

WITOLD ORZESZKO

NIELINIOWA IDENTYFIKACJA RZĘDU AUTOZALEŻNOŚCI W STOPACH ZMIAN INDEKSÓW GIEŁDOWYCH¹

1. WSTĘP

Współczynnik korelacji Pearsona jest najczęściej stosowaną miarą zależności w szeregach czasowych. Jednak nie jest on właściwym narzędziem pomiaru zależności o charakterze nieliniowym. W efekcie, do analizy zależności dowolnego typu należy zastosować inne miary, wśród których, jedną z najważniejszych jest miara informacji wzajemnej (ang. *Mutual Information* – MI). Można ją wykorzystać do pomiaru zależności pomiędzy dwoma szeregami czasowymi lub autozależności w pojedynczym szeregu. Przykładami zastosowania miary do analizy notowań indeksów giełdowych są badania przeprowadzone m.in. przez Dionisio i in. (2006), Orzeszko (2009), Hassani, Dionisio i in. (2010), Hassani, Soofi i in. (2010) oraz Fiszeder, Orzeszko (2012).

W niniejszym artykule analizie poddano notowania wybranych polskich i zagranicznych indeksów giełdowych. Celem badania jest detekcja nieliniowych autozależności w badanych szeregach i określenie rzędów zidentyfikowanych autozależności. Ponadto, ocenie poddana została przydatność modeli ARMA-GARCH do opisu dynamiki analizowanych szeregów.

W dalszej części praca skonstruowana jest następująco: w punkcie drugim scharakteryzowano miarę i współczynnik informacji wzajemnej, w punkcie trzecim przedstawiono wyniki zastosowania współczynnika do analizy wybranych indeksów giełdowych, a w punkcie czwartym podsumowano otrzymane rezultaty badań.

2. MIARA INFORMACJI WZAJEMNEJ

Miara informacji wzajemnej $I(X, Y)$ zmiennych losowych X i Y określona jest wzorem:

$$I(X, Y) = \iint p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p_1(x)p_2(y)} \right) dx dy, \quad (1)$$

gdzie $p(x, y)$ jest funkcją gęstości rozkładu łącznego, natomiast $p_1(x)$ oraz $p_2(y)$ są gęstościami brzegowymi zmiennych (por. np. Granger, Terasvirta, 1993; Granger, Lin,

¹ Badanie zostało sfinansowane przez Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu w ramach grantu WNEiZ nr 1191-E „Nieparametryczna analiza nieliniowości w procesach ekonomicznych”.

1994; Maasoumi, Racine, 2002; Bruzda, 2004). Miara ta wywodzi się z teorii informacji i powiązana jest z entropią Shannona formułą:

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (2)$$

gdzie H jest entropią Shannona zadaną wzorami:

$$H(X, Y) = - \int \log(p(x, y)) p(x, y) dx dy, \quad (3)$$

$$H(X) = - \int \log(p_1(x)) p_1(x) dx, \quad (4)$$

$$H(Y) = - \int \log(p_2(y)) p_2(y) dy. \quad (5)$$

Miara MI identyfikując zależności dowolnego typu (zarówno liniowe, jak i nieliniowe), informuje o możliwości wykorzystania zmiennej X do prognozowania Y . W efekcie miarę tę można wykorzystać do określenia opóźnień czasowych w modelach i metodach prognozowania procesów nieliniowych.

Można udowodnić, że $I(X, Y)$ przyjmuje zawsze wartości nieujemne oraz, że $I(X, Y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X i Y są niezależne (np. Granger, Lin, 1994). Miarę MI można unormować, przekształcając ją do współczynnika informacji wzajemnej $R(X, Y)$, według wzoru:

$$R(X, Y) = \sqrt{1 - e^{-2I(X, Y)}}. \quad (6)$$

Współczynnik informacji wzajemnej posiada następujące własności (por. Granger, Terasvirta, 1993; Granger, Lin, 1994):

1. $0 \leq R(X, Y) \leq 1$,
2. $R(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X$ i Y są niezależne,
3. $R(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y = f(X)$, gdzie f jest pewną odwracalną funkcją,
4. jest niezmienniczy względem transformacji zmiennych, tzn. $R(X, Y) = R(h_1(X), h_2(Y))$, gdzie h_1 oraz h_2 są dowolnymi funkcjami różnowartościowymi,
5. jeśli (X, Y) (lub $(h_1(X), h_2(Y))$), gdzie h_1 oraz h_2 są różnowartościowe) ma dwuwymiarowy rozkład normalny ze współczynnikiem korelacji $\rho(X, Y)$, to $R(X, Y) = |\rho(X, Y)|$.

W literaturze przedmiotu istnieją różne propozycje szacowania wartości $I(X, Y)$ w oparciu o szeregi czasowe (x_t) oraz (y_t) . Zasadniczo, sprowadzają się one do oszacowania funkcji gęstości $p(x, y)$, $p_1(x)$ oraz $p_2(y)$ (por. wzór 1). Istniejące metody estymacji można podzielić na trzy główne grupy (por. Dionisio i in., 2003):

- odwołujące się do histogramu,
- oparte na estymatorach jądrowych,
- metody parametryczne.

Miarę informacji wzajemnej można wykorzystać również do pomiaru autozależności w pojedynczym szeregu czasowym (x_t). W tym celu za (y_t) należy przyjąć szereg opóźnionych wartości (x_t). Formalnie oznacza to, że pojęcie miary MI uogólnia się do procesu stochastycznego (zob. Fonseca i in., 2008). Przy założeniu, że X_1, X_2, \dots, X_n jest stacjonarnym procesem dyskretnych zmiennych losowych, przez miarę MI rzędu lag rozumie się z definicji miarę MI zmiennych X_t oraz X_{t+lag} , tzn.:

$$I(lag) = I(X_t, X_{t+lag}) = \sum_{(x_t, x_{t+lag})} P(x_t, x_{t+lag}) \log \left(\frac{P(x_t, x_{t+lag})}{P(x_t)P(x_{t+lag})} \right). \quad (7)$$

Po unormowaniu miary $I(lag)$ otrzymuje się współczynnik informacji wzajemnej $R(lag)$, zadany wzorem:

$$R(lag) = \sqrt{1 - e^{-2I(lag)}}. \quad (8)$$

Współczynnik MI jest więc uogólnieniem współczynnika autokorelacji liniowej Pearsona i mierzy siłę występujących w szeregu autozależności (dowolnego typu). W konsekwencji, testowanie istotności współczynnika $R(lag)$ jest metodą identyfikacji autozależności rzędu lag i polega na weryfikacji hipotezy $H_0: R(lag) = 0$ przeciw $H_1: R(lag) > 0$. Wartość lag , dla której współczynnik MI jest istotny, wskazuje na rząd opóźnień, jaki powinien zostać uwzględniony w nieliniowym modelu analizowanych procesów (por. Granger, Lin, 1994).

3. ZASTOSOWANIE MIARY MI DO ANALIZY WYBRANYCH INDEKSÓW GIEŁDOWYCH

W niniejszej pracy badaniu poddano logarytmiczne dzienne stopy zmian indeksów BUX, CAC 40 (CAC)², DAX, DJIA, FTSE 100 (FTSE), Hang Seng (HS), NASDAQ (NSDQ), Nikkei (NKX), S&P 500 (SP), WIG20 (W20), MWIG40 (M40) oraz SWIG80 (S80) z okresu 2.01.2001-30.06.2011 r. (zob. tabela 1)³.

Tabela 1.

Analizowane szeregi indeksów giełdowych

Indeks	BUX	CAC	DAX	DJIA	FTSE	HS	NSDQ	NKX	SP	W20	M40	S80
Liczba obserwacji	2627	2683	2667	2643	2655	2592	2638	2575	2641	2635	2635	2635

Źródło: Opracowanie własne.

Na wstępie każdy z analizowanych szeregów przefiltrowano dopasowanym modelem ARMA-GARCH z warunkowym rozkładem t-studenta (zob. tabela 2). Przy wyborze rzędu opóźnień modelu kierowano się kryterium Schwarz, uwzględniając

² W nawiasach podano oznaczenia stosowane w dalszej części pracy.

³ Stopy zmian zostały wyznaczone na podstawie kursów zamknięcia.

istotność parametrów ($\alpha = 0,05$). W efekcie, dla każdego indeksu giełdowego dalszemu badaniu poddano dwa szeregi: logarytmicznych stóp zmian oraz standaryzowanych reszt z odpowiedniego modelu ARMA-GARCH.

Tabela 2.

Modele ARMA-GARCH dla analizowanych indeksów giełdowych

Indeks	BUX	CAC	DAX	DJIA	FTSE	HS
Model	AR(2)- GARCH(1,1)	ARMA(1,3)- GARCH(2,1)	ARMA(1,1)- GARCH(1,2)	AR(3)- GARCH(2,1)	ARMA(3,2)- GARCH(2,1)	GARCH(2,1)
Indeks	NSDQ	NKX	SP	W20	M40	S80
Model	AR(2)- GARCH(2,1)	ARMA(1,1)- GARCH(1,1)	AR(3)- GARCH(2,1)	ARMA(1,1)- GARCH(3,1)	ARMA(3,1)- GARCH(1,1)	ARMA(4,1)- GARCH(2,2)

Źródło: Obliczenia własne.

Dla każdego z analizowanych szeregów obliczono współczynniki informacji wzajemnej $R(lag)$, gdzie $lag = 1, 2, \dots, 10$. Do oszacowania miary informacji wzajemnej wykorzystano metodę polegającą na analizie dwuwymiarowego histogramu.⁴ W tym celu, w pierwszej kolejności dokonano unitaryzacji analizowanych szeregów, według wzoru:

$$x'_t = \frac{x_t - \min_t(x_t)}{\max_t(x_t) - \min_t(x_t)}.$$

Następnie przestrzeń $[0, 1] \times [0, 1]$ podzielono na rozłączne kwadratowe komórki o tych samych rozmiarach (por. Fraser, Swinney (1986)) i umieszczono w niej punkty (x'_t, x'_{t+lag}) . Dla każdej z otrzymanych komórek obliczono odsetek znajdujących się w niej punktów. Oszacowaniem miary informacji wzajemnej jest suma po wszystkich komórkach $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ składników postaci: $P_{ij} \log\left(\frac{P_{ij}}{P_i P_j}\right)$, gdzie P_{ij} jest odsetkiem punktów w komórce $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$, P_i – odsetkiem punktów, których pierwsza współrzędna należy do odcinka $[a_i, a_{i+1}]$, natomiast P_j – odsetkiem punktów, których druga współrzędna należy do odcinka $[b_j, b_{j+1}]$.

W celu weryfikacji istotności otrzymanych współczynników, obliczono empiryczne poziomy istotności (ang. p -value) oraz wartości krytyczne R^* spełniające zależność $P(R(lag) \geq R^*) = 0,05$. Wielkości te zostały wyznaczone przy zastosowaniu procedury bootstrap. W tym celu, osobno dla każdego z analizowanych szeregów utworzono 10 000 prób bootstrapowych (o tej samej długości, co badany szereg) a następnie dla każdej próby obliczono wartość $R(1)$. Dla każdego opóźnienia czasowego $lag = 1, 2, \dots, 10$, na podstawie otrzymanego rozkładu bootstrapowego współczynnika $R(1)$, wyznaczono empiryczny poziom istotności (będący grubością prawego ogona tego rozkładu) oraz wartość krytyczną R^* (będącą kwantylem rozkładu). Wyznacze-

⁴ Obliczenia wykonano w programie Matlab 6.5 w oparciu o procedurę napisaną przez A. Leontitsisa.

nie empirycznych poziomów istotności oraz porównanie obliczonych współczynników $R(lag)$ z wartościami krytycznymi posłużyło do weryfikacji hipotezy o obecności w szeregach zależności rzędu lag .

Dodatkowo, w celu ustalenia charakteru tych zależności dla każdego z analizowanych szeregów obliczono współczynniki autokorelacji liniowej Pearsona $AC(lag)$, dla $lag = 1, 2, \dots, 10$.⁵ Podobnie jak w przypadku współczynników informacji wzajemnej, wyznaczono empiryczne poziomy istotności oraz wartości krytyczne $|AC|^*$. Wartości te zostały obliczone w oparciu o rozkład bootstrapowy modułów współczynnika $AC(1)$, dla 10 000 replikacji.⁶ W analogiczny sposób wyznaczono również empiryczne poziomy istotności oraz wartości krytyczne modułów współczynników autokorelacji dla szeregów kwadratów obserwacji (ozn $|AC_{kw}|^*$). Analiza autokorelacji szeregów złożonych z kwadratów obserwacji umożliwia weryfikację, czy w pierwotnym szeregu obecny jest efekt ARCH.

Otrzymane wyniki przedstawiono w tabelach 3-16 oraz zilustrowano na rysunkach 1-12. W tabelach pogrubioną czcionką wyróżniono sytuacje, kiedy empiryczny poziom istotności nie przekracza 5%.

Tabela 3.

Wartości krytyczne dla współczynników informacji wzajemnej oraz modułów współczynników autokorelacji liniowej. Logarytmiczne stopy zmian

	BUX	CAC	DAX	DJIA	FTSE	HS	NSDQ	NKX	SP	W20	M40	S80
R^*	0,2107	0,2289	0,2313	0,2165	0,2187	0,2079	0,2243	0,2134	0,2125	0,2456	0,2293	0,2301
$ AC ^*$	0,0381	0,0376	0,0379	0,0380	0,0383	0,0383	0,0380	0,0385	0,0385	0,0384	0,0382	0,0378
$ AC_{kw} ^*$	0,0327	0,0355	0,0366	0,0347	0,0347	0,0353	0,0347	0,0354	0,0362	0,0347	0,0343	0,0347

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 4.

Wartości krytyczne dla współczynników informacji wzajemnej oraz modułów współczynników autokorelacji liniowej. Standaryzowane reszty z modeli ARMA-GARCH

	BUX	CAC	DAX	DJIA	FTSE	HS	NSDQ	NKX	SP	W20	M40	S80
R^*	0,2549	0,2366	0,2460	0,2471	0,2632	0,2546	0,2512	0,2494	0,2557	0,2657	0,2486	0,2421
$ AC ^*$	0,0387	0,0375	0,0375	0,0387	0,0386	0,0378	0,0384	0,0383	0,0379	0,0379	0,0380	0,0380
$ AC_{kw} ^*$	0,0374	0,0365	0,0369	0,0365	0,0373	0,0381	0,0373	0,0375	0,0369	0,0374	0,0365	0,0354

Źródło: Obliczenia własne.

⁵ Do tego celu wykorzystano funkcję `corrcoef` w programie Matlab 6.5.

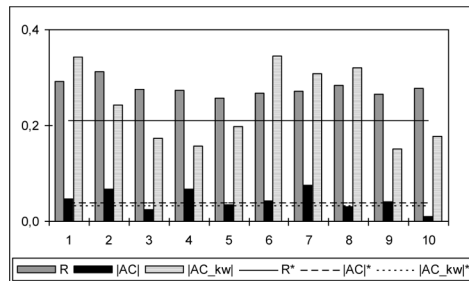
⁶ Analiza modułów współczynników autokorelacji a nie ich poziomów wynika z opisanej własnością 5 relacji pomiędzy współczynnikiem informacji wzajemnej a współczynnikiem autokorelacji (por. punkt 2 niniejszego artykułu).

Tabela 5.

Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu BUX

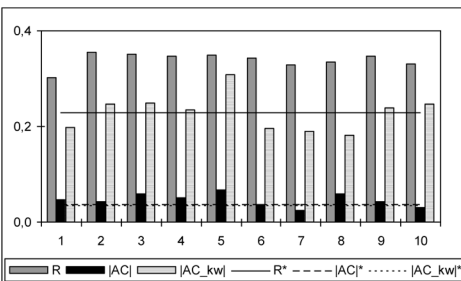
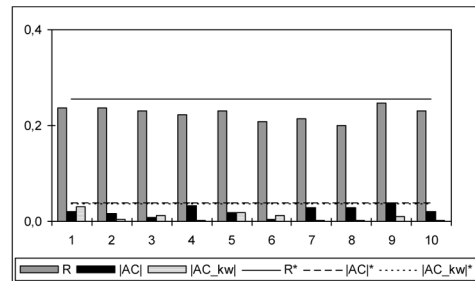
	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,2911 (0,0000)	0,3113 (0,0000)	0,2759 (0,0000)	0,2736 (0,0000)	0,2574 (0,0000)	0,2674 (0,0000)	0,2714 (0,0000)	0,2839 (0,0000)	0,2653 (0,0000)	0,2766 (0,0000)
$AC(lag)$	0,0463 (0,0181)	-0,0669 (0,0009)	-0,0243 (0,2180)	0,0676 (0,0008)	0,0354 (0,0689)	-0,0422 (0,0312)	-0,0756 (0,0001)	0,0302 (0,1194)	0,0413 (0,0341)	0,0096 (0,6281)
$AC_{kw}(lag)$	0,3425 (0,0000)	0,2437 (0,0000)	0,1736 (0,0000)	0,1565 (0,0001)	0,1970 (0,0000)	0,3448 (0,0000)	0,3075 (0,0000)	0,3203 (0,0000)	0,1517 (0,0002)	0,1766 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,2362 (0,2354)	0,2366 (0,2289)	0,2316 (0,3080)	0,2219 (0,4907)	0,2313 (0,3122)	0,2077 (0,7624)	0,2146 (0,6363)	0,2004 (0,8735)	0,2470 (0,1056)	0,2298 (0,3391)
$AC(lag)$	0,0202 (0,3043)	0,0170 (0,3897)	-0,0072 (0,7237)	0,0336 (0,0867)	0,0185 (0,3468)	0,0032 (0,8699)	-0,0294 (0,1301)	0,0285 (0,1415)	0,0385 (0,0513)	0,0196 (0,3183)
$AC_{kw}(lag)$	0,0311 (0,0999)	0,0039 (0,8376)	0,0118 (0,5310)	0,0021 (0,9139)	-0,0183 (0,3289)	-0,0127 (0,5004)	0,0020 (0,9181)	0,0022 (0,9052)	-0,0100 (0,5988)	-0,0023 (0,9023)

Źródło: Obliczenia własne.



Rysunek 1. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu BUX

Źródło: Obliczenia własne.



Rysunek 2. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu CAC 40

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 6.

Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu CAC 40

	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,3024 (0,0000)	0,3548 (0,0000)	0,3500 (0,0000)	0,3478 (0,0000)	0,3490 (0,0000)	0,3431 (0,0000)	0,3279 (0,0000)	0,3356 (0,0000)	0,3475 (0,0000)	0,3300 (0,0000)
$AC(lag)$	-0,0466 (0,0165)	-0,0426 (0,0291)	-0,0584 (0,0034)	0,0513 (0,0092)	-0,0682 (0,0009)	-0,0375 (0,0508)	0,0244 (0,2095)	0,0599 (0,0026)	-0,0433 (0,0257)	-0,0310 (0,1068)
$AC_{kw}(lag)$	0,1986 (0,0000)	0,2466 (0,0000)	0,2483 (0,0000)	0,2348 (0,0000)	0,3085 (0,0000)	0,1955 (0,0000)	0,1901 (0,0000)	0,1808 (0,0000)	0,2390 (0,0000)	0,2464 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,3037 (0,0000)	0,2216 (0,2311)	0,2102 (0,4768)	0,2181 (0,2969)	0,1960 (0,7809)	0,2149 (0,3643)	0,2297 (0,1105)	0,1901 (0,8764)	0,2130 (0,4088)	0,2145 (0,3751)
$AC(lag)$	0,0106 (0,5824)	0,0196 (0,3056)	0,0020 (0,9184)	-0,0084 (0,6647)	-0,0222 (0,2445)	-0,0136 (0,4776)	0,0024 (0,9023)	0,0281 (0,1396)	-0,0294 (0,1227)	-0,0038 (0,8411)
$AC_{kw}(lag)$	0,0275 (0,1334)	-0,0107 (0,5624)	0,0138 (0,4500)	0,0228 (0,2096)	-0,0198 (0,2771)	0,0034 (0,8576)	-0,0160 (0,3781)	0,0140 (0,4453)	0,0249 (0,1727)	0,0015 (0,9357)

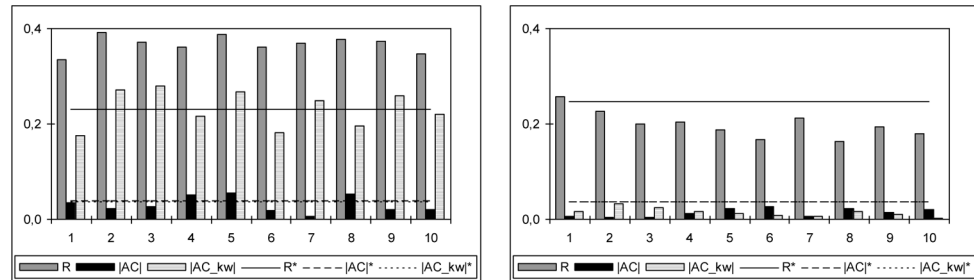
Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 7.

Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu DAX

	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,3340 (0,0000)	0,3926 (0,0000)	0,3707 (0,0000)	0,3606 (0,0000)	0,3886 (0,0000)	0,3616 (0,0000)	0,3704 (0,0000)	0,3777 (0,0000)	0,3733 (0,0000)	0,3472 (0,0000)
$AC(lag)$	-0,0340 (0,0826)	-0,0222 (0,2535)	-0,0257 (0,1824)	0,0506 (0,0095)	-0,0560 (0,0041)	-0,0184 (0,3436)	0,0064 (0,7408)	0,0525 (0,0070)	-0,0207 (0,2845)	-0,0207 (0,2860)
$AC_{kw}(lag)$	0,1751 (0,0000)	0,2706 (0,0000)	0,2804 (0,0000)	0,2164 (0,0000)	0,2677 (0,0000)	0,1817 (0,0000)	0,2493 (0,0000)	0,1963 (0,0000)	0,2594 (0,0000)	0,2200 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,2579 (0,0177)	0,2275 (0,1714)	0,2006 (0,4072)	0,2031 (0,3827)	0,1882 (0,5578)	0,1666 (0,8659)	0,2120 (0,3077)	0,1629 (0,9031)	0,1936 (0,4801)	0,1788 (0,6983)
$AC(lag)$	-0,0054 (0,7788)	-0,0048 (0,8024)	-0,0040 (0,8339)	0,0132 (0,4970)	-0,0218 (0,2583)	-0,0275 (0,1580)	0,0069 (0,7277)	0,0218 (0,2587)	-0,0144 (0,4556)	-0,0198 (0,3013)
$AC_{kw}(lag)$	-0,0167 (0,3665)	0,0325 (0,0790)	0,0253 (0,1635)	0,0158 (0,3921)	-0,0124 (0,5032)	-0,0086 (0,6453)	-0,0071 (0,7061)	-0,0172 (0,3511)	-0,0096 (0,6027)	-0,0020 (0,9081)

Źródło: Obliczenia własne.

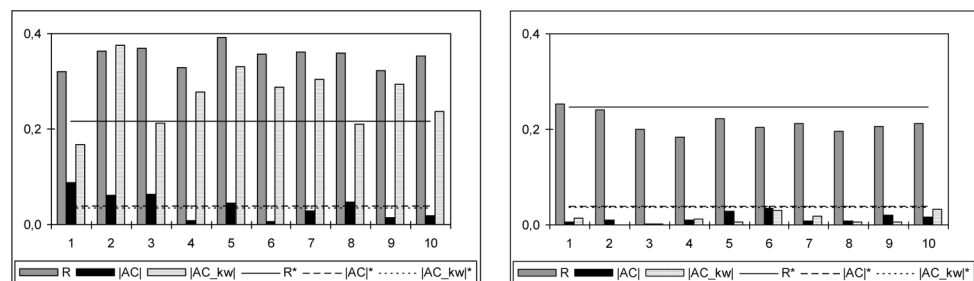


Rysunek 3. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu DAX
Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 8.
Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu DJIA

	<i>lag</i> =1	<i>lag</i> =2	<i>lag</i> =3	<i>lag</i> =4	<i>lag</i> =5	<i>lag</i> =6	<i>lag</i> =7	<i>lag</i> =8	<i>lag</i> =9	<i>lag</i> =10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,3209 (0,0000)	0,3628 (0,0000)	0,3685 (0,0000)	0,3288 (0,0000)	0,3927 (0,0000)	0,3576 (0,0000)	0,3619 (0,0000)	0,3594 (0,0000)	0,3224 (0,0000)	0,3539 (0,0000)
$AC(lag)$	-0,0872 (0,0000)	-0,0612 (0,0019)	0,0634 (0,0013)	-0,0083 (0,6747)	-0,0449 (0,0199)	0,0059 (0,7643)	-0,0280 (0,1513)	0,0465 (0,0158)	-0,0150 (0,4418)	0,0175 (0,3703)
$AC_{kw}(lag)$	0,1672 (0,0003)	0,3749 (0,0000)	0,2124 (0,0002)	0,2782 (0,0000)	0,3299 (0,0000)	0,2877 (0,0000)	0,3050 (0,0000)	0,2112 (0,0002)	0,2945 (0,0000)	0,2363 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,2541 (0,0254)	0,2399 (0,0861)	0,1998 (0,5842)	0,1840 (0,8342)	0,2216 (0,2413)	0,2047 (0,4971)	0,2114 (0,3816)	0,1951 (0,6641)	0,2067 (0,4610)	0,2117 (0,3767)
$AC(lag)$	0,0058 (0,7587)	0,0095 (0,6199)	0,0027 (0,8885)	0,0101 (0,5996)	-0,0280 (0,1545)	-0,0341 (0,0831)	0,0090 (0,6383)	0,0085 (0,6578)	-0,0209 (0,2868)	0,0162 (0,4075)
$AC_{kw}(lag)$	0,0136 (0,4685)	0,0009 (0,9600)	-0,0023 (0,9004)	-0,0121 (0,5178)	-0,0057 (0,7593)	-0,0301 (0,1034)	0,0176 (0,3402)	0,0056 (0,7626)	0,0066 (0,7240)	0,0316 (0,0871)

Źródło: Obliczenia własne.



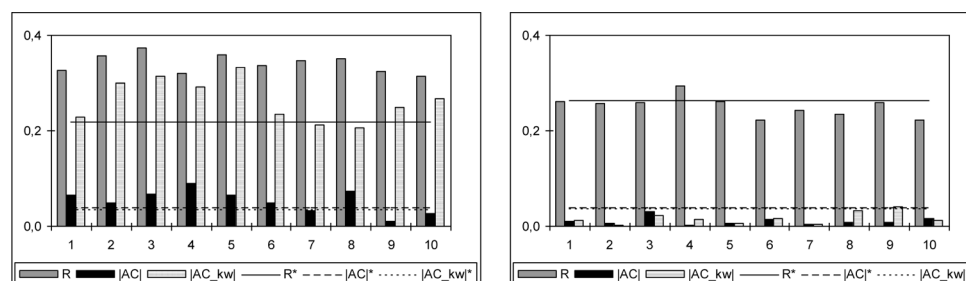
Rysunek 4. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu DJIA
Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 9.

Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu FTSE 100

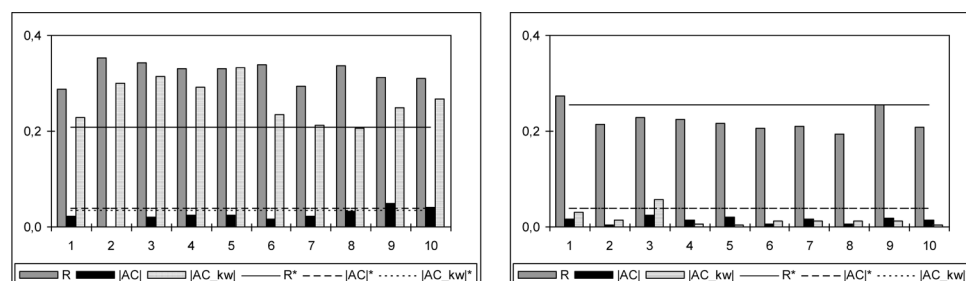
	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,3257 (0,0000)	0,3563 (0,0000)	0,3743 (0,0000)	0,3195 (0,0000)	0,3591 (0,0000)	0,3365 (0,0000)	0,3466 (0,0000)	0,3511 (0,0000)	0,3245 (0,0000)	0,3152 (0,0000)
$AC(lag)$	-0,0660 (0,0009)	-0,0489 (0,0115)	-0,0683 (0,0002)	0,0902 (0,0000)	-0,0648 (0,0011)	-0,0490 (0,0111)	0,0326 (0,0977)	0,0727 (0,0001)	-0,0110 (0,5757)	-0,0262 (0,1783)
$AC_{kw}(lag)$	0,2282 (0,0000)	0,3005 (0,0000)	0,3149 (0,0000)	0,2919 (0,0000)	0,3329 (0,0000)	0,2350 (0,0000)	0,2128 (0,0000)	0,2055 (0,0000)	0,2481 (0,0000)	0,2683 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,2619 (0,0589)	0,2569 (0,1084)	0,2582 (0,0929)	0,2936 (0,0002)	0,2615 (0,0625)	0,2216 (0,8487)	0,2437 (0,3409)	0,2351 (0,5606)	0,2596 (0,0786)	0,2224 (0,8345)
$AC(lag)$	0,0100 (0,6129)	-0,0063 (0,7494)	-0,0297 (0,1311)	0,0017 (0,9280)	-0,0064 (0,7437)	0,0152 (0,4366)	-0,0048 (0,8024)	0,0086 (0,6634)	-0,0071 (0,7156)	0,0168 (0,3908)
$AC_{kw}(lag)$	0,0132 (0,5022)	-0,0024 (0,9020)	0,0224 (0,2451)	0,0143 (0,4665)	0,0065 (0,7427)	0,0161 (0,4088)	-0,0033 (0,8680)	0,0336 (0,0750)	-0,0405 (0,0335)	-0,0129 (0,5107)

Źródło: Obliczenia własne.



Rysunek 5. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu FTSE 100

Źródło: Obliczenia własne.



Rysunek 6. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu Hang Seng

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 10.

Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu Hang Seng

	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,2874 (0,0000)	0,3525 (0,0000)	0,3421 (0,0000)	0,3300 (0,0000)	0,3301 (0,0000)	0,3382 (0,0000)	0,2944 (0,0000)	0,3365 (0,0000)	0,3116 (0,0000)	0,3094 (0,0000)
$AC(lag)$	-0,0227 (0,2491)	-0,0008 (0,9712)	-0,0204 (0,3014)	-0,0236 (0,2310)	-0,0244 (0,2137)	0,0169 (0,3918)	0,0219 (0,2654)	0,0318 (0,1048)	-0,0485 (0,0134)	-0,0409 (0,0349)
$AC_{kw}(lag)$	0,2282 (0,0000)	0,3005 (0,0000)	0,3149 (0,0000)	0,2919 (0,0000)	0,3329 (0,0000)	0,2350 (0,0000)	0,2128 (0,0000)	0,2055 (0,0000)	0,2481 (0,0000)	0,2683 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,2727 (0,0051)	0,2152 (0,5721)	0,2292 (0,3209)	0,2255 (0,3849)	0,2164 (0,5507)	0,2068 (0,7279)	0,2103 (0,6616)	0,1931 (0,9146)	0,2544 (0,0499)	0,2082 (0,7038)
$AC(lag)$	0,0170 (0,3841)	-0,0049 (0,8055)	0,0243 (0,2177)	-0,0135 (0,4903)	-0,0197 (0,3116)	0,0053 (0,7879)	0,0172 (0,3781)	-0,0061 (0,7569)	-0,0180 (0,3584)	0,0146 (0,4567)
$AC_{kw}(lag)$	0,0304 (0,1134)	-0,0143 (0,4588)	0,0573 (0,0056)	-0,0063 (0,7535)	0,0034 (0,8596)	0,0121 (0,5359)	-0,0113 (0,5617)	-0,0117 (0,5479)	0,0122 (0,5303)	-0,0033 (0,8665)

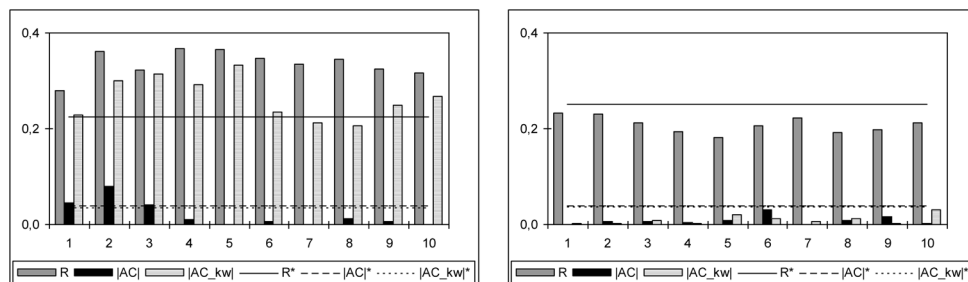
Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 11.

Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu NASDAQ

	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,2794 (0,0000)	0,3604 (0,0000)	0,3232 (0,0000)	0,3679 (0,0000)	0,3658 (0,0000)	0,3475 (0,0000)	0,3348 (0,0000)	0,3458 (0,0000)	0,3251 (0,0000)	0,3160 (0,0000)
$AC(lag)$	-0,0450 (0,0211)	-0,0788 (0,0001)	0,0413 (0,0326)	-0,0107 (0,5835)	-0,0008 (0,9685)	0,0065 (0,7381)	0,0004 (0,9828)	0,0119 (0,5396)	0,0053 (0,7863)	0,0002 (0,9909)
$AC_{kw}(lag)$	0,2282 (0,0000)	0,3005 (0,0000)	0,3149 (0,0000)	0,2919 (0,0000)	0,3329 (0,0000)	0,2350 (0,0000)	0,2128 (0,0000)	0,2055 (0,0000)	0,2481 (0,0000)	0,2683 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,2334 (0,1811)	0,2309 (0,2061)	0,2127 (0,3813)	0,1934 (0,6370)	0,1824 (0,8105)	0,2052 (0,4634)	0,2228 (0,2834)	0,1914 (0,6709)	0,1973 (0,5762)	0,2118 (0,3907)
$AC(lag)$	-0,0003 (0,9866)	0,0068 (0,7261)	0,0056 (0,7698)	-0,0051 (0,7899)	0,0085 (0,6612)	-0,0303 (0,1220)	0,0009 (0,9612)	-0,0085 (0,6603)	-0,0173 (0,3695)	0,0025 (0,8927)
$AC_{kw}(lag)$	0,0011 (0,9551)	0,0030 (0,8703)	-0,0084 (0,6553)	0,0026 (0,8879)	0,0204 (0,2732)	-0,0132 (0,4816)	0,0056 (0,7664)	0,0115 (0,5451)	-0,0024 (0,8925)	0,0312 (0,0977)

Źródło: Obliczenia własne.

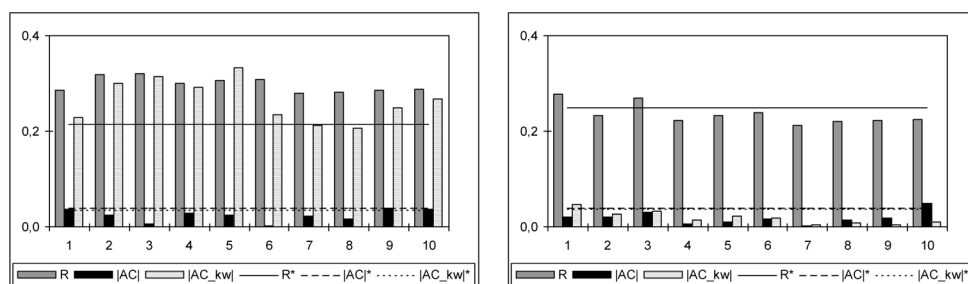


Rysunek 7. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu NASDAQ
Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 12.
Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu Nikkei

	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,2851 (0,0000)	0,3189 (0,0000)	0,3199 (0,0000)	0,2999 (0,0000)	0,3066 (0,0000)	0,3081 (0,0000)	0,2803 (0,0000)	0,2823 (0,0000)	0,2852 (0,0000)	0,2876 (0,0000)
$AC(lag)$	-0,0363 (0,0667)	-0,0251 (0,2053)	-0,0061 (0,7558)	-0,0292 (0,1396)	-0,0248 (0,2119)	0,0017 (0,9260)	0,0217 (0,2744)	-0,0173 (0,3862)	-0,0385 (0,0505)	0,0367 (0,0639)
$AC_{kw}(lag)$	0,2282 (0,0000)	0,3005 (0,0000)	0,3149 (0,0000)	0,2919 (0,0000)	0,3329 (0,0000)	0,2350 (0,0000)	0,2128 (0,0000)	0,2055 (0,0000)	0,2481 (0,0000)	0,2683 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,2781 (0,0003)	0,2320 (0,2619)	0,2690 (0,0024)	0,2230 (0,4639)	0,2329 (0,2435)	0,2392 (0,1465)	0,2116 (0,7160)	0,2212 (0,5039)	0,2223 (0,4764)	0,2249 (0,4156)
$AC(lag)$	0,0211 (0,2906)	0,0210 (0,2930)	0,0299 (0,1332)	-0,0060 (0,7604)	-0,0111 (0,5737)	0,0156 (0,4312)	0,0018 (0,9300)	-0,0140 (0,4797)	-0,0181 (0,3636)	0,0486 (0,0130)
$AC_{kw}(lag)$	0,0465 (0,0219)	0,0267 (0,1521)	0,0335 (0,0779)	-0,0144 (0,4500)	0,0218 (0,2418)	0,0174 (0,3521)	0,0036 (0,8533)	-0,0078 (0,6871)	0,0032 (0,8693)	0,0103 (0,5957)

Źródło: Obliczenia własne.



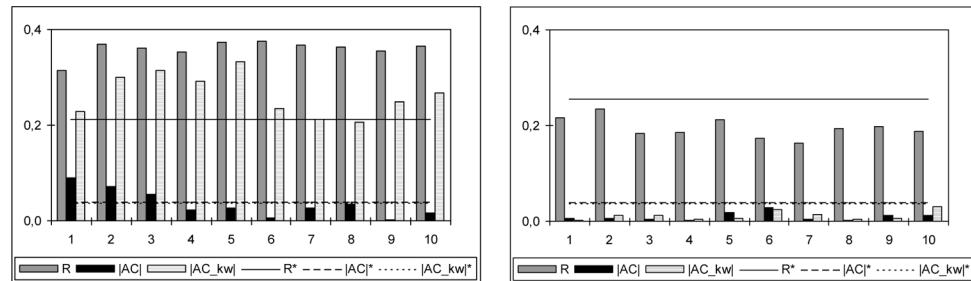
Rysunek 8. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu Nikkei
Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 13.

Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu S&P 500

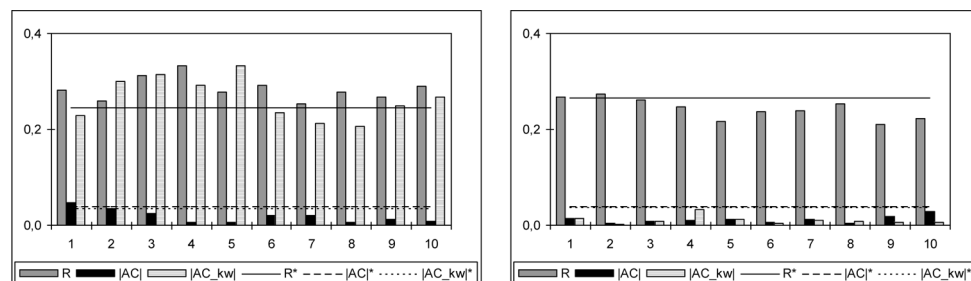
	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,3136 (0,0000)	0,3697 (0,0000)	0,3605 (0,0000)	0,3530 (0,0000)	0,3727 (0,0000)	0,3752 (0,0000)	0,3665 (0,0000)	0,3625 (0,0000)	0,3551 (0,0000)	0,3644 (0,0000)
$AC(lag)$	-0,0900 (0,0000)	-0,0717 (0,0002)	0,0557 (0,0055)	-0,0218 (0,2638)	-0,0268 (0,1676)	0,0066 (0,7370)	-0,0270 (0,1650)	0,0357 (0,0693)	0,0016 (0,9329)	0,0162 (0,4086)
$AC_{kw}(lag)$	0,2282 (0,0000)	0,3005 (0,0000)	0,3149 (0,0000)	0,2919 (0,0000)	0,3329 (0,0000)	0,2350 (0,0000)	0,2128 (0,0000)	0,2055 (0,0000)	0,2481 (0,0000)	0,2683 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,2157 (0,3039)	0,2346 (0,1571)	0,1828 (0,7055)	0,1862 (0,6528)	0,2127 (0,3260)	0,1728 (0,8449)	0,1637 (0,9339)	0,1930 (0,5488)	0,1989 (0,4704)	0,1871 (0,6373)
$AC(lag)$	0,0059 (0,7637)	0,0066 (0,7414)	0,0050 (0,8000)	-0,0018 (0,9289)	-0,0181 (0,3521)	-0,0287 (0,1374)	0,0044 (0,8222)	0,0018 (0,9272)	-0,0118 (0,5441)	0,0123 (0,5244)
$AC_{kw}(lag)$	0,0017 (0,9236)	-0,0122 (0,4946)	-0,0129 (0,4736)	-0,0040 (0,8224)	-0,0063 (0,7273)	-0,0254 (0,1584)	0,0140 (0,4360)	0,0041 (0,8195)	0,0052 (0,7723)	0,0313 (0,0843)

Źródło: Obliczenia własne.



Rysunek 9. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu S&P 500

Źródło: Obliczenia własne.



Rysunek 10. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu WIG20

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 14.

Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu WIG20

	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,2821 (0,0000)	0,2589 (0,0067)	0,3123 (0,0000)	0,3320 (0,0000)	0,2765 (0,0000)	0,2923 (0,0000)	0,2530 (0,0180)	0,2770 (0,0000)	0,2672 (0,0015)	0,2892 (0,0000)
$AC(lag)$	0,0467 (0,0161)	-0,0338 (0,0844)	0,0248 (0,2079)	0,0061 (0,7602)	0,0066 (0,7382)	-0,0201 (0,3038)	-0,0210 (0,2845)	-0,0056 (0,7759)	0,0118 (0,5461)	0,0081 (0,6846)
$AC_{kw}(lag)$	0,2282 (0,0000)	0,3005 (0,0000)	0,3149 (0,0000)	0,2919 (0,0000)	0,3329 (0,0000)	0,2350 (0,0000)	0,2128 (0,0000)	0,2055 (0,0000)	0,2481 (0,0000)	0,2683 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,2677 (0,0413)	0,2742 (0,0172)	0,2610 (0,0885)	0,2468 (0,3140)	0,2154 (0,9359)	0,2374 (0,5443)	0,2389 (0,5105)	0,2523 (0,2029)	0,2112 (0,9627)	0,2233 (0,8470)
$AC(lag)$	0,0153 (0,4257)	0,0043 (0,8217)	0,0077 (0,6848)	0,0107 (0,5746)	0,0127 (0,5052)	-0,0058 (0,7562)	-0,0131 (0,4921)	0,0041 (0,8289)	0,0182 (0,3424)	0,0281 (0,1459)
$AC_{kw}(lag)$	0,0134 (0,4846)	0,0013 (0,9424)	0,0086 (0,6546)	0,0323 (0,0885)	0,0121 (0,5268)	-0,0038 (0,8412)	-0,0107 (0,5774)	-0,0088 (0,6465)	0,0065 (0,7366)	0,0064 (0,7411)

Źródło: Obliczenia własne.

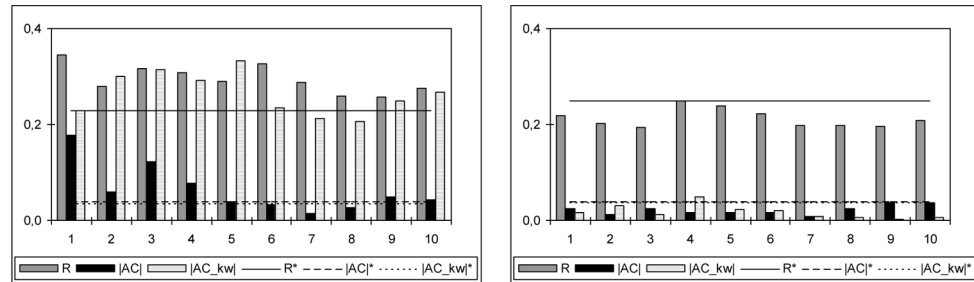
Tabela 15.

Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu MWIG40

	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,3448 (0,0000)	0,2797 (0,0000)	0,3167 (0,0000)	0,3090 (0,0000)	0,2892 (0,0000)	0,3262 (0,0000)	0,2888 (0,0000)	0,2595 (0,0010)	0,2571 (0,0016)	0,2756 (0,0000)
$AC(lag)$	0,1778 (0,0000)	0,0598 (0,0022)	0,1232 (0,0000)	0,0766 (0,0000)	0,0386 (0,0474)	0,0326 (0,0947)	0,0133 (0,4966)	0,0269 (0,1660)	0,0494 (0,0121)	0,0437 (0,0263)
$AC_{kw}(lag)$	0,2282 (0,0000)	0,3005 (0,0000)	0,3149 (0,0000)	0,2919 (0,0000)	0,3329 (0,0000)	0,2350 (0,0000)	0,2128 (0,0000)	0,2055 (0,0000)	0,2481 (0,0000)	0,2683 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,2180 (0,4104)	0,2012 (0,7094)	0,1935 (0,8242)	0,2489 (0,0493)	0,2390 (0,1237)	0,2234 (0,3233)	0,1975 (0,7681)	0,1977 (0,7646)	0,1965 (0,7814)	0,2080 (0,5817)
$AC(lag)$	0,0244 (0,2056)	0,0123 (0,5189)	0,0243 (0,2069)	0,0173 (0,3670)	0,0166 (0,3871)	0,0167 (0,3845)	-0,0086 (0,6533)	0,0248 (0,1998)	0,0367 (0,0596)	0,0374 (0,0539)
$AC_{kw}(lag)$	-0,0156 (0,3991)	-0,0298 (0,1034)	0,0116 (0,5276)	0,0491 (0,0149)	0,0232 (0,2048)	0,0202 (0,2749)	-0,0088 (0,6326)	-0,0060 (0,7432)	-0,0013 (0,9430)	0,0066 (0,7205)

Źródło: Obliczenia własne.

Przeprowadzone badanie uzupełniono o dodatkową weryfikację jakości dopasowania oszacowanych modeli przy wykorzystaniu testu Ljung-Boxa. Test ten zastosowano



Rysunek 11. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu MWIG40

Źródło: Obliczenia własne.

Tabela 16.

Współczynniki informacji wzajemnej, współczynniki autokorelacji liniowej oraz empiryczne poziomy istotności (w nawiasach) dla indeksu SWIG80

	lag=1	lag=2	lag=3	lag=4	lag=5	lag=6	lag=7	lag=8	lag=9	lag=10
Logarytmiczne stopy zmian										
$R(lag)$	0,3894 (0,0000)	0,3068 (0,0000)	0,3369 (0,0000)	0,3197 (0,0000)	0,3101 (0,0000)	0,2980 (0,0000)	0,3018 (0,0000)	0,2791 (0,0000)	0,2715 (0,0000)	0,2791 (0,0000)
$AC(lag)$	0,2245 (0,0000)	0,0841 (0,0000)	0,1464 (0,0000)	0,0797 (0,0002)	0,0523 (0,0060)	0,0652 (0,0009)	0,0248 (0,2044)	0,0532 (0,0055)	0,0639 (0,0011)	0,0599 (0,0018)
$AC_{kw}(lag)$	0,2282 (0,0000)	0,3005 (0,0000)	0,3149 (0,0000)	0,2919 (0,0000)	0,3329 (0,0000)	0,2350 (0,0000)	0,2128 (0,0000)	0,2055 (0,0000)	0,2481 (0,0000)	0,2683 (0,0000)
Standaryzowane reszty z modelu ARMA-GARCH										
$R(lag)$	0,1938 (0,7024)	0,1922 (0,7285)	0,1859 (0,8231)	0,2044 (0,5117)	0,1810 (0,8842)	0,2261 (0,1811)	0,1762 (0,9299)	0,1994 (0,6017)	0,2177 (0,2914)	0,1788 (0,9058)
$AC(lag)$	0,0217 (0,2645)	0,0041 (0,8308)	0,0280 (0,1468)	0,0161 (0,4039)	0,0187 (0,3345)	0,0288 (0,1351)	-0,0184 (0,3417)	0,0105 (0,5961)	0,0183 (0,3448)	0,0349 (0,0713)
$AC_{kw}(lag)$	-0,0112 (0,5296)	-0,0235 (0,1814)	0,0023 (0,8957)	0,0195 (0,2672)	-0,0177 (0,3128)	0,0088 (0,6251)	-0,0201 (0,2509)	-0,0114 (0,5223)	-0,0152 (0,3858)	0,0050 (0,7836)

Źródło: Obliczenia własne.

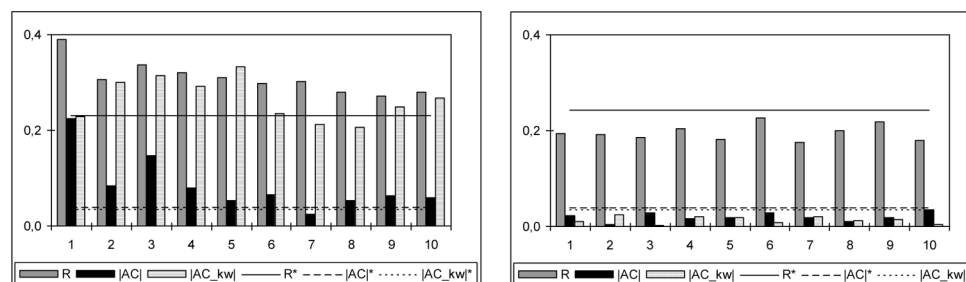
do szeregów reszt a także kwadratów reszt, przyjmując opóźnienie czasowe $lag = 10$. Otrzymane empiryczne poziomy istotności zaprezentowano w tabeli 17.

Tabela 17.

Empiryczne poziomy istotności w teście Ljunga-Boxa dla szeregów standaryzowanych reszt oraz ich kwadratów

	BUX	CAC	DAX	DJIA	FTSE	HS	NSDQ	NKX	SP	W20	M40	S80
Reszty	0,056	0,253	0,546	0,335	0,471	0,802	0,868	0,111	0,765	0,750	0,022	0,030
Kwadraty reszt	0,804	0,224	0,460	0,424	0,052	0,220	0,778	0,101	0,548	0,802	0,051	0,319

Źródło: Obliczenia własne.



Rysunek 12. Współczynniki informacji wzajemnej oraz autokorelacji liniowej dla indeksu SWIG80

Źródło: Obliczenia własne.

Jak widać, jedynie w przypadku indeksów MWIG40 oraz SWIG80 test Ljung-Boxa odrzucił (na poziomie istotności 0,05) hipotezę o braku autokorelacji w resztach. Mimo, że test nie odrzucił hipotezy zerowej dla żadnego z szeregów kwadratów reszt, to jednak warto zwrócić uwagę na stosunkowo niskie wartości empirycznego poziomu istotności w przypadku indeksów FTSE oraz MWIG40. W obu przypadkach wartości te tylko nieznacznie przekraczają wartość progową 0,05, co jednak każe z pewną ostrożnością podejść do stwierdzenia, że zastosowane modele dobrze opisały występujący w tych szeregach efekt ARCH.

Otrzymane wyniki badań jednoznacznie wskazują na występowanie zależności w szeregach stóp zmian analizowanych indeksów giełdowych. Dla każdego opóźnienia czasowego, oszacowane współczynniki informacji wzajemnej zdecydowanie przewyższają wartość krytyczną R^* a obliczone empiryczne poziomy istotności są bliskie zero. Analiza wyznaczonych współczynników autokorelacji (dla stóp zmian oraz ich kwadratów) wskazuje, że powodem tej sytuacji może być obecny w szeregach stóp zmian silny efekt ARCH oraz w wielu wypadkach autokorelacja.

Przefiltrowanie szeregów modelami typu ARMA-GARCH w zasadniczy sposób zmniejszyło wartości współczynników MI. Należy jednak podkreślić, że w wielu wypadkach zastosowane modele nie były w stanie całkowicie opisać istniejących w szeregach zależności. Sytuacja taka miała miejsce w przypadku indeksów: CAC 40 (istotność $R(1)$), DAX (istotność $R(1)$), DJIA (istotność $R(1)$), FTSE 100 (istotność $R(4)$), Hang Seng (istotność $R(1)$ i $R(9)$), Nikkei (istotność $R(1)$ i $R(3)$), WIG20 (istotność $R(1)$ i $R(2)$) oraz MWIG40 (istotność $R(4)$). W świetle otrzymanych rezultatów należy stwierdzić, że jedynie w przypadku indeksów Nikkei (dla $lag = 1$) oraz MWIG40 (dla $lag = 4$) istotność współczynników MI może być spowodowana efektem ARCH (zidentyfikowanym przez analizę autokorelacji dla kwadratów reszt).⁷ W żadnym z pozostałych przypadków powodem istotności tych współczynników nie była ani autokorelacja, ani efekt ARCH. Jednocześnie warto również dodać, że w paru przypadkach współczynniki MI nie wykazały zależności zidentyfikowanych przez współczynniki AC,

⁷ W przypadku szeregu MWIG40 powodem istotności współczynnika MI może być również autokorelacja, zidentyfikowana testem Ljung-Boxa (por. tabela 17).

tj. autokorelacji dla Nikkei (istotność $AC(10)$) i efektu ARCH dla: FTSE 100 (istotność $AC(9)$), Hang Seng (istotność $AC(3)$) oraz MWIG40 (istotność $AC(4)$).

4. PODSUMOWANIE WYNIKÓW BADAŃ

Z przeprowadzonych badań wynika, że w siedmiu z dwunastu przebadanych indeksów giełdowych obecne są zależności nieliniowe innego typu niż GARCH a dominującym poziomem opóźnień czasowych w tych szeregach jest $lag = 1$. Fakt, iż klasyczny model GARCH niewystarczająco dobrze opisuje dynamikę analizowanych szeregów, sugeruje, że warto w dalszych badaniach rozważyć inne specyfikacje modeli tej klasy. Wśród nich szczególnie użyteczne w modelowaniu procesów finansowych wydają się być modyfikacje uwzględniające asymetryczny wpływ dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję, tj. EGARCH oraz GJR.

Warto również dodać, że wiedza o istnieniu zależności w szeregu czasowym jest cenna nawet wtedy, gdy istnieje problem ze znalezieniem modelu, który wystarczająco dobrze opisuje dynamikę tego szeregu. Sam fakt obecności takich zależności uzasadnia celowość zastosowania nieparametrycznych metod analizy danych, które umożliwiają modelowanie i prognozowanie szeregu czasowego bez identyfikacji parametrycznego modelu opisującego jego dynamikę.

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

LITERATURA

- [1] Bruzda J., (2004), *Miary zależności nieliniowej w identyfikacji nieliniowych procesów ekonomicznych*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, 34, 183-203.
- [2] Dionisio A., Menezes R., Mendes D.A., (2003), *Mutual Information: a Dependence Measure for Nonlinear Time Series*, working paper.
- [3] Dionisio A., Menezes R., Mendes D., (2006), *Entropy-Based Independence Test*, Nonlinear Dynamics, 44, 351-357.
- [4] Fiszeder P., Orzeszko W., (2012), *Nonparametric Verification of GARCH-Class Models for Selected Polish Exchange Rates and Stock Indices*, Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance, 62 (5), 430-449.
- [5] Fonseca N., Crovella M., Salamatian K., (2008), *Long Range Mutual Information*, Proceedings of the First Workshop on Hot Topics in Measurement and Modeling of Computer Systems (Hotmetrics '08), Annapolis.
- [6] Fraser A.M., Swinney H.L., (1986), *Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information*, Physical Review A, 33 (2), 1134-1140.
- [7] Granger C.W.J., Lin J-L., (1994), *Using the Mutual Information Coefficient to Identify Lags in Nonlinear Models*, Journal of Time Series Analysis, 15, 371-384.
- [8] Granger C.W.J., Terasvirta T., (1993), *Modelling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford University Press, Oxford.
- [9] Hassani H., Dionisio A., Ghodsi M., (2010), *The Effect of Noise Reduction in Measuring the Linear and Nonlinear Dependency of Financial Markets*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 11, 492-502.

- [10] Hassani H., Soofi A.S., Zhigljavsky A.A., (2010), *Predicting Daily Exchange Rate with Singular Spectrum Analysis*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11, 2023-2034.
- [11] Maasoumi E., Racine J., (2002), *Entropy and Predictability of Stock Market Returns*, *Journal of Econometrics*, 107, 291-312.
- [12] Orzeszko W., (2009), *Współczynnik informacji wzajemnej jako miara zależności nieliniowych w szeregach czasowych*, *Acta Universitatis Nicolai Copernici. Oeconomia*, XXXIX, zeszyt 389 – Dynamiczne Modele Ekonometryczne, 157-166.

NIELINIOWA IDENTYFIKACJA RZĘDU AUTOZALEŻNOŚCI W STOPACH ZMIAN INDEKSÓW GIEŁDOWYCH

Streszczenie

Naturalnym uogólnieniem współczynnika korelacji liniowej Pearsona jest współczynnik informacji wzajemnej. Współczynnik ten umożliwia pomiar zależności różnego typu, również o charakterze nieliniowym. Podobnie jak współczynnik korelacji liniowej Pearsona, może być zastosowany do pojedynczego szeregu czasowego w celu identyfikacji autozależności. W niniejszej pracy badaniu poddano logarytmiczne stopy zmian wybranych polskich i zagranicznych indeksów giełdowych. Porównując rezultaty otrzymane dla oryginalnych szeregów stóp zmian i dla reszt z dopasowanych modeli ARMA-GARCH, określono charakter wykrytych zależności. Ponadto, wykorzystując procedurę bootstrap, zweryfikowano istotność współczynników informacji wzajemnej, co umożliwiło zidentyfikowanie opóźnień czasowych w analizowanych szeregach. W większości z przebadanych indeksów wykryto zależności nieliniowe innego typu niż GARCH a dominującym poziomem opóźnień czasowych w tych szeregach okazał się $lag = 1$.

Słowa kluczowe: współczynnik informacji wzajemnej, miara informacji wzajemnej, opóźnienia czasowe, nieliniowa dynamika, indeksy giełdowe

NONLINEAR IDENTIFICATION OF LAGS OF SERIAL DEPENDENCIES IN STOCK INDICES RETURNS

Abstract

The mutual information coefficient is one of the most important generalizations of the Pearson correlation coefficient. Its advantage is that it is able to measure all kinds of dependencies, also nonlinear ones. Like the Pearson correlation coefficient, the mutual information coefficient may be applied to a single time series in order to identify serial dependencies. In this paper the log-returns of the selected Polish and foreign stock indices have been analyzed. By comparing the results obtained for the raw returns and the residuals of the fitted ARMA-GARCH models, the nature of the identified dependencies has been determined. Moreover, the bootstrap procedure has been applied to verify significance of the mutual information coefficients and, in consequence, to determine the number of lags in the analyzed series. In the most investigated indices, nonlinear dependencies different from the ARCH effect have been detected and $lag = 1$ was the dominant time delay in such situations.

Key words: mutual information coefficient, mutual information measure, lags, nonlinear dynamics, stock indices