldsymbol{X}$ oraz dowolnych $a \in$ R, zachodzi
   $\rho(X + a) = \rho(X) + a$.
4. Monotoniczność:
   dla $X, Y \in \boldsymbol{X}$ takich, że $X \le Y$, zachodzi $\rho(X) \le \rho(Y)$.

5. Prawo niezmienniczości[3]:

   dla każdego X, $Y \in \boldsymbol{X}$ jeżeli $P(X \leq x) = P(Y \leq x)$ dla wszystkich $x \in$ R zachodzi $\rho(X) = \rho(Y)$.
6. Wypukłość:

   dla X, $Y \in \boldsymbol{X}$ i $\lambda \in (0, 1]$, zachodzi

   $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y] \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\, \rho(Y)$.
7. Co-monotoniczna addytywność:

   dla każdego dla X, $Y \in \boldsymbol{X}$, które są co-monotoniczne,

   $\rho(X + Y] = \rho(X) + \rho(Y)$.

Koherentne miary ryzyka (KMR) spełniają następujące własności: subaddytywność, translacja inwariantna, dodatnia homogeniczność i monotoniczność.

Transformujące miary ryzyka (TMR) spełniają następujące własności translacji inwariantnej, która jest dodatnio homogeniczna, monotoniczna oraz co-monotoniczno addytywna [Trzpiot, 2012, s. 21-36]. Dodatkowo, można pokazać, że dla dodatnich strat transformująca miara ryzyka jest koherentna wtedy i tylko wtedy, gdy jest wypukła.

Pojęcie co-monotoniczności jest najważniejsze w odniesieniu do miar ryzyka [Dhaene i in., 2000, s. 99-113]. Wpływa na aksjomat addytywnej co-monotoniczności bazując na pojęciu co-monotoniczności zmiennych losowych, które nie są dla siebie konkurencją, wpływając na addytywność ryzyka.

Stochastyczna nierówność dla dwóch zmiennych losowych $X \leq Y$ jest rozumiana jako $X(\omega) \leq Y(\omega)$ $\omega \in \Omega$. To oznacza, że prawie na pewno zachodzi taka nierówność dla wszystkich miar probabilistycznych w przestrzeni probabilistycznej. Dla pary zmiennych losowych (X, Y) mówimy, że jest *co-monotoniczna,* jeżeli nie istnieje para ω_1, $\omega_2 \in \Omega$, taka, że $X(\omega_1) < X(\omega_2)$ podczas gdy $Y(\omega_1) > Y(\omega_2)$ [Denberg, 1994]. Równoważnie, co-monotoniczne zmienne losowe można scharakteryzować jako niemalejące funkcje zmiennych losowych. Co-monotoniczność jest silną zależnością dodatnią i często redukuje zmienne wielowymiarowe do jednowymiarowych. Miara VaR nie spełnia warunku subbaddytywności, nie jest koherentna, w przeciwieństwie do CVaR. Co więcej, VaR nie jest miarą wypukłą, co oznacza, że dla inwestorów być może korzystniej inwestować w pojedyncze papiery wartościowe.

Udowodniono [Wang, 2000], że jeżeli $\boldsymbol{X}$ zawiera wszystkie rozkłady Bernoulliego(p), z prawdopodobieństwem sukcesu p, $0 \leq p \leq 1$, wówczas TMR ρ spełnia warunki: $\rho(1) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy ρ ma całkę Choqueta w powiązaniu z transformującym prawdopodobieństwem:

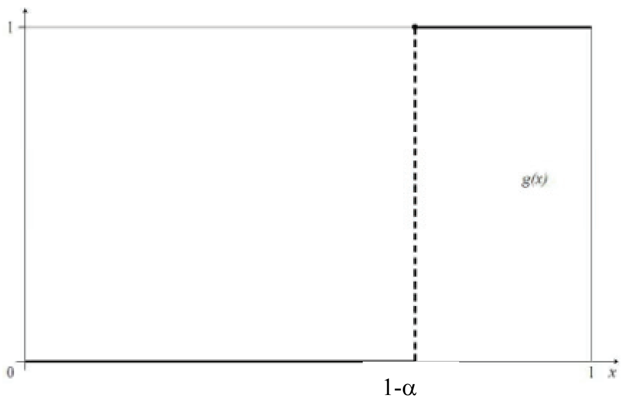
[3] *Law invariance:* rozkłady mają takie same dystrybuanty i ten sam poziom akceptowalności.

$$\rho_g(X) = \int Xd(g \circ P) = \int_{-\infty}^{0}[g(P(X > x)) - 1)]dx + \int_{0}^{\infty}[g(P(X > x))dx\,, \tag{6}$$

gdzie $g(.)$ jest funkcją transformującą, taką że g:[0, 1] → [0, 1] jest funkcją niemalejącą oraz taką, że $g(0) = 0$ oraz $g(1) = 1$ dodatkowo $(g \circ P)(A) := g(P(A))$ jest nazwana transformującym prawdopodobieństwa. Reprezentacja z wykorzystaniem całki Choqueta dla TMR jest przydatna do wykazania własności matematycznych. Dodatkowo obliczanie TMR jest łatwe z wykorzystaniem wartości oczekiwanej X względem rozkładu prawdopodobieństwa $P^* := g \circ P$ [4].

Przykładowo dla $g(x) = x$, otrzymujemy $\rho_g(X) = E[X]$, jeżeli nadzieja matematyczna istnieje. Przytoczone VaR odpowiada funkcji transformującej:

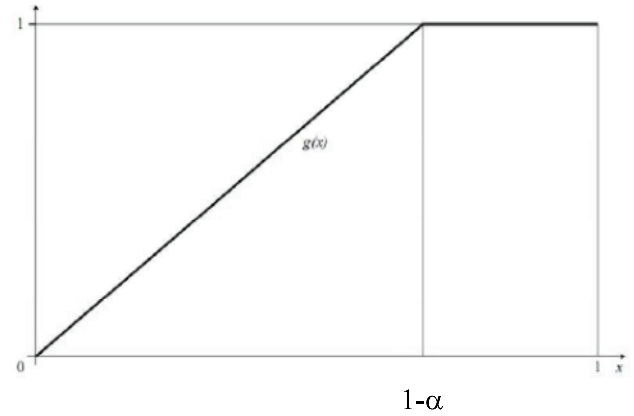
$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 1-\alpha \\ 1, & x \geq 1-\alpha \end{cases}$$



Rys. 1. Funkcja transformującą dla *VaR*

Funkcja transformująca jest ciągła w tym przypadku, a ponieważ występuje skok w $x = 1 - \alpha$ (rys. 1). To determinuje fakt, że *VaR* nie jest miarą koherentną. W rezultacie, *VaR* nie jest dobrym przykładem funkcji transformującej.

[4] Rozpatrzymy szczególny przypadek $\mu(A) = g[P(X \in A)] := P^*(A)$, gdzie g jest funkcją transformującą, P jest miarą probabilistyczną na σ-algebrze zbiorów Borelowskich B, oraz X jest zmienna losową. Tak określona funkcja μ jest funkcją transformującą prawdopodobieństwo P^*.



Rys. 2. Funkcja transformującą dla C*VaR*.

Zapiszemy najczęściej wykorzystywane funkcje transformujące:
transformacja CVaR (rys. 2):

$$g_{CVaR}\,(x,\,\alpha) = \min\{x/(1\alpha),\,1\}\ \text{dla}\ \alpha \in [0,1) \tag{7}$$

transformacja Wanga (WT):

$$g_{WT}(x,\,\beta\,) = \Phi[\Phi^{1}(x) - \Phi^{1}(\beta)]\ \text{dla}\ \beta \in [0,1) \tag{8}$$

Inne przykłady funkcji transformujących są następujące: g_{DP}, funkcja dualnej mocy (the dual-power) g_{DP} oraz proporcjonalna funkcja hazardu g_{PH} zapisane następująco [Wirch, Hardy, 2001; Trzpiot, 2004, 2006]:

$$g_{DP}(x,\nu) = 1-(1-x)^{\frac{1}{\nu}}\ ,\ x \in [0,\ 1],\ \nu \leq 1 \tag{9}$$

$$g_{PH}\,(x,\gamma) = x^{\gamma}\ ,\ x \in [0,\ 1],\ \gamma \leq 1. \tag{10}$$

Powyższe miary są określone zgodnie z asymetryczną percepcją ryzyka inwestorów. Wykorzystano ideę asymetrii do standardowej konstrukcji TMR.

Dla portfela z dyskretnym rozkładem strat zmienna losowa $\boldsymbol{L} = (l_1, \ldots , l_m)$ z masą prawdopodobieństwa $\Pr[\boldsymbol{L} = l_i] = p_i$ dla $i = 1, \ldots , m$, ma dystrybuantą $F_l(l) = \sum_{i=1}^{m} p_i \mathbf{1}_{\{l_i \leq l\}}$ i dodatkowo zapisujemy funkcję przeżycia $S_l(l) = 1 - F_l(l)$. Funkcję przeżycia nazywamy też odwrotną dystrybuantą.

4. Model optymalnego portfela z wykorzystaniem koherentnych transformujących miar ryzyka

Koherentne transformujące miary ryzyka (KTMR) są miarami łączącymi własności koherentnych miar ryzyka (KMR) oraz transformujących miary ryzyka (TMR). Możemy zdefiniować taką klasę miar następująco:

Definicja 4.1 Powiemy, że ρ jest koherentną transformującą miarą ryzyka (KTMR) jeżeli

– ρ_g jest transformującą miarą ryzyka (TMR) z wypukłą funkcją transformującą g,

albo równoważnie

– ρ jest koherentną miarą ryzyka (KMR), która spełnia dodatkowo dwie własności: co-monotoniczniość i translacja inwariantna.

Następujące twierdzenie dla klasy zdefiniowanych miar KTMR jest fundamentalne w przystosowaniu optymalizacji wypukłej w selekcji portfela.

Twierdzenie 4.1 [Kusuoka, 2001, s. 83-95]. Dla dowolnej zmiennej losowej X oraz wypukłej funkcji transformującej g, miara ryzyka ρ_g jest KTMR wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja w:$[0,1] \to [0,1]$, spełniająca warunek $\int\limits_{\alpha=0}^{1} w(\alpha)d\alpha = 1$, oraz

$$\rho_\alpha(X) = \int\limits_{\alpha=0}^{1} w(\alpha)\phi_\alpha(X)d\alpha, \tag{11}$$

gdzie $\phi_\alpha(X)$ jest $CVaR_\alpha$ dla zmiennej losowej X.

Powyższe twierdzenie mówi o tym, że dowolna KTMR może być wypukłą kombinacją $CVaR_\alpha(X)$, $\alpha \in [0, 1]$ i możemy skonstruować dowolną KTMR bazując na wypukłej kombinacji $CVaR_\alpha(X)$.

To twierdzenie zostało udowodnione dla ciągłych funkcji straty portfela [Kusuoka, 2001]. Zapisano również silniejsze twierdzenie mówiące o tym, że KTMR może być reprezentowana przez wypukłą kombinację skończonej liczby $CVaR_\alpha(X)$ przy założeniu, że funkcja straty portfela ma rozkład dyskretny [Bertsimas, Brown, 2009, s. 1483-1495]. Celem sformułowania zadania programowania wypukłego przy selekcji portfela zapiszemy uogólnione twierdzenie dla klasy KTMR z ogólną dyskretną funkcją straty. Zapiszemy następującą definicję [Feng, Tan, 2012]:

Definicja 4.2 Dla ustalonej obserwacji funkcji straty $\boldsymbol{L} = (l_1, \ldots, l_m)$ oraz uporządkowanych wartości strat $l_{(1)} < l_{(2)} < \ldots < l_{(m)}$, prawdopodobieństwa $p_{(i)}$ odpowiadają realizacjom $l(i)$, i =1, … , m oraz $S_l\left(l_{(i)}\right) = 1 - \sum_{j=1}^{i} p_{(i)}$. Definiujemy $CVaR_a$ jako macierz $\mathbf{Q} \in R^m \times R^m$, o kolumnach $\mathbf{Q}_i \in R^m$, i = 1, … , m.

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_m] = \begin{bmatrix} p(1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p(2) & \frac{p(2)}{1 - S_l\left(l_{(1)}\right)} & 0 & \ldots & 0 \\ p(3) & \frac{p(3)}{1 - S_l\left(l_{(1)}\right)} & \frac{p(3)}{1 - S_l\left(l_{(2)}\right)} & \ldots & 0 \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p(m) & \frac{p(m)}{1 - S_l\left(l_{(1)}\right)} & \frac{p(m)}{1 - S_l\left(l_{(2)}\right)} & \ldots & \frac{p(m)}{1 - S_l\left(l_{(m-1)}\right)} \end{bmatrix}$$

Ponieważ straty portfela mają rozkład dyskretny o m punktach skokowych, obserwujemy m skoków funkcji dystrybuanty zmiennej $\boldsymbol{L}$.

Definiujemy

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & dla \quad i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} p_{(j)} & dla \quad i = 2, \ldots m \end{cases} \tag{12}$$

w zapisanych m skokach, wówczas m wartości CVaR przy tych poziomach prawdopodobieństw otrzymujemy jako

$$\phi_{\alpha_i}(l) = \frac{1}{1 - \alpha_i} \sum_{j=i}^{m} p(j) l(j) = \sum_{j=i}^{m} \frac{p(j)}{1 - S_l\left(l_{(m-1)}\right)} l(j) = \sum_{j=i}^{m} Q_{ij} l(j), \tag{13}$$

dla i =1, … , m oraz Q_{ij} jest elementem macierzy $\mathbf{Q}$. Wartości zapisane w kolumnie $\mathbf{Q}_i$ są istotne przy wyznaczaniu wartości $CVaR_{(i-1)/m}(L)$.

Zapiszemy dla zbioru wag: $w(\alpha) \geq 0$ oraz $\int_{\alpha=0}^{1} w(\alpha) d\alpha = 1$, funkcję

$$M_g(x, \zeta) = \int_{\alpha=0}^{1} w(\alpha) F(x, \zeta_\alpha) d\alpha. \tag{14}$$

Twierdzenie 4.1 dopuszcza istnienie $w(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$ oraz określa KTMR dla zbioru wag. Dla każdego α istnieje odpowiednia zmienna losowa ζ_α, wyznaczając pochodne cząstkowe, następnie przyrównując do zera uzyskujemy punkt stacjonarny funkcji $M_g(x,\zeta)$. Zatem możemy zapisać powiązanie pomiędzy KTMR (zapisana jako $\rho_g(\boldsymbol{x})$) oraz wypukłą funkcją reprezentacją $M_g(x,\zeta)$ [Feng, Tan, 2012].

Twierdzenie 4.2. Dla miary $\rho_g(\boldsymbol{x})$, która jest KTRM z funkcją transformującą g wyznaczenie minimum dla $\rho_g(\mathbf{x})$ względem $\mathbf{x}\in\mathbf{S}$ jest równoważne wyznaczeniu minimum $M_g(x,\zeta)$ dla wszystkich $(\mathbf{x}, \zeta) \in \mathbf{S} \times \mathbf{R}^{\zeta}$ w tym znaczeniu, że:

$$\min_{x\in S} \rho_g(x) = \min_{(x,\zeta)\in S\times R^{\varsigma}} M_g(x,\zeta), \tag{15}$$

ponadto

$$\left(x^*,\zeta^*\right)\in \underset{(x,\zeta)\in S\times R^{\varsigma}}{\arg\min}\ M_g(x,\zeta) \Leftrightarrow x^* \in \underset{x\in S}{\arg\min}\,\rho_g(x),\ \zeta^* \in \underset{\zeta\in R^{\varsigma}}{\arg\min}\, M_g\left(x^*,\zeta\right) \tag{16}$$

Dla portfela $\mathbf{x}$, chcemy znaleźć $\boldsymbol{\zeta}^*$, które minimalizuje $M_g(\mathbf{x},\zeta)$. Ponieważ $M_g(x,\zeta)$ jest wypukłą funkcją $\boldsymbol{\zeta}$, wyznaczamy gradient $M_g(\mathbf{x},\zeta)$ względem ζ i przyrównujemy do zera. W konkluzji, koherentne transformujące miary ryzyka są wartościami oczekiwanymi dla nowego rozkładu z mniej ciężkim ogonem niż początkowy rozkład.

Zgodnie z twierdzeniem 4.2, możemy zastąpić $\rho_g(\mathbf{x})$ przez $M_g(\mathbf{x},\zeta)$ przy wyborze portfela. Ponieważ $Mg(\mathbf{x},\zeta)$ jest funkcją wypukłą $(\mathbf{x},\zeta)$, problem wyboru portfela jest zadaniem programowania wypukłego dla wypukłego zbioru $\mathbf{S}$. Zapisane wyniki są podobne do uzyskanych przez Rockafellar-Uryasev [Rockafellar, Uryaser, 2002] przy wyborze CVaR jako kryterium optymalizacji portfela. Możemy zatem zapisać takie zadanie z KTMR jako funkcją celu lub jako kryterium ograniczające (zadanie dualne) w sposób analogiczny do zadania z CVaR jako funkcją celu lub jako kryterium ograniczające.

Możemy zanotować następujące uwagi. Portfel z kryterium PH jest prawie równoważny portfelowi z kryterium CVaR, z ekstremalnymi wartościami α przyjętymi dla wyznaczenia CVaR, czyli dla $\alpha = 0{,}99$ lub $\alpha = 0$. Minimalizacja względem CVaR z wysokimi wartościami α implikuje wysoką awersję do ryzyka, to jest ograniczanie poziomu ryzyka. Odnosząc się do klasycznej teorii decyzji, w której mieści się teoria portfela (pomiaru ryzyka oraz oceny sukcesu), inwestorzy z awersją do ryzyka poszukują portfeli z ograniczonym poziomem ryzyka lub jak najmniejszym, możliwym do wyznaczenia przez odpowiednią KTMR, ale przy zysku przekraczającym najniższy oczekiwany dochód. Oczekiwany dochód z inwestycji, co wynika z definicji funkcji transformujących, przykładowo maleje wraz z rosnącą wartością α dla CVaR analogicznie maleje wraz z rosnącą wartością β dla WT.

Podsumowanie

Przedstawiliśmy zadanie znane liniowej optymalizacji dla CVaR w odniesieniu do ogólnej klasy miar ryzyka. W pierwszym kroku przypomnieliśmy definicje KMR oraz TMR, a następnie zapisaliśmy klasę KTMR. Przy przyjętych do analiz założeniach o typach rozkładów zapisaliśmy zadanie optymalizacji wykorzystując programowanie liniowe. Powiązanie klasy zdefiniowanych miar z awersją do ryzyka, funkcjami użyteczności, a również teorią dominacji stochastycznych oraz regresją kwantylową zostało omówione w innej pracy dotyczącej ewaluacji portfela [Trzpiot, 2010].

Literatura

Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. (1999), *Coherent measures of risk*, "Mathematical finance", Vol. 9(3), s. 203-228.

Bawa V.S., Lindenberg E.B. (1977), *Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework*, "Journal of Financial Economics", Vol. 5(2), s. 189-200.

Bertsimas D., Brown D.B. (2009), *Constructing uncertainty sets for robust linear optimization*, "Operations research", Vol. 57(6), s. 1483-1495.

Denneberg D. (1994), *Non-additive measure and integral*, Kluwer, Dordrecht.

Dhaene J., Wang S.S., Young V.R., Goovaerts M.J. (2000), *Comonotonicity and maximal stop-loss premiums*, "Bulletin of the Swiss Association of Actuaries" Vol. 2, s. 99-113.

Feng M.B., Tan K.S. (2012), *Coherent distortion risk measures in portfolio selection*, "System Engineering Procedia", Vol. 4, s. 25-34.

Harvey C.R., Liechty J., Liechty M., Müller P. (2010), *Portfolio selection with higher moments*, "Quantitative Finance", Vol. 10(5), s. 469-485.

Kusuoka S. (2001), *On law invariant coherent risk measures*, "Advances in Mathematical Economics", Vol. 3, s. 83-95.

Markowitz H.M. (1952), *Portfolio selection*, "The Journal of Finance", Vol. 7(1), s. 77-91.

Markowitz H.M. (1959), *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, 94, Cowles Foundation, New Haven, CT.

Rockafellar R.T., Uryasev S. (2002), *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, "Journal of Banking & Finance", Vol. 26(7), s.1443-1471.

Rockafellar R.T., Uryasev S. (2000), *Optimization of conditional value-at-risk*, "Journal of risk", Vol. 2, s. 21-42.

Roy A.D. (1952), *Safety first and the holding of assets*, "Econometrica: Journal of the Econometric Society", s. 431-449.

Trzpiot G. (2005), *Partial moments and negative moments in ordering asymmetric distribution*, [w:] D. Baier, K.-D. Wernecke (eds.), *Innovations in classification, data science and information systems*, Proceedings of 27th Annual GFKL Conference, University of Cottbus, March 11-14 2003. Springer-Verlag, Heidelberg--Berlin, s. 181-188.

Trzpiot G. (2004), *O wybranych właściwościach miar ryzyka*, „Badania Operacyjne i Decyzyjne", nr 3-4, s. 91-98.

Trzpiot G. (2006), *Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka na rynku finansowym*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.

Trzpiot G. (2010), *Pesymistyczna optymalizacja portfelowa* [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko'09*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice, s. 121-128.

Trzpiot G. (2012), *Własności transformujących miar ryzyka*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Katowice, s. 21- 36.

Wang S.S. (2000), *A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks*, "The Journal of Risk and Insurance", Vol. 67(1), s. 15-36.

Wirch J, Hardy M.R. (2001), *Distortion risk measures: Coherence and stochastic dominance*, Working Paper, http://pascal.iseg.uti.pt/~cemapre/ime2002.

OPTIMAL PORTFOLIO SELECTIONS BASED ON COHERENT DISTORTION RISK MEASURES

Summary: The aim of this paper is application linear programming methodology to solving portfolio selection problems. We enlarge linear optimization problem for quantile risk measures that means for Conditional Value-at-Risk (CVaR) based portfolio selection problems to class of risk measure known as the class of coherent distortion risk measures. We describe independently coherent distortion risk measure and distortion risk measure by a list of properties. At the end we goes to the class of risk measures witch put both approaches together. coherent distortion risk measures include a range of well-known risk measures as CVaR, Wang Transform measure, Proportional Hazard measure.

Keywords: coherent risk measure, distortion risk measure, portfolio selection.