Martyna Diana Kostrzewska

Instytut Marketingu i Zarządzania
Uniwersytet Szczeciński

Metoda simpleks na przykładzie problemu decyzyjnego przedsiębiorstwa produkującego panele solarne

Streszczenie

Szukanie odnawialnych źródeł energii i nasilona produkcja dwutlenku węgla sprawiła, że coraz bardziej upowszechniły się rozwiązania eko. Solary, kolektory słoneczne, pompy ciepła stają się coraz bardziej popularne i pozyskanie energii ze źródeł odnawialnych wzrasta[1]. Na tej podstawie autorka artykułu zdecydowała wykorzystać algorytm simpleks do ustalenia rozmiarów produkcji paneli solarnych, które gwarantują maksymalny przychód ze sprzedaży, przy istniejących zapasach półproduktów. Problem decyzyjny został rozwiązany na podstawie danych firmy produkującej panele solarne. Ze względu na dużą pracochłonność algorytmu simpleks autorka skoncentrowała się na przedstawieniu zależności pomiędzy czterema tablicami simpleks, wykorzystując w tym celu zapis macierzowy programu liniowego. W artykule wykorzystano metodę simpleks uznawaną za ważną metodę rozwiązywania programów liniowych, która generuje ciąg dopuszczalnych rozwiązań Xk, w taki sposób, by kolejne rozwiązania były lepsze od poprzednich.

Słowa kluczowe

metoda simpleks, problemy decyzyjne, decyzje, panele solarne

Wprowadzenie

Klimat ziemi zmienia się w bardzo szybkim tempie, a populacja Europy jest w coraz większym stopniu świadoma tego zagrożenia. Świadomość przechodzi w czyny i obywatele, rządy oraz korporacje dostrzegają, iż zwrot w stronę ekologicznych form energii nie jest drogi ani szkodliwy dla przedsiębiorstw, lecz przynosi korzyści gospodarcze: oszczędności, nowe sektory gospodarki i lokalne miejsca pracy, zapewnia bezpieczeństwo energetyczne. Dlatego coraz więcej firm ze względu na wysoki popyt podejmuje decyzje o produkcji paneli słonecznych, które budowane są na bazie modułów fotowoltaicznych – urządzeń, które przetwarzają światło słoneczne bezpośrednio na energię elektryczną. Dzięki swej modułowej budowie, mogą one produkować energię zarówno na potrzeby małych urządzeń lub obiektów, jak również na potrzeby energetyki zawodowej i sprzedaży energii do sieci[2].

Nowoczesne zarządzanie to proces decydowania i budowania możliwości skutecznej realizacji decyzji, które odnoszą się do jak najkorzystniejszego wykorzystania posiadanych zasobów rzeczowych, kapitałowych i ludzkich[3]. Kompetencje decyzyjne są bardzo istotne, ponieważ zarządzanie utożsamiane jest z decydowaniem[4].

Celem głównym opracowania jest rozwiązanie problemu decyzyjnego przedsiębiorstwa produkcyjnego przy pomocy algorytmu simpleks. Pierwszy cel szczegółowy dotyczy zagadnień teoretycznych związanych z badaniami operacyjnymi, programowaniem liniowym, oraz metodą simpleks. Drugim celem szczegółowym jest zbadanie literatury dotyczącej badanej problematyki. Badaniem zostało objęte

1 GUS, Energia ze źródeł odnawianych w 2017r. Główny Urząd Statystyczny [dostęp 2.09.2019], https://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/srodowisko-energia/energia/energia-ze-zrodel-odnawialnych-w-2017-roku,10,1.html

2 R.W Andrews, The Effects of Snowfall on Solar Photovoltaic Performance. Solar Energy nr 92, 2013, s. 84-97.

3 J. Penc: Decyzje w zarządzaniu. Wydawnictwo Profesjonalnej Szkoły Biznesu, Kraków 1995, s. 125.

4 H.A. Simon, Decision making and problem solving. „Interfaces", Vol. 17, No. 5, 1987, s. 11-31.

przedsiębiorstwo zajmujące się produkcją paneli solarnych na terenie Polski. W analizie zostały wykorzystane dane wewnętrzne przedsiębiorstwa. Autorka dokonała przeglądu literatury krajowej jak i zagranicznej dla badanej tematyki. Ostatnia cześć artykułu ma charakter praktyczny, gdzie przedstawiono rozwiązanie problemu decyzyjnego na przykładzie przedsiębiorstwa produkującego panele solarne. Część teoretyczna stanowi bazę wiedzy umożliwiającej zrozumienie zaprezentowanej w części empirycznej analizy.

Wybrane aspekty badań operacyjnych

Określenie badania operacyjne jest dosłownym tłumaczeniem angielskiego pojęcia Operations Research, które można najlepiej przetłumaczyć jako „analiza operacji”[5].

W badaniach operacyjnych chodzi bowiem o analizę i dokładne określenie przy użyciu metod matematycznych zjawisk i procesów zachodzących w przedsiębiorstwie. W badaniach operacyjnych stosuje się analizę matematyczną, szuka się podstawowych zasad prowadzenia działań i dochodzi do wniosków o prawdopodobnych wynikach różnorodnych działań. Podejmując pod rozważania zagadnienie badań operacyjnych dostrzegalne jest, że sposób definiowania tego aspektu przez określonych badaczy sprowadza się do uogólnień. Przedstawiciel literatury zagranicznej, H. Wagner badania operacyjne określa jako naukową metodę rozstrzygnięcia problemów z obszaru podejmowania decyzji menadżerskich[6]. Natomiast P.M. Morse i G.E. Kimball stwierdzają, że badania operacyjne to naukowa metoda zasilająca decydentów w ilościowe ujęcie rozpatrywanej lub syntetyzowanej sytuacji lub zjawiska, przedstawiających przedmiot zainteresowania tych jednostek[7]. W badaniach operacyjnych wiele problemów przedstawianych jest w postaci modeli liniowych, czyli takich, w których zmienne decyzyjne występują w pierwszej potędze[8]. Różne źródła definiują pojęcie badań operacyjnych, przykładowo[9]:

- S. Piasecki, „badania operacyjne to teoria działania zespołów, mająca na celu ulepszenie organizacji kierowania ich działaniem…,
- R.T. Eddison, „badania operacyjne są w zasadzie zastosowaniem metodycznej analizy i logicznego myślenia do rozważania różnych możliwych kierunków działania”,
- Wielka Encyklopedia Powszechna definiuje badania operacyjne jako „wyznaczenie optymalnych rozwiązań różnorodnych problemów, głównie technicznych, organizacyjnych, ekonomicznych i wojskowych za pomocą zespołu metod matematyczno-statystycznych”,
- A. Banasiński uważa, że badania operacyjne to przedstawienie optymalnych rozwiązań różnorodnych problemów, głównie technicznych, organizacyjnych, ekonomicznych i wojskowych za pomocą zespołu metod matematyczno-statystycznych,
- J.L. Kulikowski określa badania operacyjne jako metodę racjonalnego zarządzania lub kierowania z wiedzą matematyczną w głowie i nowoczesnymi środkami obliczeniowymi pod ręką.

Program liniowy

Początkiem analizy problemu jest wyznaczenie rozwiązania programu liniowego. Rozwiązanie optymalne programu liniowego umożliwia podjęcie trafnej decyzji. Równocześnie jednak może stanowić punkt wyjścia do analizy, jak na przykład zmiany parametrów modelu (spowodowane modyfikacjami warunków działania przedsiębiorstwa), które mogą oddziaływać na rozwiązanie optymalne. P. Drucker określił kilka warunków, które mogą wpłynąć na podejmowanie trafnych decyzji: precyzyjne zdefiniowanie problemu, okre-

[5] W. Radzikowski, Badania operacyjne w zarządzaniu. Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1994, s. 6-11.

[6] H. Wagner, Badania operacyjne: zastosowania w zarządzaniu. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne. Warszawa, 1980, s. 34.

[7] G. H. Mitchell, Badania operacyjne, metody i przykłady. Wydawnictwa Naukowo - Techniczne. Warszawa, 1977, s. 23-29.

[8] J. Hozer, Zastosowanie programowania matematycznego w ekonomii. Szczecin: Wydawnictwo Naukowe US, 1998, s. 54.

[9] Z. Tarapata, Wybrane zagadnienia badań operacyjnych [dostęp 7.09.2019], http://tarapata.strefa.pl/p_wybrane_zagadnienia_badan_operacyjnych/download/wzbo-wyklad%20nr%201.pdf

ślenie elementów korzystnych dla przedsiębiorstwa, przedstawienie planów działania, odpowiedzialność za decyzje i komunikację, zwiększona uwaga na możliwościach zamiast przeszkodach, produktywne spotkania zespołowe[10]. Badanie wpływu zmian wartości parametrów na rozwiązanie optymalne programu liniowego nosi nazwę analizy wrażliwości lub analizy post optymalizacyjnej[11]. Rozwiązywanie problemów decyzyjnych formułowane jest za pomocą siedmiu elementów[12]:

1. Rozpoznanie i sformułowanie problemu (celu decyzyjnego).
2. Przedstawienie dopuszczalnych rozwiązań (wariantów).
3. Zdefiniowanie kryteriów oddziałujących na analizę i wybór rozwiązań (wariantów).
4. Ocena poszczególnych rozwiązań w odniesieniu do wariantów.
5. Wybór najlepszego rozwiązania.
6. Zainicjowanie wybranego rozwiązania.
7. Ocena efektów wdrożenia i określenie, czy problem został rozwiązany w zadowalający sposób.

Metoda simpleks

Istnieje wiele problemów decyzyjnych, które można przedstawić poprzez programowanie liniowe, tzn. modelu, w którym zarówno warunki ograniczające jak i funkcja celu są funkcjami liniowymi. Powszechną metodą dążącą do rozwiązania zadań programowania liniowego jest algorytm simpleks – procedura iteracyjna, która jest wykorzystywana przez oprogramowania komputerowe[13]. W praktyce najwięcej problemów sprawia wyróżnienie istotnych cech sytuacji decyzyjnej i ujęcie ich w modelu[14]. Metoda Simpleks (1947–1949) opracowana przez matematyka Georga Dantziga to iteracyjna metoda[15] rozwiązywania zadań programowania liniowego za pomocą kolejnego polepszania (optymalizacji) rozwiązania. Nazwa metody pochodzi od simpleksu, czyli otoczki wypukłej zbioru (n+1) elementowego w przestrzeni **n** wymiarowej[16]. W momencie wystąpienia w zadaniach dwóch zmiennych decyzyjnych, można je rozwiązać metodą geometryczną, zwłaszcza gdy w modelu występuje więcej niż dwie zmienne decyzyjne, lecz tylko dwa ograniczenia, można rozwiązywać wykorzystując zależności pomiędzy programem pierwotnym i dualnym.

Algorytm Simpleksu

W algorytmie simpleksowym można wyodrębnić dwa podstawowe elementy. Pierwszy odnosi się do wskazania rozwiązania bazowego dopuszczalnego. Można je osiągnąć wprowadzając do modelu dodatkowe zmienne decyzyjne. Drugi element to „poprawianie" w drodze kolejno przeprowadzonych iteracji rozwiązania bazowego dopuszczalnego, aż do osiągnięcia rozwiązania optymalnego, przy założeniu, że takie rozwiązanie istnieje. Istota algorytmu simpleks polega na badaniu kolejnych rozwiązań bazowych programu liniowego w postaci kanonicznej w taki sposób, że można znaleźć dowolne rozwiązanie bazowe programu, sprawdzając czy jest ono optymalne[17]. W przypadku kiedy rozwiązanie nie jest optymalnie, konstruujemy następne rozwiązanie bazowe lepsze (lub przynajmniej nie gorsze od poprzedniego). Działanie kończy się w momencie stwierdzenia, że obecne rozwiązanie bazowe jest optymalne, tzn. nie można go

[10] P.F. Drucker, What makes an effective executive. „Business Harvard Review", Vol. 82, No. 6, 2004, s. 58-63.

[11] J. Józefowska, Badania operacyjne i teoria optymalizacji, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2012, s. 72-77.

[12] A. Prusak, P. Stefanów, AHP- analityczny proces hierarchiczny. Budowa i analiza modeli decyzyjnych krok po kroku, Wydawnictwo C.H. Beck, Rzeszów, 2014, s.18.

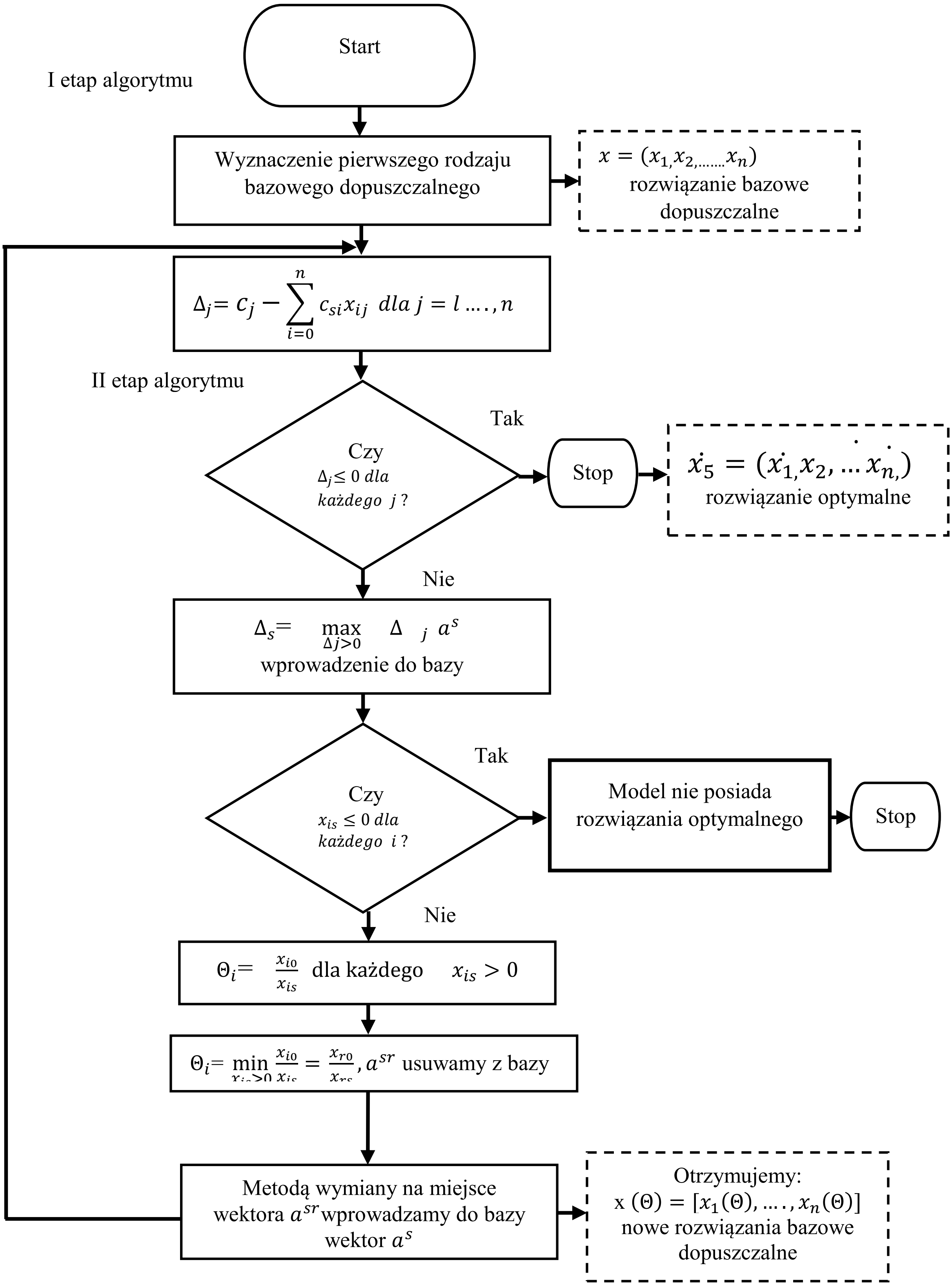
[13] Z. Jędrzejczyk, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz, Badania operacyjne w przykładach i zadaniach. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1996, s. 41-50.

[14] W. Sikora, (red.) Badania operacyjne. Warszawa: PWE, 2008, s.18-23.

[15] Iteracja - czynność powtarzania tej samej operacji w pętli z góry określoną liczbę kilku razy, aż do spełnienia określonego warunku, [dostęp 6.08.2019], https://pl.wikipedia.org/wiki/Iteracja

[16] A. P. Wojda, Wykłady z programowania liniowego, Wydział Matematyki Stosowanej AGH, Warszawa, s. 13-65. [dostęp 2.09.2019] http://wms.mat.agh.edu.pl/~wojda/Pl3.pdf

[17] Ł. Kowalik, Algorytm simplex i dualność [dostęp 2.09.2019] https://www.mimuw.edu.pl/~kowalik/teach/algorytmika/simplex.pdf



Rys.1. Schemat blokowy metody simpleks dla modelu, w którym funkcja celu jest maksymalizowana

Źródło: Opracowanie własne na podstawie fragmentów wykładu Marka Glinka[18].

[18] M. Glinka. *Badania operacyjne* (fragmenty wykładu), s.4. [dostęp 2.09.2019], https://docplayer.pl/17490324-Badania-operacyjne-fragmenty-wykladu-dr-inz-marek-glinka.html

poprawić. Algorytm simpleks jest procedurą etapową (patrz rys. 1), a wyniki poszczególnych etapów zestawia się w kolejnych tablicach simpleks.

Jak można zauważyć z algorytmu na każdym etapie metody simpleks możliwe są następujące trzy zdarzenia:

$\Delta_j \leq 0$ dla każdego j=1,2,..,n to rozwiązanie bazowe dopuszczalne jest optymalne.

$x_{is} \leq 0$ dla każdego i=1,2,..,n to model nie posiada rozwiązania optymalnego.

Istnieje $\Delta_s > 0$ istnieje $x_{is} > 0$ to można uzyskać nowe rozwiązanie bazowe dopuszczalne.

Algorytm simpleks daje możliwość ewoluowania z jednego rozwiązania bazowego do następnych, zazwyczaj coraz to lepszych opierając się na wartości funkcji celu. Iteracje prowadzone są aż do otrzymania rozwiązania optymalnego przy założeniu, że ono istnieje. W części empirycznej analizy, został podany przykład modelu matematycznego opisującego sytuację decyzyjną, w której przedstawiono rozwiązanie optymalne.

Przykład empiryczny

Literatura przedmiotu wskazuje, że w organizacjach prywatnych procesy decyzyjne przebiegają zdecydowanie łagodniej i spokojniej niż w sektorach publicznych[19]. Przykładem analizy jest przedsiębiorstwo produkcyjne, które posiada dwa różne modele paneli solarnych: M_1 i M_2. Ograniczeniem w procesie produkcji jest dostępność trzech półproduktów na rynku europejskim: P_1, P_2, P_3. W tabeli 1 podano jednostkowe nakłady komponentów na produkcję wyrobów, zapasy półproduktów oraz ceny wyrobów. Przedsiębiorstwo dąży do ustalenia rozmiarów produkcji paneli solarnych M_1 i M_2 (patrz tab. 1), które gwarantują maksymalny przychód ze sprzedaży przy dostępnych półproduktach na rynku europejskim.

Tabela 1. Zużycie półproduktów

Półprodukty	Zużycie półproduktu w sztukach na 1 szt. Modelu		Zapas półproduktów w szt.
	M_1	M_2	
P_1	2	1	1000
P_2	3	3	2400
P_3	1,5		600
Cena PLN	30	20	

Źródło: Opracowanie własne.

W modelu matematycznym opisującym przedstawioną sytuację decyzyjną występują dwie zmienne decyzyjne x_1 oznacza wielkość produkcji modelu M_1, a x_2 to wielkość produkcji modelu M_2. Model jest następujący[20]:

$$30\,x_1 + 20x_2 \rightarrow \text{MAX},$$
$$2x_1 + x_2 \leq 1000$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 2400$$
$$1{,}5x_1 \quad \leq 600$$
$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

[19] P. C. Nutt: Comparing Public and Private Sector Decision-Making Practices. „Journal of Public Administration Research and Theory", No. 16, 2005, s. 289–318.

[20] Z. Jędrzejczyk, K. Kukuła, J. Skrzypek, A. Walkosz, *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1996 s. 41–50.

W modelu występują tylko dwie zmienne decyzyjne[21], a zatem $x_1 = 200$, $x_2 = 600$, $F(x_1;x_2)$, czyli produkując 200 szt. modelu M_1 i 600 szt. modelu M_2 przedsiębiorstwo uzyska maksymalny – przy istniejących zapasach surowców – przychód ze sprzedaży wynoszący 1800 zł.

Rozwiązanie modelu za pomocą algorytmu simpleks. Sprowadzenie zadania do postaci kanonicznej dodając **zmienne swobodne**, x_3, x_4 i x_5, a zatem:

$$
\begin{aligned}
30x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &\rightarrow \max \\
2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 1000, \\
3x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \qquad &= 2400, \\
1{,}5\,x_1 \qquad\qquad + x_5 &= 600.
\end{aligned}
$$

Zmienną swobodną x_3 można interpretować jako niewykorzystany zasób surowca P_1, zmienną x_5 – jako niewykorzystany zasób P_3 (patrz tab. 2).

Tabela 2. Tablica simpleksowa dla początkowego rozwiązania bazowego – współczynniki układu warunków ograniczających

C_b	C_j	30	20	0	0	0	Rozwiązanie (b_1)
	Zmienne bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	2	1	1	0	0	1000
0	x_4	3	3	0	1	0	2400
0	x_5	1,5	0	0	0	1	600
	z_j	0	0	0	0	0	0
	c_j-z_j	30	20	0	0	0	

Źródło: opracowanie własne na podstawie Jędrzejczyk, Z., Badania operacyjne w przykładach i zadaniach.

Wartości z_j dla poszczególnych zmiennych (kolumn) tablicy można obliczyć jako iloczyny współczynników odpowiadających poszczególnym zmiennym przez współczynniki z funkcji celu dla zmiennych bazowych czyli $z_j = \sum a_{ij} a_{bj}$ a zatem np. dla dla $x_{1:} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1{,}5 \cdot 0 = 0$; $c_1 - z_1 = 30 - 0 = 30$, dla $x_2 : z_{2;} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$; $c_2 - x_2 = 20 - 0 = 20$

Poszczególne elementy zapisu macierzowego zadania są następujące:

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1{,}5 & 0 \end{bmatrix},\ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix},
$$

$$
C = [30\ 20\ 0\ 0\ 0],\ X_b = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix},\ C_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

W przypadku maksymalizacji funkcji celu do kolejnego rozwiązania bazowego wchodzi zmienna o największej wartości kryterium simpleks (czyli największej wartości w tzw. wierszu zerowym $c_1 - z_j$). Aby ustalić, w miejsce której z dotychczasowych zmiennych bazowych ją wprowadzić, autorka podzieliła wartości zmiennych bazowych przez współczynniki stojące przy wprowadzanej zmiennej w aktualnej tablicy simpleksowej i wybrała zmienną, dla której ten iloraz jest najmniejszy. Tak więc w drugiej iteracji do bazy wchodzi zmienna $x_1[\max(c_1 - z_j) = c_1 - z_j = 30]$. Spośród trzech ilorazów: $1000:2 = 500$, $2400:3 = 800$ i $600:1{,}5 = 400$ najmniejszy odpowiada zmiennej x_5. W drugiej tablicy simpleksowej zmiennymi bazowymi są x_3, x_4 i x_1, a poszczególne elementy tej tablicy można obliczyć stosując wzory macierzowe, autorka przedstawiła w tabeli 3[22].

[21] Ibidem, s. 46.
[22] Ibidem, s. 43.

Tabela 3. Wzory macierzowe

Zmienne bazowe	C		Rozwiązanie
x_b	$B^{-1}A$,	B^{-1}	B^{-1b}
z_j	$C_b^T B^{-1} A$,	$C_b^T B^{-1}$	$C_b^T B^{-1b}$
	$C - C_b^T B - 1\ A$	$-C_b^T B^{-1}$	

Źródło: Badania operacyjne Jędrzejczyk, Z., Badania operacyjne w przykładach i zadaniach.

B^{-1b}-> wartości zmiennych bazowych

$C_b^T B^{-1b}$-> wartość funkcji celu

Dla takiej bazy macierz B (macierz współczynników stojących przy aktualnych w danej interakcji zmiennych bazowych w I tablicy simpleksowej) ma postać:

$$B=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1{,}5 \end{bmatrix} \end{array}, \text{ a jej wyznacznik } \det B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1{,}5 \end{bmatrix}, = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1{,}5 \end{vmatrix} = 1{,}5;$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1{,}5}\ I = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{r} = \frac{1}{1{,}5} \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0 & -2 \\ 0 & 1{,}5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \leftarrow$$ Elementy odpowiadające kolumnom X_3, X_4, X_5 w II tablicy simpleksowej

Za pomocą rachunku macierzowego autorka obliczyła pozostałe elementy tabl. 4 (II tablicy simpleksowej, a mianowicie:

$$B^{-1}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1{,}5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \{$$ Elementy odpowiadające kolumnom x_1, x_2 w II tablicy simpleksowej

$$B^{-1}\ b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 1200 \\ 400 \end{bmatrix} \leftarrow$$ wektor wartości zmiennych bazowych,

$$C_b^T B^{-1} A = [\ 0\ 0\ 30] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [30\ 0] \leftarrow \{$$ Elementy wiersza z_j odpowiadające kolumnom x_1, x_2

$$C_b^T B^{-1} = [\ 0\ 0\ 30] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = [0\ 0\ 20] \leftarrow \{$$ Elementy wiersza z_j; x_3, x_4, x_5

$$C_b^T B^{-1} b = [0\ 0\ 30] = \begin{bmatrix} 200 \\ 1200 \\ 400 \end{bmatrix} = 12000 \leftarrow$$ wartość funkcji celu

Drugą tablicę simpleksową przedstawiono w tabeli 4.

Tabela 4. Tablica II simpleksowa

C_b	C_j	30	20	0	0	0	Rozwiązanie
	Zmienne bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	1	1	0	$-\frac{4}{3}$	200
0	x_4	0	3	0	1	–2	1200
30	x_1	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	400
	z_j	30	0	0	0	0	12000
	c_j-z_j	0	20	0	0	–20	

Źródło: Opracowanie własne na podstawie *Jędrzejczyk, Z., Badania operacyjne w przykładach i zadaniach.*

W iteracji II do bazy wchodzi zmienna x_2 $[\max\{\bar{c_j}\ z_j\}= c_2{}_-z_2= 20]$ w miejsce $x_3[\min\{200{:}1;\ 1200{:}3\}= 200]$[1], co odpowiada wierszowi x_3. W tabeli 5 autorka przedstawiła trzecią tablicę simpleksową.

Tabela 5. Tablica III simpleksowa

C_b	C_j	30	20	0	0	0	Rozwiązanie
	Zmienne bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
20	x_2	0	1	1	0	$-\frac{4}{3}$	200
0	x_4	0	0	–3	1	2	600
30	x_1	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	400
	z_j	30	20	20	0	$-\frac{20}{3}$	16000
	c_j–z_j	0	0	–20	0	$\frac{20}{3}$	

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Jędrzejczyk, Z., *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach.*

Rozwiązanie nadal nie jest optymalne, ponieważ w wierszu zerowym występuje jeszcze element dodatni. Wprowadzając zatem zmienną $x_5((C_2 - z_5) = \frac{20}{3} > 0)$ do kolejnej bazy autorka zwiększyła jeszcze wartość funkcji celu. W kolejnej IV iteracji do bazy weszła zmienna x_5 w miejsce x_4 $[\min\{600{:}2;\ 400{:}\ 2/3\} = 300$, co odpowiada wierszowi x_4]. Poniżej została przedstawiona IV tablica simpleksowa (patrz tab. 6). W jej wierszu zerowym nie występują już liczby dodatnie, **a więc rozwiązanie jest optymalne.**

Tabela 6. Tablica IV simpleksowa

c_b	C_j	30	20	0	0	0	Rozwiązanie
	Zmienne bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
20	x_2	0	1	−1	$\frac{2}{3}$	0	600
0	x_5	0	0	−1,5	0,5	0	300
30	x_1	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200
	z_j	30	20	10	$\frac{10}{3}$	0	18000
	c_j- z_j	0	20	−10	$-\frac{10}{3}$	0	

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Jędrzejczyk, Z. Badania operacyjne w przykładach i zadaniach.

W rozwiązaniu (ostatnia kolumna każdej tablicy) pod wartościami zmiennych bazowych podana jest wartość funkcji celu w danej iteracji. W analizowanym przykładzie w kolejnych iteracjach wartość funkcji celu wzrasta od zera w I interakcji do 1800 w ostatniej.

Poniżej obliczono raz jeszcze elementy tablicy IV, posługując się rachunkiem macierzowym. Zmienne bazowe w ostatniej iteracji (a tym samym w rozwiązaniu zadania), to x_2, x_5 i x_1, zatem $x_b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix}$, a macierze B i B^{-1} mają postać (wyznacznik macierzy B jest równy 3):

$$B^{-1}A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_5 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \end{bmatrix} \end{array}, \quad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -4{,}5 & 3 \\ 2 & 1{,}5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{r} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1{,}5 & -0{,}5 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

A więc:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1{,}5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2400 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 + 1600 + 0 \\ -1500 + 1200 + 600 \\ 1000 - 800 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$c_b = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$, a zatem $C_b^T B^{-1} A = [20\ 0\ 30] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [30\ 20]$

$$C_b^T B^{-1} = [20\ 0\ 30] \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & \frac{10}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C - C_b^T B^{-1} A = [30\ \ 20] - [30\ \ 20] = [0\ 0]\ -c_b^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & \frac{10}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$C_b^T B^{-1} b = [20\ 0\ 30] \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix} = 1200+0+6000=18000 \leftarrow$ wartość funkcji celu.

Podsumowując optymalne rozwiązanie zadania to:

$$x_b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\dot{x_1} = 200$$
$$\dot{x_2} = 600$$
$$F(\dot{x_1}, \dot{x_2}) = 18000$$

Wartość zmiennej $\dot{x_5} = 300$ oznacza, iż przy takim rozwiązaniu zostaje niewykorzystany zasób półproduktów P2 w ilości 300 sztuk.

Wnioski

Przedstawiony w artykule problem decyzyjny dotyczący produkcji paneli solarnych został rozwiązany. W zagadnieniu optymalnej ilości półproduktów, podejmujący decyzję musi sprecyzować swoje wymagania co do ilości podstawowych półproduktów, które należy zakupić celem uzyskania produktu końcowego jakim jest panel fotowoltaiczny. Ponadto należy pamiętać o zachowaniu jak najmniejszych kosztów związanych z zakupem półproduktów. Należy zwrócić uwagę, że występująca problematyka dostępności półproduktów może obejmować zapotrzebowanie na dany rodzaj panelu fotowoltaicznego. W przypadku tego zagadnienia konieczne jest wyznaczenie niezbędnej ilości półproduktów, które trzeba nabyć mając na uwadze poniesienie kosztów zakupu. Podejmujący decyzję musi określić rodzaj produktu, który ze wszystkich możliwych do wyprodukowania, posiadałby najniższe koszty wytworzenia. Dzięki optymalnemu rozwiązaniu udało się określić wyniki, które pomogą w podejęciu decyzji w przedsiębiorstwie produkcyjnym. Podjęte działania miały na celu usprawnienie procesu wykorzystania jak największej ilości półproduktów przy jak najniższych nakładach finansowych, aby wynik ekonomiczny był jak najkorzystniejszy. Przedstawione rozwiązania mogą stanowić podstawę do dalszych analiz związanych z działalnością produkującą panele solarne.

Bibliografia

- Andrews R.W., Pollard A., The Effects of Snowfall on Solar Photovoltaic Performance. Solar Energy 92, 2013.
- Drucker P., What makes an effective executive. „Business Harvard Review", Vol. 82, No. 6, 2004.
- Glinka M., Badania operacyjne (fragmenty wykładu) [dostęp 2.09.2019], https://docplayer.pl/17490324-Badania-operacyjne-fragmenty-wykladu-dr-inz-marek-glinka.html
- Hozer J., Grzesiak S., Zastosowanie programowania matematycznego w ekonomii. Szczecin: Wydawnictwo Naukowe US. 1998.
- Jędrzejczyk Z., Kukuła K., Skrzypek J., Walkosz A. *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1996.
- Józefowska J., *Badania operacyjne i teoria optymalizacji,* Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2012.
- Kowalik Ł., *Algorytm simplex i dualność* [dostęp 2.09.2019], https://www.mimuw.edu.pl/~kowalik/teach/algorytmika/simplex.pdf
- Mitchell G., *Badania operacyjne, metody i przykłady*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa, 1977.
- Nutt: P.C., *Comparing Public and Private Sector Decision-Making Practices*. Journal of Public Administration Research and Theory" No. 16, 2005.
- Penc J., *Decyzje w zarządzaniu*. Wydawnictwo Profesjonalnej Szkoły Biznesu, Kraków 1995.
- Prusak A., Stefanów P., *AHP – analityczny proces hierarchiczny. Budowa i analiza modeli decyzyjnych krok po kroku*, Wydawnicteo C.H. Beck, Reszów, 2014.
- Radzikowski W., *Badania operacyjne w zarządzaniu*. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1994.

- Sikora W., *Badania operacyjne*. Warszawa: PWE, 2008.
- Simon H., *Decision making and problem solving*. „Interfaces", Vol. 17, No. 5, 1987.
- Wagner H., *Badania operacyjne: zastosowania w zarządzaniu*. Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne. Warszawa, 1980.
- Główny Urząd Statystyczny „Energia ze źródeł odnawianych w 2017 r." [dostęp 2.09.2019], https://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/srodowisko-energia/energia/energia-ze-zrodel-odnawialnych-w-2017-roku,10,1.html
- Tarapata Z., *Wybrane zagadnienia badań operacyjnych [*dostęp 2.09.2019], http://tarapata.strefa.pl/p_wybrane_zagadnienia_badan_operacyjnych/download/wzbo-wyklad%20nr%201.pdf
- Wikipedia [dostęp 2.09.2019], https://pl.wikipedia.org/wiki/Iteracja
- Wojda A. P., *Wykłady z programowania liniowego*, Wydział Matematyki Stosowanej AGH, Warszawa, [dostęp 2.09.2019], http://wms.mat.agh.edu.pl/~wojda/PI3.pdf

Simplex method exemplified by the decision making process of a solar panel manufacturer

Summary

The search for renewable energy sources and enormous production of CO 2 have resulted in the widespread use of eco solutions. PV panels, solar collectors and heat pumps are becoming increasingly popular and the amount of power generated by renewable sources is growing [GUS 2017]. 1 The author of the article applied the simplex algorithm in order to determine the production volume of solar panels to ensure maximum sales revenues with the existing stock of intermediate products. The decision making challenge was resolved based on the data of a solar panel manufacturer. Since simplex algorithm is very labour-consuming the author focused on the presentation of interdependencies among four simplex tableaux by employing the matrix notation of linear programming. The simplex method described in the article is considered to be an important device for resolving linear programs. It generates a series of permissible solutions Xk so that each consecutive solution is better than the previous one.

Keywords

simplex method, decision-making problems, decisions, solar panel