Dominik Krężołek

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

METODY APROKSYMACJI INDEKSU OGONA ROZKŁADÓW ALFA-STABILNYCH NA PRZYKŁADZIE GPW W WARSZAWIE

Wprowadzenie

Procesy i zjawiska ekonomiczne obserwowane na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat charakteryzują się wysokim poziomem nieprzewidywalności. Gospodarki wielu krajów zmagają się ze wspólnym problemem narastającej niepewności, a co za tym idzie – szeroko rozumianego ryzyka. Klasyczne modele statystyczno-ekonometryczne tłumaczące zjawiska gospodarcze, a zarazem stanowiące metodologiczne zabezpieczenie przed rosnącym ryzykiem (aspekt prognostyczny modelu), stają się w coraz mniejszym stopniu użyteczne. W związku z tym środowiska naukowe na całym świecie starają się wypracować takie metody ilościowe, które w sposób rzetelny i trafny modelowałyby rzeczywistość gospodarczą.

Rynek finansowy stanowi jeden z najbardziej dynamicznie rozwijających się segmentów gospodarki. Biorąc pod uwagę ten właśnie rynek należy zwrócić szczególną uwagę na własności, jakimi charakteryzują się finansowe szeregi czasowe. Podejście to jest niezwykle istotne z punktu widzenia inwestora, gdyż dobór odpowiedniego modelu może znacząco wpływać na poziom ryzyka, a tym samym upływać na podejmowane decyzje inwestycyjne. Jak wykazano już w drugiej połowie XX w. empiryczne szeregi czasowe obserwowane na rynku finansowym cechują się istotnie wysokim poziomem zmienności, występowaniem skupisk danych, heteroskedastycznością wariancji, leptokurtozą lub też posiadają własność występowania grubych ogonów ich empirycznych rozkładów [Mandelbrot, 1963; Fama, 1965]. Klasycznie przyjmowane założenie o normalności rozkładu stopy zwrotu okazuje się nie być stosownym podejściem przy konstrukcji optymalnych portfeli inwestycyjnych. Ominięcie w analizach wspomnianych własności może negatywnie wpływać na optymalną alokację kapitału, a tym samym na efektywność inwestycji. W związku z tym zaproponowano nową klasę rozkładów prawdopodobieństwa, które w sposób bardziej dokładny aproksymują rozkłady empiryczne, a mianowicie rozkłady stabilne. Rozkłady klasyfikowane jako stabilne cechują się pewnym parametrem kształtu, za pomocą którego możliwe jest modelowanie asymetrii oraz grubości ogona rozkładu. Dlatego też są one użytecznym narzędziem teoretycznym wykorzystywanym w wielu dziedzinach nauki.

1. Metodologia

Rozkłady alfa-stabilne najczęściej są opisywane za pomocą funkcji charakterystycznej. Tym samym, zmienna losowa X posiada rozkład alfa-stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $X \overset{d}{=} \gamma Z + \delta$, $\gamma > 0$, $\delta \in \Re$ oraz Z jest zmienną losową określoną funkcją charakterystyczną postaci:

$$\varphi_S(t) = E\left(\exp\{itZ\} = \begin{cases} \exp\left\{-|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta\,\mathrm{sgn}(t)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right]\right\}, & \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-|t|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}\mathrm{sgn}(t)\ln|t|\right]\right\}, & \alpha = 1 \end{cases}\right), \tag{1}$$

gdzie $0 < \alpha \le 2$, $-1 \le \beta \le 1$ oraz $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow t > 0 \\ 0 \Leftrightarrow t = 0 \\ -1 \Leftrightarrow t < 0 \end{cases}$.

Aby w pełni opisać rozkład alfa-stabilny, są wykorzystywane cztery parametry, z których najważniejszą rolę, określając tym samym całą klasę rozkładów, odgrywa parametr kształtu[1] α. Determinuje on grubość ogona rozkładu zmiennej losowej i przyjmuje wartości z przedziału $0 < \alpha \le 2$. Pozostałe parametry odpowiedzialne za kształt krzywej gęstości to indeks skośności $\beta \in \langle -1;1 \rangle$, parametr skali $\gamma > 0$ oraz parametr położenia $\delta \in \Re$.

Przedmiotem niniejszego artykułu jest prezentacja wybranych metod szacowania indeksu ogona rozkładów alfa-stabilnych. W literaturze przedmiotu najpopularniejszymi są:

[1] Określany także jako indeks ogona, wykładnik charakterystyczny, indeks stabilności [przyp. autora].

− metoda szacowania indeksu ogona[2] (MIO, ang. *Tail Exponent Estimation*),
− Metoda Kwantyli (MK, ang. *Quantile Method Estimation*),
− Metoda Największej Wiarygodności (MNW, ang. *Maximum Likelihood Method*).

W literaturze są także wykorzystywane Metoda Momentów oraz metoda aproksymacji funkcji gęstości rozkładu alfa-stabilnego za pomocą transformacji Fouriera funkcji charakterystycznej, jednakże jej stosowanie, podobnie jak wykorzystanie Metody Największej Wiarygodności, dostarcza wielu trudności numerycznych.

1.1. Metoda szacowania indeksu ogona (MIO)

Z uwagi na założenie stabilności rozkładu, najważniejszym parametrem modeli alfa-stabilnych jest parametr α. Najprostszą i zarazem bezpośrednią metodą szacowania jego wartości jest, wspomniana powyżej, metoda indeksu ogona. Polega ona na graficznym wyznaczeniu prawego ogona empirycznej dystrybuanty rozkładu w skali podwójnie logarytmicznej, a następnie na oszacowaniu (za pomocą analizy regresji liniowej) wartości współczynnika kierunkowego dla odpowiednio dużych wartości zmiennej losowej. Wartość współczynnika kierunkowego jest oszacowaniem indeksu ogona rozkładu alfa-stabilnego, przy czym zachodzi zależność, iż wartość v równa jest wartości współczynnika kierunkowego wspomnianej linii regresji, podanego z przeciwnym znakiem[3]. Metoda ta posiada jednak istotną wadę − jest wrażliwa na rozmiar próby. Wraz ze wzrostem liczby obserwacji, wartości szacowanego współczynnika kierunkowego dążą do nieznanej rzeczywistej wartości indeksu ogona. Oszacowanie prowadzi się dla odpowiednio dużych (prawy ogon) lub odpowiednio małych (lewy ogon) wartości analizowanej zmiennej [Borak, Härdle, Weron, 2005].

Inna metoda została zaproponowana przez M.B. Hilla [1975]. Jeśli prawy ogon rozkładu podlega prawu Pareto, wtedy estymator Hilla parametru α pozwala zmierzyć jego grubość. Zakładając skończoną n-elementową próbę $X_1, X_2, \ldots, X_n$, estymator Hilla parametru α jest dany wzorem:

$$\alpha_H^* = \frac{1}{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \ln\left(X_{n+1-j:n}\right) - \ln\left(X_{n-k:n}\right)}, \tag{2}$$

[2] Wykorzystująca estymator Hilla.

[3] Wartość indeksu stabilności jest równa wartości współczynnika kierunkowego przemnożonej przez (-1) [przyp. autora].

gdzie $X_{j:n}$ oznacza j-tą wartość X w uporządkowanej n-elementowej próbie $X_1, X_2, \ldots, X_n$, natomiast k jest pewną dodatnią stałą, określającą punkt startowy szacowania parametru ogona [Rachev, Mittnik, 2000]. Błąd standardowy estymacji jest określony następująco:

$$s\left(\alpha_H^*\right) = \frac{k\alpha_H^*}{(k-1)(k-2)^{0,5}}, \quad k > 2 \ . \tag{3}$$

Główną wadą tej metody jest przeszacowywanie indeksu stabilności (jeśli parametr alfa zmierza do wartości 2 oraz próba nie jest dostatecznie duża).

1.2. Metoda Kwantyli (MK)

Kolejna z metod wyznaczania parametru została zaproponowana przez J.H. McCullocha w 1986 r. [1986, 1109-1136]. Wykazał on, iż parametry rozkładów alfa-stabilnych mogą zostać oszacowane w sposób jednoznaczny na podstawie pięciu, określonych uprzednio, kwantyli z próby oraz przy wykorzystaniu specjalnych tablic pomocniczych, powiązanych z parametrami α oraz β, przy sztywnym założeniu, że $\alpha \geq 0{,}6$. Oznaczając przez $x_{(p)}$ kwantyl rzędu p zmiennej losowej X, należy wyznaczyć następujące statystyki:

$$v_\alpha = \frac{x_{(0,95)} - x_{(0,05)}}{x_{(0,75)} - x_{(0,25)}}, \tag{4}$$

$$v_\beta = \frac{x_{(0,95)} + x_{(0,05)} - 2x_{(0,5)}}{x_{(0,95)} - x_{(0,05)}}. \tag{5}$$

Zarówno v_α, jak i v_β są niezależne od wartości parametrów położenia δ oraz skali γ. Odpowiednie estymatory z próby dla powyższych statystyk oznaczono jako v_α^* oraz v_β^*. Z racji tego, że v_α i v_β są funkcjami parametrów α oraz β [McCulloch, 1986, s. 1114-1117], tj. $v_\alpha = \phi_1(\alpha, \beta)$, a także $v_\beta = \phi_2(\alpha, \beta)$, dodatkowo wyznaczono zależność odwrotną:

$$\alpha = \varphi_1\left(v_\alpha, v_\beta\right), \tag{6}$$

$$\beta = \varphi_2\left(v_\alpha, v_\beta\right). \tag{7}$$

Odpowiednikami powyższych statystyk, oszacowanymi na podstawie próby, są odpowiednio $\alpha^* = \varphi_1\left(v_\alpha^*, v_\beta^*\right)$ oraz $\beta^* = \varphi_2\left(v_\alpha^*, v_\beta^*\right)$. Wykorzystując interpolację liniową pomiędzy odpowiednimi wartościami przedstawionymi w specjalnych tablicach zaproponowanych przez McCullocha uzyskuje się estymatory rzeczywistych parametrów α oraz β. Parametry położenia δ oraz skali γ wyznacza się w podobny sposób, wykorzystując wspomniane tablice interpolacyjne. Szczegóły opis procedury szacowania wszystkich czterech parametrów rozkładów alfa-stabilnych Metodą Kwantyli można znaleźć we wspomnianej pracy McCullocha.

1.3. Metoda Największej Wiarygodności (MNW)

Szacowanie parametrów rozkładów alfa-stabilnych Metodą Największej Wiarygodności nie różni się istotnie od szacowania parametrów tą metodą dla rozkładów innych klas. Mając dany wektor obserwacji $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, to oszacowania wektora parametrów $\theta = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ rozkładu alfa-stabilnego metodą MNW uzyskuje się poprzez maksymalizację logarytmu funkcji wiarygodności postaci:

$$L_\theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \log f_\alpha^*(x_i, \theta), \tag{8}$$

gdzie f_α^* jest funkcją gęstości rozkładu alfa-stabilnego (nieznaną, konieczną do oszacowania numerycznie).

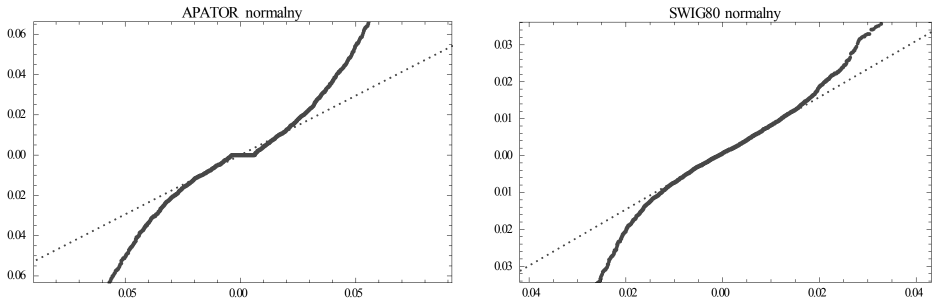
Metody MNW opisywane w literaturze różnią się przede wszystkim wyborem odpowiedniego algorytmu aproksymującego nieznany wektor parametrów rozkładu. Niemniej jednak wszystkie metody MNW posiadają jedną, wspólną cechę – przy wprowadzeniu pewnych szczegółowych założeń oszacowania MNW posiadają asymptotycznie rozkład normalny z wariancją określoną macierzą informacji Fishera. Ze względu na skomplikowane procedury numeryczne stosowanie klasycznej metody MNW, mimo dokładności wyników, nie jest bardzo popularne w środowisku naukowców i badaczy. Obecnie znacznie częściej, ze względu na szybki rozwój narzędzi informatycznych oraz skrócenie czasu potrzebnego na prowadzenie obliczeń, popularnymi stają się modyfikacje metod szacowania parametrów w obrębie MNW. Popularnym jest podejście oparte na transformacji Fouriera (*Fast Fourier Transform* – FFT) lub też wykorzystywanie bezpośrednich metod rachunku całkowego. Obie metody są porównywalne w sensie efektywności uzyskanych estymatorów, a ewentualne różnice w ich wartościach wynikają ze sposobu szacowania funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa alfa-stabilnej zmiennej losowej.

2. Analiza empiryczna

Analizy porównawczej opisanych metod szacowania indeksu ogona rozkładów alfa-stabilnych dokonano wykorzystując wybrane spółki Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Badanie prowadzono na podstawie notowań APATOR, SWIG80, MOSTALZAB oraz WIGTELKOM w okresie 03.01.2000--30.06.2011. Za kryterium wyboru analizowanych spółek przyjęto graficzną ocenę niezgodności rozkładów empirycznych z rozkładem normalnym (wybrano spółki o największej rozbieżności na podstawie wykresu kwantyl-kwantyl). Wyniki dopasowania przedstawiono na wykresach poniżej:

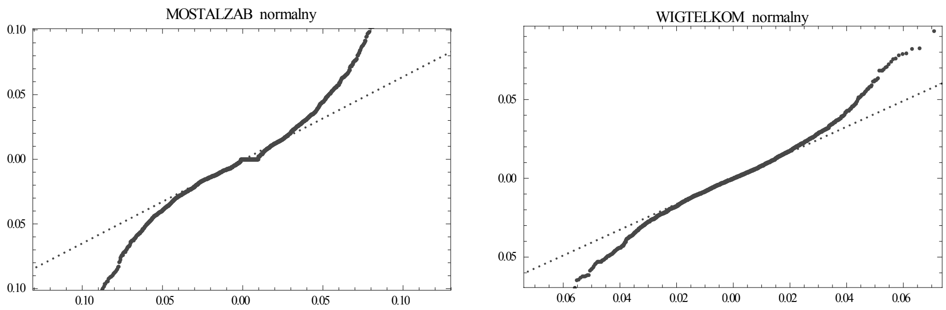
Wykres 1

Wykres kwantyl-kwantyl dla zmiennych APATOR oraz SWIG80



Wykres 2

Wykres kwantyl-kwantyl dla zmiennych MISTALZAB oraz WIGTELKOM



Zgodność z rozkładem weryfikowano za pomocą następujących testów statystycznych:

- testu Kołmogorowa-Smirnowa (K-S),
- testu Shapiro-Wilka (S-W),
- testu Lillieforsa,
- testu Jarque'a-Bera (J-B).

We wszystkich powyższych testach weryfikowano hipotezę zerową, głoszącą, iż empiryczny rozkład prawdopodobieństwa jest zgodny z rozkładem normalnym. Wyniki przedstawia tab. 1.

Tabela 1

Testy zgodności z rozkładem normalnym

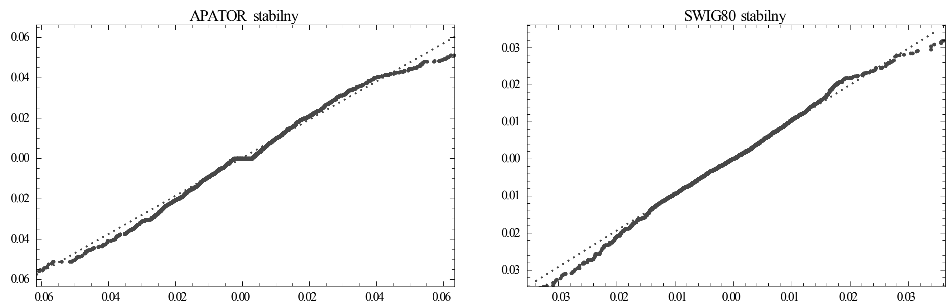
Statystyka testująca / Spółka	APATOR	MOSTALZAB	SWIG80	WIGTELKOM
Statystyka K-S	0,10434	0,10630	0,07045	0,04331
p-value	0,00000	0,00000	0,00000	0,00004
Statystyka A-D	81,01910	57,45690	31,86590	12,69920
p-value	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
Statystyka C-VM	15,48600	10,41130	5,26160	2,10295
p-value	0,00000	0,00000	0,00000	0,00001
Statystyka Kuipera	0,20834	0,18984	0,12326	0,08541
p-value	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
Statystyka U Watsona	15,46090	10,30770	5,05707	2,10240
p-value	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

W przypadku wszystkich czterech walorów odrzucono hipotezę o normalności empirycznego rozkładu już na poziomie 0,01. W związku z tym należy odrzucić klasyczne wnioskowanie na podstawie modelu Gaussa.

Biorąc pod uwagę wyniki testowania zgodności empirycznych rozkładów stóp zwrotu z rozkładem normalnym zaproponowano próbę dopasowania rozkładów alfa-stabilnych. Weryfikację zgodności przeprowadzono na podstawie oceny graficznej (wykresy 3-4).

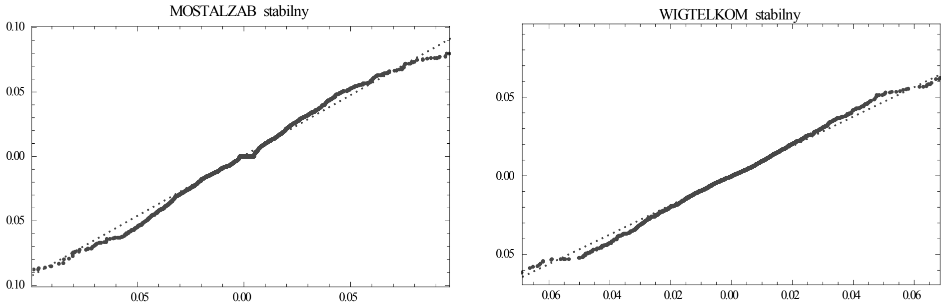
Wykres 3

Wykres kwantyl-kwantyl dla zmiennych APATOR oraz SWIG80



Wykres 4

Wykres kwantyl-kwantyl dla zmiennych MISTALZAB oraz WIGTELKOM



Graficzna ocena jednoznacznie potwierdza wysoką jakość dopasowania teoretycznych rozkładów alfa-stabilnych do danych empirycznych. Konieczność zastosowania innej klasy rozkładów niż z rodziny normalnych wynika przede wszystkim z faktu występowania w empirycznych rozkładach obserwacji istotnie oddalonych od wartości oczekiwanej oraz istotnej statystycznie koncentracji wartości stopy zwrotu wokół wartości średniej (leptokurtoza).

Wykorzystując metodologię przedstawioną w podpunktach 1.1-1.3 oszacowano następnie wartości indeksu ogona dla badanych spółek. W przypadku metody MIO wykorzystano estymator Hilla prawego ogona rozkładu. Wyniki przedstawiono w tab. 2.

Tabela 2

Oszacowania indeksu ogona rozkładu alfa-stabilnego

Spółka / Metoda estymacji	MNW	MK	MIO (Hill)
APATOR	1,38371	1,32848	1,57450
MOSTALZAB	1,51655	1,41997	1,58588
SWIG80	1,65783	1,54990	1,99162
WIGTELKOM	1,76116	1,61822	1,97559

Jak wynika z przedstawionych obliczeń wartości indeksu stabilności różnicują się w zależności od przyjętej metody estymacji. Największe wartości parametru α uzyskano w przypadku szacowania metodą MIO wykorzystując estymator Hilla. Najniższe natomiast przy wykorzystaniu metody MK. Oszacowana wartość indeksu ogona jest niezwykle istotna z punktu widzenia szacowania prawdopodobieństwa wystąpienia realizacji stopy zwrotu na poziomie znacznie oddalonym od centralnej części rozkładu. Największe zróżnicowanie uzyskano w przypadku zmiennych SWIG80 oraz WIGTELKOM[4]. Różnice w szacunkach

[4] Ocena poziomu indeksu ogona jest niezależna od postaci zmiennej (indeks, pojedyncza spółka) – [przyp. autora].

parametru α dla tych walorów wynoszą w przybliżeniu odpowiednio 0,44 oraz 0,36. Biorąc pod uwagę oszacowania parametru stabilności dla indeksu SWIG80 oraz przyjmując dowolny punkt progowy w prawym ogonie rozkładu, wykazano, że w przypadku metody MIO prawdopodobieństwo przekroczenia tego progu będzie znacznie mniejsze niż w przypadku metod MK oraz MNW.

Podsumowanie

Głównym celem badania była prezentacja wybranych metod szacowania indeksu ogona rozkładu alfa-stabilnego, dopasowanego do empirycznych rozkładów dziennych logarytmicznych stóp zwrotu wybranych walorów Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Analiza wykazała konieczność odrzucenia hipotezy o normalności empirycznych rozkładów na korzyść hipotezy alternatywnej. Wykorzystując charakterystyki rozkładów empirycznych, zaproponowano rodzinę alfa-stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa. Wyniki graficznej oceny dopasowania sugerują zasadność ich wykorzystania. Następnie dokonano porównania wartości indeksu ogona rozkładów wybranych walorów, wykorzystując różne metody szacowania parametrów. Uzyskane wartości indeksu ogona różnią się w zależności od przyjętej techniki estymacji. Najmniejsze wartości uzyskano dla metody MK, największe natomiast dla metody MIO. Wyniki te są zgodne z własnościami estymatorów, które w przypadku metody MK niedoszacowują, natomiast w przypadku metody MIO – przeszacowują wartości indeksu ogona. Optymalne rozwiązanie można uzyskać stosując metodę MNW. Wynika stąd, iż zastosowanie konkretnej metody szacowania parametrów rozkładów alfa-stabilnych może w znaczący sposób wpłynąć na podejmowane decyzje inwestycyjne. Istotność wniosku jest szczególnie ważna w sytuacjach oceny prawdopodobieństwa realizacji stopy zwrotu na poziomie istotnie oddalonym od centralnej części rozkładu.

Literatura

Borak Sz., Härdle W., Weron R. (2005): *Stable Distributions*. Springer, Berlin.

Fama E.F. (1965): *The Behavior of Stock Market Prices*. „Journal of Business", Vol. 38, No. 1.

Hill M.B. (1975): *A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution*. „Annals of Statistics", Vol. 3, No. 5.

Mandelbrot B. (1963): *The Variation of Certain Speculative Prices*. „Journal of Business", Vol. 36, No. 4.

McCulloch J.H. (1986): *Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters*. „Communications in Statistics – Simulations", No 15 (4).

Rachev S.T., Mittnik S. (2000): *Stable Paretian Models in Finance*. Series in Financial Economics and Quantitative Analysis. John Wiley & Sons, England.

TAIL INDEX APPROXIMATION METHODS OF ALPHA-STABLE DISTRIBUTIONS ON THE WARSAW STOCK

Summary

The main purpose of this paper is to present some estimation methods of parameters of alpha-stable distributions. Two classes of methods are presented: the classical Maximum Likelihood Method and non-classical ones: Quantile Methods and Tail Exponent Estimation (based on Hill estimator). The results show significant difference in values of stability index depending on estimation method. The choice of method may significantly affect investment decisions.