

**ZASTOSOWANIE WYBRANYCH MODELI ADAPTACYJNYCH
W PROGNOZOWANIU BRAKUJĄCYCH DANYCH
W SZEREGACH ZE ZŁOŻONĄ SEZONOWOŚCIĄ
DLA LUK NIESYSTEMATYCZNYCH**

Maria Szmuksta- Zawadzka

Studium Matematyki

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

e-mail: Maria.Szmuksta-Zawadzka@zut.edu.pl

Jan Zawadzki

Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

e-mail: Jan.Zawadzki@zut.edu.pl

Streszczenie: Artykuł poświęcony jest wykorzystaniu wybranych modeli wyrównywania wykładniczego: Browna, Holta i Holta-Wintersa w prognozowaniu zmiennych ze złożoną sezonowością w warunkach braku pełnej informacji. Prognozy wyjściowe będą budowane na podstawie szeregów oczyszczonych z sezonowości. Prognozy końcowe, uwzględniające wahania sezonowe, będą sumami prognoz wyjściowych i składników sezonowości lub iloczynami prognoz tego rodzaju i wskaźników sezonowości. Rozważania o charakterze teoretycznym zostaną zilustrowane przykładem empirycznym.

Słowa kluczowe: złożona sezonowość, wyrównywanie wykładnicze, prognozowanie, brakujące dane

WSTĘP

W literaturze statystyczno-ekonometrycznej można spotkać wiele przykładów zastosowania modeli adaptacyjnych do modelowania i prognozowania zjawisk, w których występuje jeden rodzaj wahań (np.: miesięczne, dekadowe). Dla danych nieczyszczonych (z sezonowością) najczęściej wykorzystywane były modele Holta-Wintersa (addytywny i multiplikatywny). Natomiast dla danych oczyszczonych z sezonowości metody wyrównywania wykładniczego: Browna

(prosty, liniowy i kwadratowy) oraz liniowy model Holta a także metody numeryczne. Prognozy ostateczne, w zależności od sposobu eliminacji wahań, otrzymuje się po przemnożeniu przez wskaźniki lub przez dodanie składników sezonowości¹.

Prognozy dla danych oczyszczonych mogą być także budowane jako sumy lub iloczyn wartości trendów szacowanych KMNK i odpowiednio składników lub wskaźników sezonowości. Tego rodzaju postępowanie określane jest mianem metody wskaźnikowej lub metody wskaźników sezonowości (por. [Dittmann 2006, s.85], Zeliaś i inni 2003, s.90]).

W pracy [Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki; 2014] zaproponowana została procedura wykorzystania modeli adaptacyjnych w prognozowaniu zmiennych ze złożoną sezonowością dla pełnych danych. Niniejsza praca stanowi rozszerzenie rozważań na przypadek występowania niesystematycznych luk w danych.

WPROWADZENIE TEORETYCZNE

W niniejszej pracy podjęta zostanie próba wykorzystania modeli adaptacyjnych do modelowania i prognozowania zmiennych ze złożoną sezonowością dla danych oczyszczonych z jednego lub dwóch rodzajów wahań sezonowych. Zakładamy, że w szeregu czasowym dla danych dziennych występują wahania o cyklu tygodniowym (7 dniowym) i rocznym (12-miesięcznym). Mogą się one nakładać na siebie i na trend w sposób addytywny lub multiplikatywny.

Ogólny zapis modelu addytywnego jest następujący:

$$Y_{t(a)} = P^{(a)}(t) + M^{(a)}(t) + D^{(a)}(t) + V_{t(a)} \quad (1)$$

gdzie:

$P^{(a)}(t)$ – trend,

$M^{(a)}(t)$ – składniki sezonowości o cyklu 12 miesięcznym,

$D^{(a)}(t)$ – składniki sezonowości o cyklu 7 dniowym.

Natomiast postać ogólna modelu multiplikatywnego wyraża się wzorem:

$$Y_{t(m)} = P^{(m)}(t) \cdot M^{(m)}(t) \cdot D^{(m)}(t) \cdot V_{t(m)} \quad (2)$$

gdzie:

$P^{(m)}(t)$ – trend,

$M^{(m)}(t)$ - wskaźniki sezonowości o cyklu 12 miesięcznym,

$D^{(m)}(t)$ - wskaźniki sezonowości o cyklu 7 dniowym.

¹ Przegląd publikacji poświęconych metodom prognozowania, zarówno pełnych jak i brakujących danych oraz ich praktycznym zastosowaniom w odniesieniu do zmiennych z niezłożonymi wahaniami sezonowymi (miesięcznymi, kwartalnymi i dekadowymi), można znaleźć w pracy [Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki; 2012].

Bezpośrednie wykorzystanie modeli Holta-Wintersa nie jest możliwe, ponieważ wymagałoby wprowadzenia dodatkowego, czwartego równania opisującego wahania o cyklu rocznym – uwzględniającego różną długość miesięcy.

Jak się wydaje, ze względów praktycznych mogą wchodzić w grę m.in. modele Holta-Wintersa dla danych oczyszczonych, z których wyeliminowano wahania o cyklu rocznym (Y_t^*). Jeżeli eliminacji dokonano odejmując składniki sezonowości to będzie to model w postaci addytywnej. W przypadku podzielenia wartości zmiennej prognozowanej przez wskaźniki sezonowości będziemy mieć do czynienia z postacią multiplikatywną.

Zapis modelu addytywnego Holta-Wintersa (A_HW) jest następujący [Pawłowski 1973]:

$$m_t^* = \alpha(Y_t^* - c_{t-L}) + (1 - \alpha)m_{t-1}^* \quad (3)$$

$$\delta_{1t}^* = \beta(m_t^* - m_{t-1}^*) + (1 - \beta)\delta_{1t-1}^* \quad (4)$$

$$C_t^* = \gamma(Y_t^* - m_t^*) + (1 - \gamma)C_{t-m}^* \quad (5)$$

$$0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1 \quad (6)$$

Predyktor oparty na tym modelu przyjmuje postać:

$$\Pi_{A_HW}^* = m_{t_0}^* + \delta_{1t_0}^* h + C_{t_0, 1+h}^* \quad (7)$$

Prognozę ostateczną, uwzględniającą wahania sezonowe, otrzymuje się na podstawie predyktora o postaci:

$$\Pi_{A_HW} = \Pi_{A_HW}^* + M^{(a)}(t) \quad (8)$$

Model multiplikatywny Holta-Wintersa (M_HW) można zapisać następująco:

$$m_t^* = \frac{\alpha Y_t^*}{C_{t-m}^*} + (1 - \alpha)(m_{t-1}^* + \delta_{1t-1}^*) \quad (9)$$

$$\delta_{1t}^* = \beta(m_t^* - m_{t-1}^*) + (1 - \beta)\delta_{1t-1}^* \quad (10)$$

$$C_t^* = \frac{\gamma Y_t^*}{m_t^*} + (1 - \gamma)C_{t-m}^* \quad (11)$$

$$0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1 \quad (12)$$

Predyktory; wyjściowy i końcowy, wyrażają się wzorami:

$$\Pi_{M_HW}^* = (m_{t_0}^* + \delta_{1t_0}^* h) C_{t_0-m+h}^* \quad (13)$$

$$\Pi_{M_HW} = \Pi_{M_HW}^* \cdot M^{(m)}(t) \quad (14)$$

Natomiast w przypadku danych, z których wyeliminowano dodatkowo także wahania o cyklu tygodniowym (Y_t^{**}) do budowy prognoz mogą być wykorzystane na przykład proste modele Browna i modele Holta.

Równanie addytywnego prostego modelu Browna (A_BS) jest następujące:

$$m_t^{**} = \alpha Y_t^{**} + (1 - \alpha) m_{t-1}^{**} \quad (15)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (16)$$

Predyktory wyjściowy i końcowy przyjmują postać:

$$\Pi_{A_BS}^{**} = m_{t_0}^{**} \quad (17)$$

$$\Pi_{A_BS} = \Pi_{A_BS}^{**} + M^{(a)}(t) + D^{(a)}(t) \quad (18)$$

W modelu multiplikatywnym równanie modelu prostego Browna (M_BS) różni się od postaci addytywnej jedynie sposobem wyznaczenia wartości oczyszczonych (Y_t^{**}) - są one ilorazami wartości zmiennej prognozowanej i wskaźników sezonowości o cyklu rocznym i tygodniowym.

Predyktory wyjściowy i końcowy są następujące:

$$\Pi_{M_BS}^{**} = m_{t_0}^{**} \quad (19)$$

$$\Pi_{M_BS} = \Pi_{M_BS}^{**} * M^{(m)}(t) * D^{(m)}(t) \quad (20)$$

Addytywny model liniowy Holta (A_H) można zapisać [Pawłowski 1973]:

$$m_t^{**} = \alpha Y_t^{**} + (1 - \alpha)(m_{t-1}^{**} + \delta_{1t-1}^{**}) \quad (21)$$

$$\delta_{1t}^{**} = \beta (m_t - m_{t-1}) + (1 - \beta) \delta_{1t-1}^{**} \quad (22)$$

$$0 \leq \alpha, \beta \leq 1 \quad (23)$$

Predyktory wyjściowy i końcowy wyrażają się wzorami:

$$\Pi_{A_H}^{**} = m_{t_0}^{**} + \delta_{1t_0}^{**} h \quad (24)$$

$$\Pi_{A_H} = \Pi_{A_H}^{**} + M^{(a)}(t) + D^{(a)}(t) \quad (25)$$

Równania postaci multiplikatywnej modelu Holta (M_H) różnią się, podobnie jak w przypadku modelu Browna, jedynie sposobem eliminacji wahań sezonowych.

Postacie predyktorów są następujące:

$$\Pi_{M_H}^{**} = m_{t_0}^{**} + \delta_{1t_0}^{**} h \quad (26)$$

$$\Pi_{M_H} = \Pi_{M_H}^{**} * M^{(m)}(t) * D^{(m)}(t) \quad (27)$$

Jednym z ważniejszych zagadnień związanych z modelowaniem i prognozowaniem z wykorzystaniem modeli adaptacyjnych w warunkach braku pełnej informacji jest wybór optymalnych wartości stałych wygładzania

Dla pełnych danych za optymalne uznaje się te wartości stałych wygładzania, które minimalizują wartość określonego miernika dokładności. Najczęściej są to błąd średnio-kwadratowy (RMSE) i procentowy błąd absolutny (MSE) albo związane z nimi przeciętne błędy względne i pierwiastek kwadratowy ze współczynnika Theila (I) lub przeciętny względny błąd prognozy (MAPE). Oblicza się je jako różnice absolutne lub względne dla przedziału czasowego próby

oraz realizacji zmiennej prognozowanej. Okazuje się jednak, że otrzymanie minimalnych ocen mierników dla wartości wyrównanych nie jest jednoznaczne z otrzymaniem minimalnych ocen błędów prognoz *ex post*.

Jeżeli celem modelowania jest budowa prognoz *ex ante* to podstawą wyboru optymalnych wartości stałych wygładzania powinny być mierniki dokładności prognoz *ex post*. Proces ten ulega komplikacji w przypadku, gdy w szeregach czasowych występują luki w danych. Wyznacza się wtedy dwa rodzaje prognoz: interpolacyjne i ekstrapolacyjne. Prognozy interpolacyjne odnoszą się do tych okresów należących do przedziału czasowego próby, w których wystąpiły luki. Natomiast prognozy ekstrapolacyjne wybiegają poza ten przedział. Jeżeli zna się wartości realizacji w tym okresie to obliczamy mierniki dokładności *ex post*.

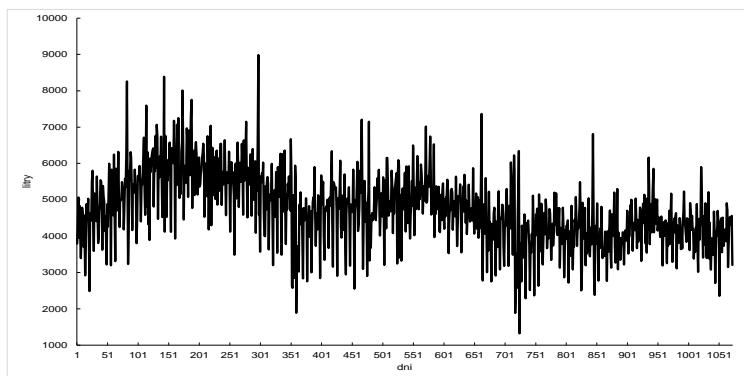
Należy liczyć się z tym, że w omawianej sytuacji otrzyma się najczęściej różne zbiory optymalnych wartości stałych wygładzania odpowiednio dla: wartości wyrównanych (WW), prognoz interpolacyjnych (I) oraz prognoz ekstrapolacyjnych (E)

PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

Charakterystyka zmiennej

Modelowaniu i prognozowaniu poddana zostanie dzienna sprzedaż paliw płynnych na stacji benzynowej X (w litrach). Kształtowanie się zmiennej prognozowanej w przedziale czasowym próby przedstawione zostało na rysunku 1.

Rysunek 1. Wielkość sprzedaży paliw płynnych na stacji benzynowej X



Źródło: Bank Danych Katedry Zastosowań Matematyki w Ekonomii ZUT w Szczecinie

W Tabeli 1 zestawione zostały oceny wskaźników i składników sezonowości o cyklach 12 miesięcznym i 7 dniowym..

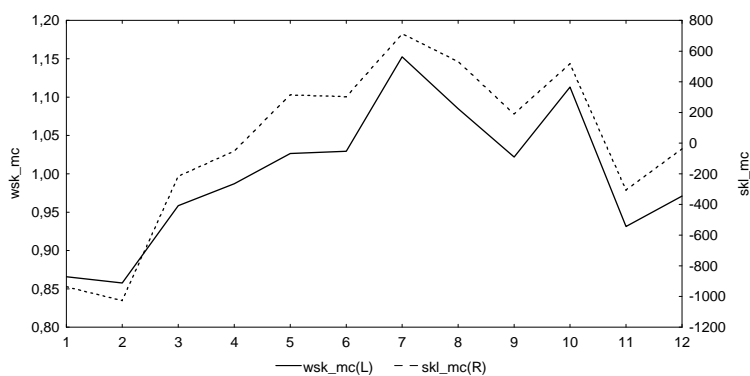
Tabela 1. Oceny wskaźników i składników sezonowości o cyklach 12 miesięcznym i 7 dniowym.

Dzień	Wskaźniki sez.	Składniki sez.	Miesiąc	Wskaźniki sez.	Składniki sez.
Poniedziałek	1,028	131,30	Styczeń	0,866	-936,19
Wtorek	1,015	71,09	Luty	0,858	-1026,38
Środa	1,027	146,10	Marzec	0,958	-216,37
Czwartek	1,108	535,76	Kwiecień	0,987	-50,84
Piątek	1,035	200,12	Maj	1,026	314,46
Sobota	0,829	-832,90	Czerwiec	1,029	303,36
Niedziela	0,957	-251,46	Lipiec	1,153	713,35
			Sierpień	1,085	532,99
			Wrzesień	1,022	191,27
			Październik	1,113	517,72
			Listopad	0,931	-306,09
			Grudzień	0,971	-37,28

Źródło: Szmuksta-Zawadzka, Zawadzki, 2014

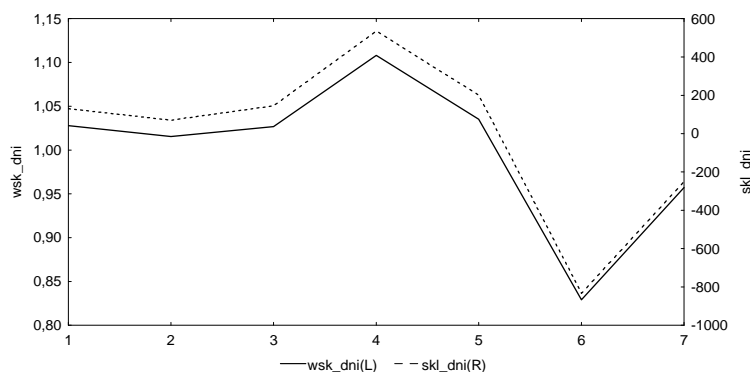
Na podwójnie skalowanych rysunkach 2 i 3 przedstawione zostały w postaci graficznej oceny wskaźników i składników sezonowości wahań o cyklu rocznym i tygodniowym.

Rysunek 2. Oceny wskaźników i składników sezonowości wahań o cyklu rocznym



Źródło: opracowanie własne

Rysunek 3. Oceny wskaźników i składników sezonowości wahań o cyklu tygodniowym.



Źródło: opracowanie własne

Z rysunków wynika, że sprzedaż paliw na badanej stacji charakteryzuje się istotnymi wahaniami zarówno w skali roku jak i tygodnia. Widoczna jest duża zgodność przebiegu wskaźników i składników sezonowości.

Oszacowania wskaźników i składników sezonowości zawarte w Tabeli 1 zostaną wykorzystane najpierw do eliminacji wahań sezonowych a następnie wyznaczania prognoz końcowych

Zakres badań

Rozpatrywany będzie jeden wariant luk niesystematycznych. Luki występować będą w drugim roku przedziału czasowego próby: w poniedziałki, środy i piątki tzn. w 157 spośród 724 dni. Udział luk będzie wynosić zatem 21,69% długości szeregu. Otrzymano je przez „wymazanie” odpowiednich wielkości z pełnego szeregu.

Do budowy prognoz dla danych, z których wyeliminowano wahania o cyklu rocznym (Y_t^*) zostaną wykorzystane modele Holta-Wintersa w postaci addytywnej (A_HW) i multiplikatywnej (M_HW). Natomiast dla danych, z których wyeliminowano zarówno wahania o cyklu rocznym jak i tygodniowym (Y_t^{**}) prognozy będą budowane na podstawie predyktorów opartych na prostych modelach Browna (A_BS i M_BS) oraz modelach Holta (A_H i M_H). Dla każdej kombinacji stałych wygładzania obliczone zostaną oceny błędów względnych: wartości wyrównanych (WW), prognoz interpolacyjnych (I) i prognoz ekstrapolacyjnych (E).

Natomiast analizie poddane zostaną zestawy stałych wygładzania charakteryzujące się minimalnymi ocenami błędów wymienionych wyżej rodzajów wielkości. Dla celów porównawczych zostaną podane także oceny błędów: wartości wyrównanych, prognoz inter- i ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie predyktorów opartych na modelach szeregu czasowego z liniowym trendem i periodycznymi składnikiem sezonowym (A_KL) i trendem

wykładniczym o stałej stopie wzrostu i relatywnie stałych wahaniach sezonowych (M_KL).

Dla modeli charakteryzujących się minimalnymi ocenami błędów prognoz inter- i ekstrapolacyjnych przeprowadzona została dekompozycja błędów prognoz według dni tygodnia i miesięcy.

Pracę kończyć będzie część wnioskowa dotycząca oceny możliwości wykorzystania modeli wyrównania wykładniczego dla danych oczyszczonych z sezonowości w prognozowaniu zmiennych ze złożoną sezonowością w warunkach braku pełnej informacji.

Analiza wyników modelowania i prognozowania

W tabelicy 2 zestawione zostały oceny błędów: wartości wyrównanych (WW), prognoz interpolacyjnych (I) i prognoz ekstrapolacyjnych (E) otrzymane dla parametrów wykładniczych charakteryzujących się minimalnymi ocenami błędów wymienionych wyżej wielkości. Zestawiono w niej także oceny błędów dla modeli klasycznych: A_KL oraz M_KL. W modelach tych wahania cyklu rocznym i tygodniowym były opisane za pomocą osobnych zbiorów zmiennych zero-jedynkowych. Model M_KL różnił się tym od modelu A_KL tym, że po lewej stronie szacowanego równania zamiast zaobserwowanych wartości zmiennej prognozowanej Y_t wystąpiły jej logarytmy naturalne (por. np. [Kufel 2010], [Szmuksta-Zawadzka; Zawadzki 2011]).

Tablica 2. Minimalne oceny średnich błędów względnych: wartości wyrównanych (WW), prognoz interpolacyjnych (I) i prognoz ekstrapolacyjnych (E) oraz optymalne wartości stałych wykładzania

Model	Miernik dotyczy	Stałe wykładzania			MAPE(%)		
		α	β	γ	WW	I	E
MODELE ADDYTYWNE							
A_BS1	WW	0,07			12,00	12,88	16,17
A_BS2	I	0,16			12,26	12,62	15,00
A_BS3	E	0,22			12,48	12,66	14,86
A_H1	WW	0,15	0,15		13,55	12,78	297,72
A_H2	I	0,15	0,03		15,99	12,61	49,02
A_H3	E	0,02	0,06		50,21	17,58	13,31
A_HW1	WW	0,1	0,02	0,01	11,33	13,93	22,97
A_HW2	I	0,1	0,04	0,01	11,36	13,89	45,45
A_HW3	E	0,03	0,08	0,03	12,93	15,04	12,94
A_KL					11,54	15,17	16,59
MODELE MULTIPLIKATYWNE							
M_BS1	WW	0,04			15,68	16,34	16,66
M_BS2	I	0,01			16,30	16,09	18,35
M_BS3	E	0,38			17,22	19,28	12,14

Model	Miernik dotyczy	Stałe wygładzania			MAPE(%)		
		α	β	γ	WW	I	E
M_H1	WW	0,15	0,15		17,22	17,56	258,52
M_H2	I	0,04	0,03		35,13	16,67	17,18
M_H3	E	0,12	0,01		31,48	16,99	11,59
M_HW1	WW	0,1	0,02	0,1	12,74	12,74	17,97
M_HW2	I	0,1	0,04	0,1	12,98	12,69	14,26
M_HW3	E	0,07	0,01	0,03	14,48	13,47	11,20
M_K1					11,51	14,17	15,60

Źródło: opracowanie własne

Występujące przy oznaczeniach modeli kolejne cyfry oznaczają modele charakteryzujące się minimalnymi ocenami błędów: 1 - wartości wyrównanych, 2 - prognoz interpolacyjnych, 3 - prognoz ekstrapolacyjnych.

Analiza błędów wartości wyrównanych oraz błędów obu rodzajów prognoz otrzymanych na podstawie modeli wyrównywania wykładniczego zostanie poprzedzona krótkim omówieniem wyników otrzymanych dla modeli klasycznych. Niższe o 1 p.p. oceny błędów prognoz inter- i ekstrapolacyjnych otrzymano dla predyktora opartego na modelu wykładniczym o stałej stopie wzrostu z relatywnie stałą sezonowością (M_KL). W trakcie omawiania wyników modelowania i prognozowania będziemy odwoływać się do tego modelu klasycznego.

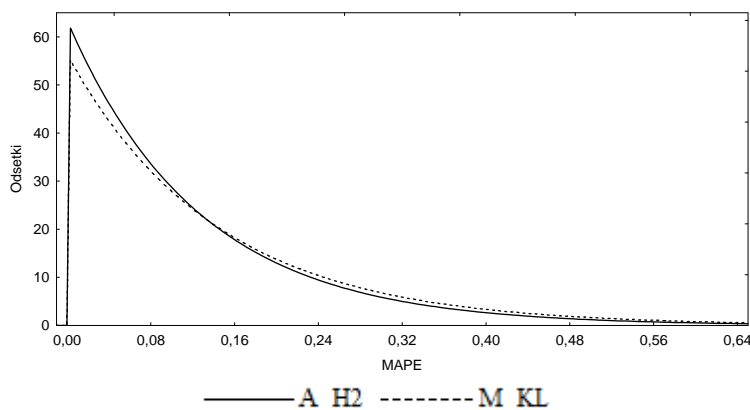
Z informacji zawartych w tabelicy wynika, że minimalną oceną błędu wartości wyrównanych wynoszącą 11,33% otrzymano dla addytywnej postaci modelu Holta-Wintersa (A_HW1) o stałych wygładzania wynoszących: $\alpha=0,1$, $\beta=0,02$ oraz $\gamma=0,1$. Następnym w kolejności był model multiplikatywny Holta-Wintersa (M_HW1) z oceną 12,74%. Spośród modeli z podwójnie eliminowaną sezonowością najniższą ocenę błędu względnego (12,78%) otrzymano dla predyktora opartego na modelu Holta (A_H1) o stałych wygładzania $\alpha=0,15$ i $\beta=0,15$. Oceny przeciętego błędu względnego otrzymanego dla modelu klasycznego (M_KL) jest tylko o 1,68% wyższa od oceny uzyskanej dla modelu A_HW1.

W przypadku prognoz interpolacyjnych z oceną 12,61%, najwyższą efektywnością charakteryzował się model addytywny Holta (A_H2), o takiej samej ocenie parametru α jak w modelu A_HW1, ale ocenie parametru $\beta=0,03$. Model klasyczny (M_KL) charakteryzuje się oceną błędu o 23,7% wyższą. Oceny bardzo zbliżone otrzymano dla dwóch stałych modeli Browna (A_H2 i A_H3) o parametrach wygładzania wynoszących 0,16 oraz 0,22. Oceny tylko nieznacznie wyższe otrzymano dla dwóch modeli Holta w postaci multiplikatywnej (M_H1 i M_H2).

Na rysunku 4 przedstawione zostały aproksymanty teoretyczne empirycznych rozkładów błędów prognoz interpolacyjnych otrzymane na

podstawie najlepszego predyktora adaptacyjnego (A_H2) oraz predyktora klasycznego (M_KL). Z rysunku wynika, że błędy prognoz adaptacyjnych przyjmują częściej niższe wartości.

Rysunek 4. Rozkłady błędów prognoz interpolacyjnych otrzymanych na podstawie modeli A_H2 oraz M_KL



Źródło: opracowanie własne

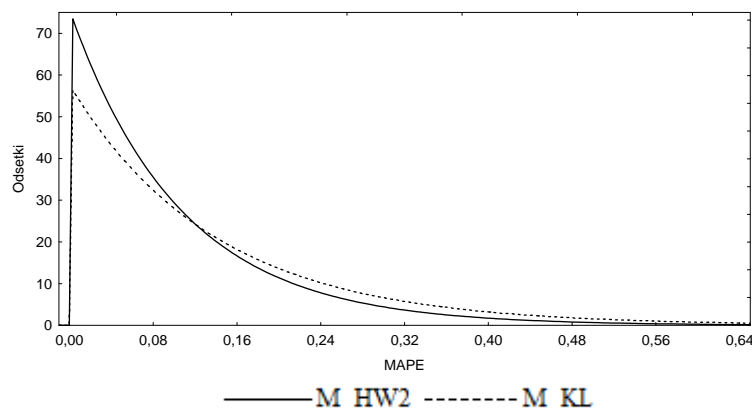
Zdecydowanie najniższą ocenę błędu prognoz ekstrapolacyjnych otrzymano dla multiplikatywnej postaci modelu Holta-Wintersa (M_HW3) o stałych wygładzania wynoszących odpowiednio: $\alpha=0,07$, $\beta=0,01$, $\gamma=0,08$. Wynosiła ona 11,20% i była o 28,21% niższa od oceny dla predyktora klasycznego. Dwie najniższe w kolejności oceny błędu otrzymano także dla postaci multiplikatywnych modeli Holta (M_H3) i Browna (M_BS3) o stałych wygładzania wynoszących: 0,12;0,01 oraz 0,38. Przyjęły one wartości 11,58% oraz 12,14% i były niższe o: 25,77% i 22,18 od oceny otrzymanej dla klasycznego predyktora z trendem wykładniczym i relatywnie stałą sezonowością.

Widzimy zatem, że przy niemal takiej samej ocenie błędu wartości wyrównanych efektywność prognoz interpolacyjnych a zwłaszcza ekstrapolacyjnych okazała się zdecydowanie wyższa od prognoz otrzymanych na podstawie predyktora klasycznego.

Spośród modelu addytywnych najniższą oceną charakteryzuje się model Holta-Wintersa (A_HW3) o stałych wygładzania wynoszących odpowiednio: $\alpha=0,03$, $\beta=0,08$ oraz $\gamma=0,03$. Otrzymana ocena błędu 12,94% jest o 17,06% niższa od uzyskanej dla predyktora klasycznego.

Kształtowanie się aproksymant teoretycznych empirycznych rozkładów błędów prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie najlepszego predyktora adaptacyjnego (M_HW2) oraz predyktora klasycznego (M_KL) zostało przedstawione graficznie na rysunku 5.

Rysunek 5 Aproksymanty teoretyczne rozkładów błędów prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie modeli M_HW2 oraz M_KL



Źródło: opracowanie własne

Z rysunku wynika, że błędy prognoz adaptacyjnych, podobnie jak w przypadku prognoz interpolacyjnych, przyjmują częściej niższe wartości niż dla modelu klasycznego. Różnice w rozkładach są bardziej widoczne niż dla prognoz interpolacyjnych.

W tabelicy 3 zestawione zostały zdezagregowane oceny błędów prognoz interpolacyjnych i ekstrapolacyjnych otrzymane na podstawie równań o minimalnych ocenach błędów. W celach porównawczych zestawiono w niej także zdezagregowane błędy prognoz dla modelu klasycznego. Z uwagi na to, że prognozy interpolacyjne odnoszą się do poniedziałków, śród i piątków i dotyczą one okresów, w których wystąpiły luki, zostanie podana ich liczba. To samo dotyczy miesięcy.

Tablica 3. Zdezagregowane oceny błędów prognoz inter- i ekstrapolacyjnych według dni tygodnia i miesięcy.

	Błędy prognoz interpolacyjnych (%)			Błędy prognoz ekstrapolacyjnych (%)	
	Liczba prognoz	A_H2	M_KL	M_HW3	KL
Ogółem	157	12,61	14,18	11,20	15,65
Poniedziałek	52	8,04	8,72	10,71	21,09
Wtorek	0			8,45	12,49
Środa	53	18,65	18,24	9,91	14,05
Czwartek	0			10,28	12,93
Piątek	52	11,02	15,49	8,95	18,53
Sobota	0			18,99	18,89
Niedziela	0			11,23	16,35
Styczeń	14	6,70	9,53	11,13	12,30

	Błędy prognoz interpolacyjnych (%)			Błędy prognoz ekstrapolacyjnych (%)	
	Liczba prognoz	A_H2	M_KL	M_HW3	KL
Luty	12	9,10	10,40	12,94	9,62
Marzec	13	12,94	11,25	7,05	9,71
Kwiecień	13	13,28	13,81	10,93	12,34
Maj	13	11,99	13,84	11,48	23,92
Czerwiec	13	12,51	14,23	9,26	21,87
Lipiec	13	5,76	9,94	6,96	14,38
Sierpień	13	9,30	11,54	7,91	12,78
Wrzesień	13	5,06	6,04	11,98	17,08
Październik	14	11,29	16,98	14,12	20,75
Listopad	12	8,59	10,30	16,93	17,61
Grudzień	14	42,49	39,84	17,72	14,65

Źródło: opracowanie własne

Z informacji zawartych w tabeli 3 wynika, że dla poniedziałków i śródtę dni zbliżone są oceny błędów prognoz interpolacyjnych otrzymanych na podstawie najlepszego z modeli adaptacyjnych i otrzymanych na podstawie predyktora klasycznego. Natomiast około 4,5 p.p. niższe błędy otrzymano na podstawie modelu Holta.

W przypadku dezagregacji na miesiące najniższą ocenę dla modelu Holta wynoszącą 5,06% otrzymano dla września. Błędami nieznacznie wyższymi charakteryzują się lipiec i styczeń. Oceny błędów w granicach 9% otrzymano także dla lutego, sierpnia i listopada. Najwyższą ocenę przekraczającą 40% otrzymano dla grudnia. Dla modelu klasycznego najniższą ocenę otrzymano także dla września – jest ona ok. 1 p.p. wyższa niż dla predyktora adaptacyjnego. Oceny w granicach 10% otrzymano dla stycznia, lipca, lutego oraz listopada. Niższe oceny błędów ok. 1,5 p.p. i 2,7 p.p. otrzymano na podstawie predyktora klasycznego odpowiednio dla marca i listopada. Największą różnicę wynoszącą ponad 5,5 p.p. odnotowano dla października. Najwyższą wartość błędu dla predyktora klasycznego przyjął także w grudniu. Wynikać to mogło, z nagłego załamania się pogody w porównaniu z rokiem poprzednim.

W przypadku prognoz ekstrapolacyjnych przeciętna ocena błędu dla predyktora adaptacyjnego była niższa o 4,45 p.p. od błędu dla predyktora klasycznego. Oceny błędów prognoz ekstrapolacyjnych dla dni tygodnia dla modelu Holta-Wintersa wahają się do 8,45% dla wtorku do 18,95% i 18,99% dla piątku i soboty. Dla pozostałych dni kształtują się na poziomie ok. 10%-19%.

Dla modelu klasycznego oceny błędów wahają się od 12,45% i 12,93% dla wtorku i czwartku do 21,09% dla poniedziałku. Najwyższe różnice dla dni tygodnia, wynoszące 10,38p.p. i 9,58 otrzymano dla poniedziałku i piątku a najniższą – minus 0,0010 dla soboty. Najniższą ocenę błędów w przypadku

miesiący dla predyktora opartego na modelu multiplikatywnym Holta-Wintersa otrzymano dla lipca i marca – wynoszą one odpowiednio: 6,96% oraz 7,05%. Oceny w granicach 8%-9% otrzymano dla sierpnia i czerwca. Natomiast ocenami najwyższymi charakteryzują się grudzień (17,72%) i listopad (16,93%).

Oceny błędów otrzymane dla predyktora klasycznego zawarte są w przedziale od 9,62% - 9,71% dla lutego i marca do 23,92% dla maja. Maksymalne różnice dokładności prognoz wynoszące 12,62 p.p. i 12,44 p.p. otrzymano odpowiednio dla czerwca i maja. Jedynie w grudniu błąd prognozy dla predyktora klasycznego był niższy (o 3,07 p.p.) od błędu dla predyktora adaptacyjnego.

PODSUMOWANIE

Z przeprowadzonych w pracy badań wyprowadzić można następujące wnioski:

1. Kryterium wyboru modelu dla celów prognozowania nie mogą być przeciętne błędy względne wartości wyrównanych, lecz błędy względne prognoz interpolacyjnych lub prognoz ekstrapolacyjnych.
2. W przypadku modelowania i prognozowania zmiennych o niezbyt silnej dynamice, w których występują luki niesystematyczne, optymalne wartości stałych wygładzania w modelach Holta i Holta-Wintersa przybierają wartości bliskie zeru.
3. Minimalne oceny błędów: wartości wyrównanych, prognoz interpolacyjnych oraz prognoz ekstrapolacyjnych otrzymano na podstawie różnych modeli adaptacyjnych.
4. Dokładność prognoz interpolacyjnych otrzymana na podstawie najlepszego predyktora adaptacyjnego była ok. 23,7% wyższa od dokładności prognoz dla predyktora klasycznego.
5. Dokładność prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych na podstawie najlepszych predyktorów adaptacyjnych był ok. 22,2% - 28,2 % wyższa od dokładności dla predyktora klasycznego.
6. W toku badań wykazano, modele wyrównywania wykładniczego dla danych oczyszczonych z sezonowości mogą być użytecznym narzędziem prognozowania zmiennych ekonomicznych ze złożoną sezonowością.

BIBLIOGRAFIA

- Dittmann P. (2006) Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Metody i ich zastosowanie, Wolters Kluwer Polska, Kraków.
- Kufel T. (2010) Ekonometryczna analiza cykliczności procesów gospodarczych o wysokiej częstotliwości obserwowania, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Pawlowski Z. (1973) Prognozowanie ekonometryczne, PWN, Warszawa.

- Szmuksta-Zawadzka M., Zawadzki J. (2011) Zastosowanie modelowania ekonometrycznego w prognozowaniu brakujących danych w szeregach o wysokiej częstotliwości, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu. *Ekonometria* 34, Wrocław, str. 303-314.
- Szmuksta-Zawadzka M., Zawadzki J. (2012) Z badań nad metodami prognozowania na podstawie niekompletnych szeregów czasowych z wahaniami okresowymi (sezonowymi), *Przegląd Statystyczny*, Tom 59, s.140-154, Warszawa.
- Szmuksta-Zawadzka M., Zawadzki J. (2014) Modele wyrównywania wykładniczego w prognozowaniu zmiennych ekonomicznych ze złożoną sezonowością (w druku).
- Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. (2003) Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania. PWN, Warszawa.

THE APPLICATION OF SELECTED ADAPTATION MODELS IN FORECASTING THE MISSING DATA IN THE TIME SERIES WITH COMPLEX SEASONALITY FOR UNSYSTEMATIC GAPS

Abstract: The paper is devoted to the application of selected exponential smoothing models: Brown, Holt and Holt-Winters in prediction of variables with complex seasonality in the condition of lack of full information. Output forecasts will be built on the basis of time series cleansed from seasonality. Final forecasts, taking into account seasonal fluctuations, will be a sum of output forecasts and seasonal components or multiply of forecasts and the seasonal indicators. Theoretical considerations will be illustrated by an empirical example.

Keywords: complex seasonality, exponential smoothing, forecasting, gaps in data