

**Barbara Gładysz**  
Politechnika Wroclawska

# **ROZMYTE LICZBY PRZEDZIAŁOWE W HARMONOGRAMOWANIU PRZEDSIĘWZIĘĆ METODĄ ŁAŃCUCHA KRYTYCZNEGO**

## **Wstęp**

Pierwszą przedstawioną w literaturze techniką planowania przedsięwzięć jest metoda deterministyczna CPM (*Critical Path Method*). Dzisiaj równolegle funkcjonują probabilistyczne i rozmyte techniki harmonogramowania. W latach 1956-1957 zaproponowano metodę PERT (*Program Evaluation and Review Technique*), w której przyjmuje się, że czas realizacji zadań jest rozkładem beta. W literaturze są rozważane również metody analizy czasowej przedsięwzięć dla przypadków, gdy czasy zadań mają inne rozkłady prawdopodobieństwa, np.: rozkład wykładniczy, rozkład Weibulla, rozkład Golenko-Ginzburga, rozkład beta z grubymi ogonami. Równolegle są rozwijane metody analizy czasowej przedsięwzięć dla czasów zadań zadanych w postaci liczb rozmytych. Przegląd metod oraz technik harmonogramowania przedsięwzięć można znaleźć w pracy Kuchty [2011].

W roku 1997 Goldratt zaproponował metodę łańcucha krytycznego, w której zastosował teorię ograniczeń w konstrukcji bezpiecznego harmonogramu przedsięwzięć [Goldratt 1997]. Proponuje on uwzględnienie przy konstrukcji harmonogramu syndromu studenta oraz prawa Parkinsona, zgodnie z którymi: czas zadań jest przeszacowywany, a zadania są realizowane w ostatniej chwili. Goldratt przyjmuje planowany czas realizacji zadania na poziomie 50% kwantyla 90% (80%) przewidywanego czasu zadania. Ponadto proponuje on przyjęcie bufora czasu zabezpieczającego przed ryzykiem niedotrzymania terminu projektu na poziomie 50% planowanego czasu zadań. Takie założenia prowadzą często do bardzo dużych buforów projektu, a tym samym długiego planowanego terminu zakończenia całego projektu.

W literaturze zaproponowano wiele modyfikacji pierwotnej koncepcji łańcucha krytycznego. Ashtiani i in. [2007] oraz Fallah i in. [2010] rozważają harmonogramy przedsięwzięć dla logarytmicznie normalnego rozkładu czasu realizacji zadań. Millian [2005] analizuje własności buforów czasu łańcuchów projektu dla wybranych rozkładów prawdopodobieństwa czasów zadań. Konstrukcji harmonogramów w sytuacji, gdy czasy zadań są zadane jako liczby rozmyte, jest poświęconych wiele prac [m.in. Ma Guo-Feng, Yiang Yong-Bin 2012; Kulejewski i in. 2011; Zhao i in. 2008]. Połoński i Pruszyński [2008a, 2008b] wprowadzają dodatkowe bufory w łańcuchu krytycznym zabezpieczające przed możliwością powstania w trakcie realizacji projektu dodatkowych łańcuchów krytycznych.

W niniejszym artykule do opisu charakterystyki czasowej przedsięwzięcia wykorzystamy dwa rodzaje opisu niepewności: probabilistyczną i rozmytą.

W probabilistycznej analizie przedsięwzięć PERT przyjmuje się, że czas wykonania zadań ma rozkład beta na odcinku  $[a, b]$  o funkcji gęstości:

$$f(t) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{(t-a)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1}}{(b-a)^{\alpha+\beta-1}} \quad (1)$$

Wartość oczekiwana, wariancja i wartość najbardziej prawdopodobna w rozkładzie beta wyrażają się wzorami (dla  $\alpha > 1, \beta > 1$ ):

$$E(T) = \frac{ab + \beta a}{\alpha + \beta} \quad (2)$$

$$D^2(T) = \frac{\alpha\beta(b-a)^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \quad (3)$$

$$M(T) = \frac{(\alpha-1)b + (\beta-1)a}{\alpha + \beta - 2} \quad (4)$$

Parametry rozkładu czasu wykonania poszczególnych zadań przedsięwzięcia wyznacza się na podstawie wiedzy ekspertów. Ekspert podaje trzy charakterystyki czasowe: ocenę optymistyczną  $a$ , pesymistyczną  $b$  i najbardziej prawdopodobną (dominantę)  $m$ . W klasycznym podejściu PERT przyjmuje się, że wartość oczekiwana i wariancja czasu zadania są następujące:

$$E(T) = \frac{a+4m+b}{6} \quad (5)$$

$$D^2(T) = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2 \quad (6)$$

Krytyczne uwagi do stosowania wzorów (5)-(6) w praktyce dotyczą m.in. faktu, że wszystkie zadania, dla których różnica pomiędzy pesymistycznym i optymistycznym czasem jest jednakowa, mają taką samą wariancję. Kolejnym założeniem przyjętym w metodzie PERT jest założenie, że eksperci znają naturę rozkładu beta i podane przez nich oceny czasu są zgodne z własnościami tego rozkładu. Tak nie jest zawsze. Często oszacowane przez ekspertów charakterystyki czasu zadań nie spełniają układu równań (2)-(4).

Wzory (5) i (6) określają odpowiednio wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu beta, wówczas gdy  $\alpha = 3 \pm \sqrt{2}$ ,  $\beta = 3 \mp \sqrt{2}$  lub gdy  $\alpha = \beta = 4$ . Jeżeli  $\alpha = \beta = 4$ , to rozkład beta jest rozkładem symetrycznym [Grubbs 1962]. Gdy  $\alpha = 3 - \sqrt{2}$ ,  $\beta = 3 + \sqrt{2}$ , to rozkład beta jest rozkładem prawoskośnym, a gdy  $\alpha = 3 + \sqrt{2}$ ,  $\beta = 3 - \sqrt{2}$  – rozkładem lewoskośnym. Jeżeli  $\alpha = 3 \pm \sqrt{2}$ ,  $\beta = 3 \mp \sqrt{2}$ , to zgodnie ze wzorem (4) wartość najbardziej prawdopodobna jest równa  $M(T) = \frac{(2 \pm \sqrt{2})a + (2 \mp \sqrt{2})b}{4}$ . Jak wspomniano wcześniej, często jednak podana przez ekspertów najbardziej prawdopodobna wartość czasu zadania  $m$  nie odpowiada teoretycznej wartości dominanty  $M(T)$  rozkładu beta.

Przedstawimy teraz elementy teorii zbiorów rozmytych. Koncepcję zbioru rozmytego zaproponował w 1965 r. Zadeh [1965]:

Przedziałową liczbą rozmytą  $\tilde{X}$  nazywamy rodzinę rzeczywistych przedziałów domkniętych  $[\tilde{X}]_\lambda$ , gdzie  $\lambda \in [0,1]$  taką, że:  $\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow [\tilde{X}]_{\lambda_1} \subset [\tilde{X}]_{\lambda_2}$  oraz  $I \subseteq [0,1] \Rightarrow [\tilde{X}]_{\sup I} = \bigcap_{\lambda \in I} [\tilde{X}]_\lambda$ . Przedział  $[\tilde{X}]_\lambda$  dla ustalonego  $\lambda \in [0,1]$  nazywa się  $\lambda$ -poziomem liczby rozmytej  $\tilde{X}$ . Będziemy go oznaczać jako  $[\tilde{X}]_\lambda = [\underline{x}(\lambda), \bar{x}(\lambda)]$ .

Dubois i Prade [1978] wprowadzili następującą użyteczną definicję klasy przedziałowych liczb rozmytych typu L-R. Przedziałową liczbę rozmytą  $\tilde{X}$  nazywa się liczbą rozmytą typu L-R, jeśli jej funkcja przynależności przyjmuje postać:

$$\mu_{\tilde{X}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{m-a}\right) & \text{dla } x < \underline{m} \\ 1 & \text{dla } \underline{m} \leq x \leq \bar{m} \\ R\left(\frac{x-\bar{m}}{b-\bar{m}}\right) & \text{dla } x > \bar{m} \end{cases} \quad (7)$$

gdzie:  $L(x)$ ,  $R(x)$  – ciągłe nierosnące funkcje  $x$ .

Funkcje  $L(x)$ ,  $R(x)$  są zwane funkcjami kształtu liczby rozmytej. Najczęściej stosowanymi postaciami funkcji kształtu są:  $\max\{0, 1 - x^p\}$  oraz

$\exp(-x^p)$ ,  $x \in [0, +\infty)$ ,  $p \geq 1$ . Przedziałową liczbę rozmytą, dla której  $L(x)$ ,  $R(x) = \max\{0, 1 - x^p\}$  oraz  $\underline{m} = \overline{m} = m$ , nazywa się trójkątną liczbą rozmytą.

Medianą  $ME(\tilde{X})$  liczby rozmytej  $\tilde{X}$  typu L-R nazywamy liczbę rzeczywistą  $Me$ , dla której jest spełniona równość [Bodjanova 2005]:

$$\int_{-\infty}^{Me} \mu_X(x) dx = \int_{Me}^{+\infty} \mu_X(x) dx = 0,5 \cdot card(\tilde{X}) \quad (8)$$

gdzie  $card(\tilde{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_X(x) dx$  – moc zbioru rozmytego  $\tilde{X}$ .

Analogicznie można zdefiniować pojęcie kwantyla rzędu  $q$  liczby rozmytej  $\tilde{X}$  jako liczbę rzeczywistą, dla której zachodzi:

$$\int_{-\infty}^q \mu_X(x) dx = q \cdot card(\tilde{X}) \quad (9)$$

Przypuśćmy teraz, że mamy dwa zbiory rozmyte  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$ . Funkcja przynależności przekroju tych zbiorów  $\tilde{Z} = \tilde{X} \cap \tilde{Y}$  ma postać [Zadeh 1965]:

$$\mu_Z(x) = \min(\mu_X(x), \mu_Y(x)) \quad (10)$$

Niech  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  będą dwiema liczbami rozmytymi o funkcjach przynależności odpowiednio  $\mu_X(x), \mu_Y(y)$ . Wówczas, zgodnie z zasadą rozszerzania Zadeha [1965], funkcja przynależności sumy  $Z = X + Y$  przyjmuje postać:

$$\mu_Z(z) = \sup_{z=x+y} (\min(\mu_X(x), \mu_Y(y))) \quad (11)$$

Jeżeli chcemy porównać dwie liczby rozmyte, tzn. chcemy określić możliwość, że realizacja  $\tilde{X}$  (wartość przyjęta przez  $\tilde{X}$ ) będzie większa równa (nie mniejsza) od realizacji  $\tilde{Y}$ , to możemy skorzystać z indeksu zaproponowanego przez Dubois i Prade [1988]:

$$\text{Pos}(X \geq Y) = \sup_{x \geq y} (\min(\mu_X(x), \mu_Y(y))) \quad (12)$$

## 1. Rozmyta metoda łańcucha krytycznego

Załóżmy, że ekspert podaje trzy oceny czasu zadania  $(i, j) \in A$ : czas minimalny  $(a_{ij})$ , czas maksymalny  $(b_{ij})$  oraz wartość najpewniejszą  $m_{ij}$  (lub:  $[\underline{m}_{ij}, \overline{m}_{ij}]$ ).

Oceny te wykorzystamy do konstrukcji rozkładu prawdopodobieństwa (dystrybuanty  $F_{ij}(t)$ ) czasu zadania  $T_{ij}$  według następujących reguł. Jeżeli we-

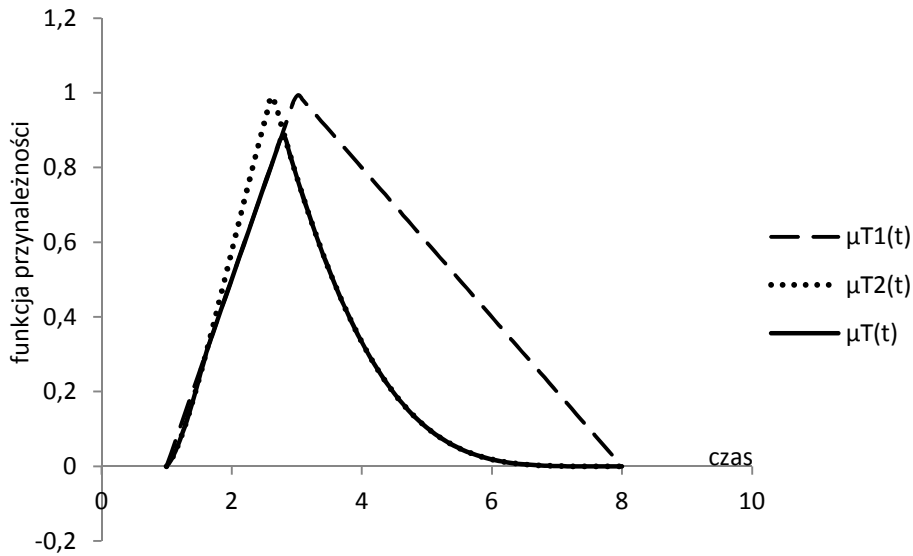
dług eksperta mamy do czynienia z rozkładem prawoskośnym, to w estymacji rozkładu prawdopodobieństwa beta przyjmujemy  $\alpha = 3 - \sqrt{2}$ ,  $\beta = 3 + \sqrt{2}$ . Jeżeli czas zadania w opinii eksperta jest rozkładem lewoskośnym, to  $\alpha = 3 + \sqrt{2}$ ,  $\beta = 3 - \sqrt{2}$ . Jeżeli natomiast czas zadania jest rozkładem symetrycznym, to przyjmujemy  $\alpha = \beta = 4$ .

Skonstruujemy teraz dwie rozmyte oceny czasu  $\tilde{T}_{ij}^1, \tilde{T}_{ij}^2$  zadania  $(i, j)$ . Pierwszą ocenę czasu  $\tilde{T}_{ij}^1$  wyznaczymy ad hoc na podstawie wzoru (7), przyjmując np. liniowy kształt funkcji przynależności  $\mu_{T_{ij}^1}(t)$ . Drugą ocenę  $\tilde{T}_{ij}^2$  skonstruujemy na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa czasu zadania  $F_{ij}(t)$  metodą zaproponowaną przez Beliakova [1996], przyjmując za funkcję przynależności  $\mu_{T_{ij}^2}(t)$  unormowaną funkcję:

$$\mu_{T_{ij}^2}(t) = 2 * \min\{F_{ij}(t), 1 - F_{ij}(t)\} \quad (13)$$

Dysponujemy teraz dwiema rozmytymi ocenami czasu zadania. Pierwsza jest oceną ad hoc wyznaczoną na podstawie podanych przez eksperta trzech ocen czasu zadania. Druga ocena czasu zadania została określona na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa beta z uwzględnieniem charakterystyki czasu zadania podanej przez eksperta. Za funkcję przynależności czasu zadania  $(i, j)$  przyjmujemy funkcję przynależności zbioru rozmytego  $\tilde{T}_{i,j} = \tilde{T}_{ij}^1 \cap \tilde{T}_{ij}^2$ .

Przypuśćmy, że ekspert podał następujące oceny czasu pewnego zadania:  $a = 1$ ,  $m = 3$ ,  $b = 8$ . Według ocen czasu podanych przez eksperta rozkład prawdopodobieństwa czasu zadania jest rozkładem prawoskośnym (rozkład beta dla  $\alpha = 3 - \sqrt{2}$  i  $\beta = 3 + \sqrt{2}$ ). Na rysunku 1 przedstawiono trzy funkcje przynależności czasu zadania (trójkątny rozkład ad hoc)  $\mu_{T^1}(t)$ , funkcję przynależności  $\mu_{T^2}(t)$  wyznaczoną metodą Beliakova na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa beta zgodnie ze wzorem (13) oraz funkcję przynależności przekroju  $\tilde{T}_{i,j}$  zbiorów rozmytych  $\tilde{T}^1, \tilde{T}^2$ :  $\mu_T(t) = \min(\mu_{T^1}(t), \mu_{T^2}(t))$ .



Rys. 1. Funkcje przynależności czasu zadania

Tak wyznaczoną ocenę czasu zadania wykorzystamy w konstrukcji harmonogramu przedsięwzięcia. Niżej przedstawimy odpowiedni algorytm.

#### Algorytm konstrukcji harmonogramu przedsięwzięcia

Krok 1. Na podstawie podanych przez ekspertów charakterystyk czasów  $a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}$  zadań  $(i, j)$  przedsięwzięcia: dla każdego zadania wyznacz rozkład prawdopodobieństwa beta czasu (przyjmując parametry  $\alpha, \beta$  zgodnie z podaną przez eksperta asymetrią) oraz wyznacz na podstawie wzorów (7) i (13) funkcje przynależności rozmytych ocen czasu  $\tilde{T}_{ij}^1, \tilde{T}_{ij}^2$ .

Krok 2. Dla każdego zadania wyznacz funkcję przynależności czasu zadania  $\tilde{T}_{i,j} = \tilde{T}_{ij}^1 \cap \tilde{T}_{ij}^2$  zgodnie ze wzorem (10).

Krok 3. Przyjmij, przez analogię do propozycji Goldratta, że planowanym czasem  $T(i, j)$  realizacji zadania  $(i, j)$  jest mediana  $ME(\tilde{T}_{i,j})$  czasu  $\tilde{T}_{i,j}$  (wzór 8).

Krok 4. Wyznacz łańcuch krytyczny  $CC$  oraz zapasy czasu zadań leżących na łańcuchach zasilających, przyjmując za czasy realizacji zadań  $Me(i, j) = ME(\tilde{T}_{i,j})$ .

Krok 5. Dla każdego zadania wyznacz bufor czasu  $B(i, j)$  jako połowę różnicy między kwantylem 0,9 (wzór 10) a medianą czasu zadania  $Me(i, j)$ .

Krok 6. Wyznacz bufor projektu  $BP$  jako sumę buforów czasów zadań leżących na łańcuchu krytycznym.

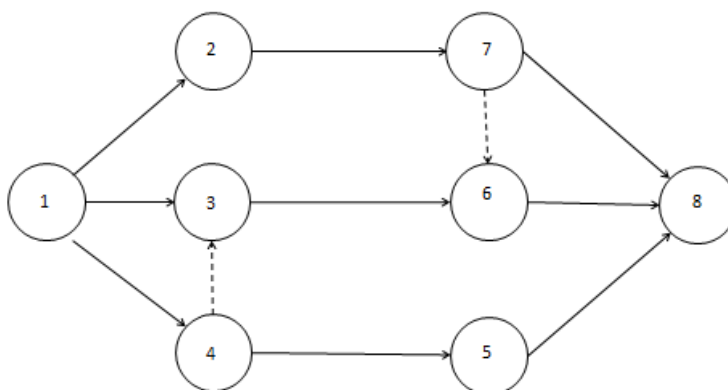
Krok 7. Dla każdego łańcucha zasilającego wyznacz  $BZS$  (suma buforów czasów zadań leżących na łańcuchu) oraz bufor łańcucha  $BZ = \min(BZS, FF)$ , gdzie  $FF$  jest swobodnym zapasem czasu ostatniego zadania w łańcuchu zasilającym.

Krok 8. Wyznacz funkcję przynależności czasu realizacji projektu, tj. funkcję przynależności sumy czasów wykonania zadań łańcucha krytycznego  $CC$ .

Zaproponowany algorytm wymaga obliczeń numerycznych. Nie można bowiem wyznaczyć analitycznej postaci dystrybuanty rozkładu beta, jak również nie można wyznaczyć analitycznej postaci mediany czasów zadań czy analitycznej postaci funkcji przynależności czasu realizacji projektu. Zaletą zaproponowanego algorytmu jest uwzględnienie w analizie czasowej przedsięwzięcia wszystkich trzech ocen czasów zadań podanych przez eksperta zgodnie z jego intuicją.

## 2. Przykład

Rozważmy przykład z pracy Li, Chen [2007]. Przedsięwzięcie jest złożone z 8 zadań. Do realizacji zadań są wymagane zasoby A, B, C, D, E, F. Graf przedsięwzięcia z uwzględnieniem zależności technologicznych oraz ograniczeń na zasoby (łuki opisane linią przerywaną) przedstawiono na rys. 2. Zmodyfikowane dane czasowe podano w tabeli 1, przyjmując wartość  $m_{ij} = 1/2(\underline{m}_{ij} + \bar{m}_{ij})$ .



Rys. 2. Graf przedsięwzięcia

Tabela 1

Charakterystyka zadań projektu

Zadanie	Zasób	Charakterystyka czasowa			
		<i>a</i>	<i>m</i>	<i>b</i>	Skośność
1	A	2	5	8	Symetryczny
2	B	1	5	10	Prawoskośny
3	C	12	18	30	Prawoskośny
4	C	3	4,5	6	Symetryczny
5	D	8	11	16	Prawoskośny
6	E	6	9	12	Symetryczny
7	E	10	25	40	Symetryczny
8	F	2	5	8	Symetryczny

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Li, Chen [2007].

Charakterystyki czasowe projektu wyznaczone zgodnie z podanym algorytmem przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

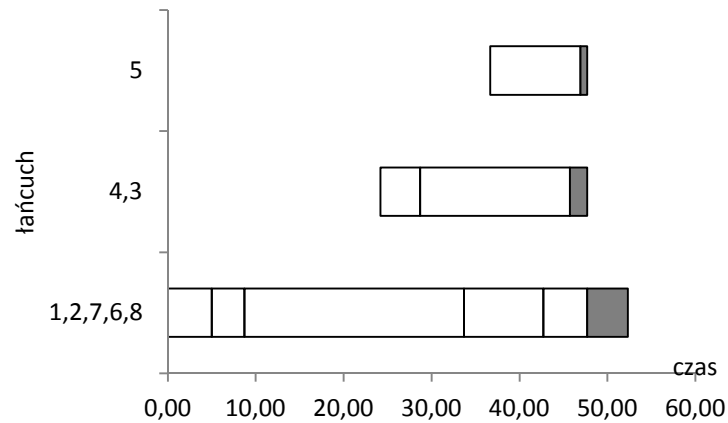
Charakterystyka czasowa projektu

Zadanie	Zasób	Charakterystyka czasowa								
		<i>a</i>	<i>m</i>	<i>b</i>	Mediana	Kwantyl 0,9	Bufor	ES	LF	FF
1	A	2	5	8	5	5,96	0,48	0	5	0
2	B	1	5	10	3,7	5,40	0,85	5	8,7	0
3	C	12	18	30	17,03	20,5	1,74	9,5	33,7	7,17
4	C	3	4,5	6	4,5	5	0,25	5	29,2	19,7
5	D	8	11	16	10,26	11,8	0,77	9,5	42,7	22,94
6	E	6	9	12	9	9,94	0,48	33,7	42,7	0
7	E	10	25	40	25	29,7	2,35	8,7	33,7	0
8	F	2	5	8	5	5,96	0,36	42,7	47,7	0

Źródło: Opracowanie własne.

Łańcuchem krytycznym w analizowanym przedsięwzięciu jest ciąg zadań 1,2,7,6,8. Długość łańcucha krytycznego wynosi 47,7, a bufor projektu 4,63. W projekcie mamy dwa łańcuchy zasilające. Pierwszy jest złożony z zadań 4 i 3 z buforem 1,99, a drugi z jednego zadania 5 z buforem 0,77. Na rysunku 3 przedstawiono harmonogram projektu z zaznaczeniem buforów czasu.



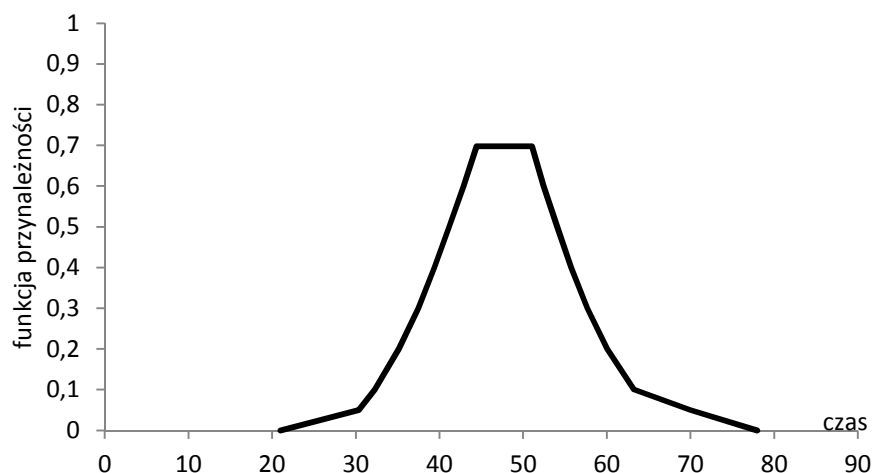


Rys. 3. Harmonogram projektu z zaznaczonymi buforami czasu

Wyznamy teraz funkcję przynależności czasu ukończenia projektu  $\tilde{T}$ , tj. czasu wykonania zadań łańcucha krytycznego  $CC$ :

$$\mu_T(t) = \mu_{\sum_{(i,j) \in CC} T_{ij}}(t)$$

Czasy realizacji zadań projektu nie są liczbami typu L-R. Funkcję przynależności czasu ukończenia projektu wyznaczmy numerycznie. Zastosujemy tu metodę sumowania liczb rozmytych na  $\lambda$ -poziomach (dla  $\lambda = 0, 0,05, 0,1, \dots, 1$ ). Tak aproksymowaną funkcję przynależności czasu zakończenia projektu  $\mu_T(t)$  przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Funkcja przynależności czasu realizacji projektu

Możliwość, że projekt ukończymy w planowanym terminie, wynosi  $Pos(\tilde{T} \leq 47,7) = 0,7$ . Podobnie możliwość ukończenia projektu w czasie 50,33 (planowany czas wykonania zadań łańcucha krytycznego + bufor czasu) to 0,7.

Jeżeli harmonogram dla tego projektu wyznaczylibyśmy metodą zaproponowaną przez Goldratta, planowany czas realizacji wynosiłby 73,875 [Chen, Li 2007], czyli byłby znacznie dłuższy. Goldratt przyjmuje znacznie dłuższy bufor projektu.

## Podsumowanie

W artykule do opisu czasu zadań przedsięwzięcia wykorzystano aparat rachunku prawdopodobieństwa oraz aparat zbiorów rozmytych. Kształt funkcji przynależności czasów zadań estymuje się na podstawie podanych przez ekspertów trzech ocen czasów. Harmonogram przedsięwzięcia konstruuje się na podstawie wartości kwantyli liczb rozmytych. Należy podkreślić, że z uwagi na postać rozkładu prawdopodobieństwa beta wykorzystywanego w estymacji funkcji przynależności czasów zadań, zaproponowana metoda wymaga obliczeń numerycznych.

## Bibliografia

- Ashtiani B., Jajali G.R., Aryanezhad M.B., Makui A., 2007: A New Approach for Buffer Sizing in Critical Chain Scheduling. *Proceedings of the 2007 IEEE Industrial Engineering and Engineering Management*, s. 1037-1041.
- Beliakov G., 1996: Fuzzy Sets and Memberships Functions Based on Probabilities. *„Information Sciences”*, Vol. 91, Iss. 1-2, s. 95-111.
- Bodjanova S., 2005: Median Value and Median Interval of a Fuzzy Number. *„Information Sciences”*, 172, s. 73-89.
- Dubois D., Prade H., 1978: Algorithmes de plus courts chemins pour traiter des donnees floues. *RAIRO Recherche Operationelle/Operations Research* 12, s. 213-227.
- Dubois D., Prade H., 1988: Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty. Plenum Press, New York.
- Fallah M., Ashiani B., Aryanezhad M.B., 2010: Critical Chain Project Scheduling: Utilizing Uncertainty for Buffer Sizing. *„International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences”*, Vol. 3, No. 3, s. 280-289.
- Goldratt E.M., 1977: Critical Chain. The North River Press, Great Barrington, MA.
- Kuchta D., 2011: Zagadnienie czasu i kosztów w zarządzaniu projektami. Wybrane metody planowania i kontroli. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Kulejewski J., Ibadov N., Zieliński B., 2011: Zastosowanie teorii zbiorów rozmytych w harmonogramowaniu robót budowlanych metodą łańcucha krytycznego. *„Budownictwo i Inżynieria Środowiska”*, 2, s. 331-338.
- Li K., Chen Y., 2007: Proceedings of the 2007 Applying Critical Chain in Project Scheduling and Estimating Buffer Size Based on Fuzzy Technique, *Proceedings of the 2007 IEEE Industrial Engineering and Engineering Management*, s. 1068-1072.
- Ma G.-F., Yiang Y.-B., 2012: Improved Fuzzy Critical Chain Buffer Method. *International Conference on Information Management, Innovation Management and Industrial Engineering*, s. 240-243.
- Millian Z., 2005: Notes of Time Buffers' Estimations in CCPM. *„Archives and Civil and Mechanical Engineering”*, Vol. V, No. 1, s. 19-38.
- Połośki M., Pruszyński K., 2008a: Lokalizacja buforów czasu w metodzie łańcucha krytycznego w harmonogramach robót budowlanych (cz. I) – podstawy teoretyczne. *„Przegląd Budowlany”*, 2, s. 45-49.
- Połośki M., Pruszyński K., 2008b: Lokalizacja buforów czasu w metodzie łańcucha krytycznego w harmonogramach robót budowlanych (cz. II) – praktyczne zastosowania. *„Przegląd Budowlany”* 3, s. 55-62.
- Zadeh L.A., Fuzzy Sets, 1965: *„Information and Control”*, Vol. 8, s. 338-353.
- Zadeh L.A., 1973: The Concept of Linguistic Variables and Its Application to Approximate Reasoning. *„Information Sciences”*, Vol. 8, s. 199-249.
- Zhao Z.-Y., You W.-Y., Lv Q.-L., 2008: Application of Fuzzy Critical Chain Method in Project Scheduling. *Proceedings of Forth International Conference on Natural Computation*, s. 473-477.

## **FUZZY INTERVAL NUMBERS IN CRITICAL CHAIN SCHEDULING**

### **Summary**

Probabilistic critical path method PERT assumes beta distribution as probability distribution of task duration. PERT assumes that experts estimate parameters of task duration (“most likely time”, “optimistic time”, and “pessimistic time” for each activity) according to beta distribution nature. It’s not always true. In the paper we assume that the durations of tasks are fuzzy sets. On the base of expert data we construct membership function of task duration. These fuzzy sets are used for project scheduling and for buffer size calculation. The illustrative example is presented.