



MAŁGORZATA MAKIEWICZ

Model kultury matematycznej ucznia

Student's Mathematical Culture Model

Doktor habilitowany, Uniwersytet Szczeciński, Wydział Matematyczno-Fizyczny, Instytut Matematyki, Zakład Dydaktyki Matematyki, Polska

Streszczenie

Kultura matematyczna nie odnosi się tylko do pewnej techniki, sprawności czy do posługiwania się formalnym językiem przy dowodzeniu i rozwiązywaniu problemów. W skład kultury matematycznej wchodzi również twórczość i wyobraźnia, właściwe rozumienie pojęć oraz postrzeganie piękna i zarazem użyteczności tej dyscypliny. Celem artykułu jest przedstawienie modelu kultury matematycznej ucznia i pokazanie kilku symptomów tej kultury.

Słowa kluczowe: kultura matematyczna, edukacja matematyczna, twórczość, wyobraźnia, elegancja myślenia, język matematyczny

Abstract

Mathematical culture, does not relate to a certain technique, skill or the ability of using formal language in the process of proving and solving problems. What mathematical culture embraces is also creativity and ingenuity, appropriate understanding of certain ideas as well as perceiving beauty and the usefulness of this discipline at the same time. The aim of this text is to demonstrate Student's mathematical culture model and demonstration of several symptoms of this culture.

Keywords: mathematical culture, mathematical education, creativity, imagination, elegance of thoughts, mathematical language

Wstęp

Matematyka to praktycznie jedyny nauczany w szkole przedmiot formalny. Rzeczywista wyjątkowość edukacji matematycznej dystansuje umiejętności przydatne w życiu codziennym i w pewnych specjalnościach technicznych, ekonomicznych, społecznych na rzecz wartości wyższych niezbędnych w uprawianiu jakiegokolwiek nauki czy dyscypliny życia społecznego.

Matematyka szkolna często postrzegana jest jako przedmiot trudny ze względu na specyficzny język, wielość pojęć, konieczność precyzji rozumowania. Słaby nauczyciel *realizuje program nauczania* oparty na *podstawie progra-*

mowej. Uczy technik matematycznych, pojęć i algorytmów. Koncentruje się na technicznej stronie matematyki. Paradoksalnie jego uczniowie (o ile trening będzie prowadzony rzetelnie) osiągają dość dobre wyniki na egzaminach zewnętrznych. Nauczyciel-mistrz koncentruje się na uczniu. Pomaga mu w aktywnym budowaniu wiedzy. Poprzez konflikty poznawcze, na drodze negocjowania znaczeń omawianych pojęć wdraża do samodzielności poznawczej, do otwartego dostrzegania i formułowania problemów, do ich rozwiązywania możliwie najlepszym (najbardziej eleganckim) sposobem. W ten sposób uczy analizowania i syntezy problemu, abstrahowania, właściwego oszacowania wyniku, doceniania pełnowartościowej argumentacji. Wychowuje do kultury matematycznej. Uczeń nauczyciela-mistrza zostaje doskonałym prawnikiem, analitykiem, kierowcą. Wyposażony jest bowiem w uniwersalne wartości oferowane przez matematykę. „Społeczeństwo wiedzy oczekuje od absolwentów szkół zdolności do myślenia krytycznego, umiejętności filtrowania, porządkowania i sprawdzania wiarygodności informacji” (Makiewicz, 2010a, s. 181). Na szczęście słyszymy coraz więcej postulatów typu: „na lekcjach matematyki, oprócz konkretnych narzędzi i metod, młodzi ludzie powinni się uczyć logicznego myślenia, umiejętności wyciągania wniosków z danych, czyli myślenia dedukcyjnego. Tego właśnie uczy rozwiązywanie zadań z geometrii czy równań z logarytmami i sinusami. One uczą wykorzystywania danych, zmuszają do logicznego myślenia na abstrakcyjnych przykładach” (Ciesielski, Pogoda, 2013, s. 44).

Kultura matematyczna jako fenomen

Na pożółkłych kartach *Kultury* Czarnowskiego czytamy, że „kultura jest dobrem zbiorowym i zbiorowym dorobkiem, owocem twórczego i przetwórczego wysiłku niezliczonych pokoleń” (Czarnowski, 1946, s. 4). Kulturę rozumiemy i definiujemy wielorako. Mając na myśli fenomen kultury, bierzemy pod uwagę zarówno normy przyjęte w określonym czasie, terytorium, uwarunkowaniach, materialne przejawy myśli i talentu ludzkiego (dzieła sztuki, wytwory sztuk pięknych i muzyki, intelektu), jak i związki zachodzące między ludźmi oraz procesy do nich prowadzące. Szkoła, edukacja, związki ujawniające się podczas procesu wychowania to również „część kultury, istotny czynnik ją kształtujący. Kultura obejmuje wytwarzanie i przypisywanie znaczeń rzeczom w konkretnych sytuacjach i w ten sposób akcentuje swój nadorganiczny charakter” (Bruner, 2006, s. 16).

Kultura matematyczna zrodziła się na tradycjach starogreckich. Przez wieki kształtowała się w poszanowaniu prawdy, klarowności rozumowania, wnioskowania. Bez wątpieniamatematyka zawsze„odgrywała wielką rolę wśród elity intelektualnej. Struktura nadana wówczas matematyce narzuciła innym dyscyplinom sposób ich uprawiania. Śledząc rozwój myśli matematycznej, oglądamy rozwój techniki, cywilizacji” (Duda, 1990, s. 27). Do dzisiaj mamy kłopoty

z dobrym wyznaczeniem pola semantycznego kultury matematycznej: „zarówno pojęcie kultury, jak – w szczególności – kultury matematycznej – to pojęcia bardzo względne, a na pewno trudne do zdefiniowania” (Więśław, 1998, s. 27).

Dziś kultura matematyczna unosi się ponad techniką, sprawnością, posługiwaniem się językiem formalnym, dowodzeniem czy rozwiązywaniem problemów. „W skład kultury matematycznej wchodzi również twórczość i wyobraźnia geometryczna, dobre rozumienie pojęć oraz postrzeganie piękna tej dyscypliny. Kultura matematyczna polega także na tym, że zauważa się pewne idee matematyczne, problemy, a nawet twierdzenia w otaczającym nas świecie, w przyrodzie martwej, ożywionej, w dziełach rąk ludzkich” (Makiewicz, 2010b, s. 9).

Kotarbiński (1970, s. 99) określił komponenty logiczno-filozoficznej kultury człowieka: „uporządkowane operowanie terminami ontologicznymi, świadomość istoty oznaczania i nazywania stosunków semiotycznych, biegłość komunikacyjna, umiejętność definiowania i poprawnego uzasadniania wniosków”. Ze względu na matematyczny wymiar kultury warto uwzględnić również: „posługiwanie się językiem matematycznym wraz z dostrzeganiem jego różnic względem struktury logicznej języka naturalnego, wykorzystywanie praw i reguł rozumowania w celu lepszego zrozumienia pojęć, matematyzację i interpretację oraz swobodne posługiwanie się obiektami abstrakcyjnymi” (Siwek, 2005, s. 170). Ważny jest proces konstruowania kultury matematycznej w umyśle innego człowieka: „Młode pokolenie tworzy od nowa kulturę, z którą ma żyć. Wrasta w nią, a przy tym tworzy nowe formy – np. wiedzy. Wiedzy nie przekazujemy. Konstruujemy ją odtwórczo lub twórczo” (Freudenthal, 1963, s. 14).

Przy określeniu modelu kultury matematycznej ucznia uwzględniono powstały na gruncie krytyki koncentracji wokół poszczególnych działów matematyki: analizy, algebry, arytmetyki, geometrii, teorii mnogości, schemat Kuriny. Do kanonu Kuriny (1991, s. 30) należą:

1. Zdobycie sprawności matematycznej.
2. Zrozumienie ciągłego przejścia w poszczególnych dyscyplinach matematyki między matematyką-nauką i matematyką-przedmiotem nauczania.
3. Zrozumienie języka matematyki.
4. Umiejętność wybierania odpowiednich metod przy rozwiązywaniu zadań.
5. Posiadanie dobrej wyobraźni geometrycznej.
6. Opanowanie techniki obliczeń.
7. Opanowanie umiejętności przeprowadzania dowodów.
8. Opanowanie umiejętności wprowadzania pojęć.
9. Możliwość uprawiania w pewnym stopniu twórczości matematycznej.
10. Postrzeganie piękna matematyki.

Okazuje się jednak, że niektórych czynników wskazanych przez Kurinę nie można w pełni odnieść do warunków realizowanych w klasie szkolnej. Zrozumienie przejścia między matematyką-nauką i matematyką-przedmiotem nauczania

nia, przeprowadzanie poprawnych dowodów czy postrzeganie matematycznego piękna dedykowane jest przede wszystkim zawodowym matematykom. Do ich zgłębienia potrzeba ogólnej wiedzy matematycznej oraz wrażliwości na sztukę. Na trud i czas konieczny do osiągnięcia pewnej biegłości w matematyce wskazują Ciesielski i Pogoda (2013, s. 164): w „wyższej matematyce niewiele można zrobić bez solidnego przygotowania. Niektóre osoby chciałyby, jak anegdotyczny król, poznać matematykę w jeden wieczór. Niech spróbują w jeden wieczór nauczyć się obcego języka, na przykład chińskiego”.

Najbardziej zewnętrzna warstwa kultury matematycznej człowieka ujawnia się w podjęciu pewnej aktywności. Może się tak stać na skutek zaciekawienia, postawienia pytania lub konfliktu poznawczego – „coś mi się tu nie zgadza”. Wyrazem tej aktywności jest wyrażenie chęci, podjęcie choćby minimalnej próby zmierzenia się z problemem, gotowość do podjęcia problemu. Kolejna warstwa związana jest ze zrozumieniem sytuacji. Niezbędne jest tu świadome i rozumne posługiwanie się językiem matematyki. Głębsze warstwy są ściśle związane z umiejętnościami i wyobraźnią oraz wykorzystaniem posiadanej wiedzy teoretycznej w sytuacji nowej. Jeszcze głębsze – z interpretacją, refleksją, odważnym przypuszczaniem, generowaniem wielu różnych (i istotnie różnych) odpowiedzi, modyfikowaniem, uzmiennianiem, metaforyzowaniem, jednym słowem – zbliżaniem się do fenomenu twórczości (Makiewicz, 2011, s. 16).

Model kultury matematycznej ucznia ze względu na strukturę i czytelność zachodzących relacji wzorowany został na modelu zdolności kierunkowych Limont (2010, s. 50). Uwzględnia dwie strefy: warunków koniecznych i sprzyjających. Strefa warunków koniecznych obejmuje dwa komponenty niezbędne do podjęcia aktywności matematycznej: posługiwanie się językiem matematyki (w dwóch kierunkach: zrozumienia i interpretacji tekstu matematycznego oraz przekazywania myśli własnych za pomocą matematycznych pojęć, wzorów i formuł) oraz opanowanie podstawowej sprawności matematycznej, czyli wiedzy i umiejętności matematycznych niezbędnych podczas rozwiązywania zadań i prowadzenia matematycznych rozumowań. Warunki te (jako konieczne) wynikają bezpośrednio z faktu opanowania przez ucznia kultury matematycznej.

Warunki sprzyjające kulturze matematycznej ucznia rozumiemy w kategoriach czynników *klimatu dla kreatywności* (Karwowski, 2009, s. 59) obejmującego wspieranie dostrzegania problemów, formułowanie pomysłów, podejmowanie ryzyka, otwartość. Posiadanie rozwiniętej kultury matematycznej pozwala także na „umiejętności zobaczenie w rozważanym problemie nieistniejących obiektów matematycznych, które jednak zdumiewająco skutecznie pozwalają się z tym problemem uporać” (Kordos, 2009, s. 5). Dlatego z perspektywy szkolnej edukacji matematycznej najważniejszymi czynnikami są: wyobraźnia (związana jest ze zdolnością do wytwarzania wyobrażeń obrazowych, werbalnych i logicznych związanych z obiektami matematycznymi oraz z możliwością manipulo-

wania tymi wyobrażeniami), elegancja (związana z umiejętnością dokonania wyboru najlepszej w danych warunkach drogi podczas prowadzonego rozumowania matematycznego) (Aigner, 2003, s. 11–15) oraz twórczość rozumiana w kategoriach Guilforda (1978) i Urbana (1990, s. 99–113), realizująca się na poziomie płynnym lub skryształizowanym (Nęcka, 2001, s. 218), z uwzględnieniem twórczości mini-t (Kaufman, Beghetto, 2009, s. 1–12) traktowanej jako *aktywność rozwojowa* (Limont, 2010a).

Przejawy kultury matematycznej ucznia

Diagnoza przejawów kultury matematycznej ucznia odbywa się zazwyczaj na lekcjach matematyki lub na zajęciach koła matematycznego – podczas rozwiązywania zadań problemowych. Sformułowanie problemu diagnostycznego powinno być jasne i precyzyjne, a jego treść ma stwarzać szansę ujawnienia myślenia dywergencyjnego, wyobraźni, twórczości.

Przykładowo zadanie dotyczące narysowania i nazwania jak największej liczby różnych przekrojów sześcienu dobrze służy ujawnieniu zarówno opanowanego języka matematyki (w dwóch kierunkach: uczeń powinien dobrze zrozumieć polecenie „narysuj przekrój” oraz mieć zdolność nazywania otrzymanych figur płaskich). Zadanie daje również możliwość przeanalizowania wskaźników wyobrażeń obrazowych (liczba różnych przekrojów) i werbalnych (liczba poprawnych nazw przekrojów). „Zadanie to (...) pozwala określić płynność myślenia wyrażoną ilością przedstawień oraz giętkość myślenia wyrażoną liczbą kategorii przedstawień. Można zbadać wzajemne relacje pomiędzy przedstawieniami zaprezentowanymi przez uczniów, odkrywając w ten sposób ścieżkę rozumowania ucznia” (Makiewicz, 2013, s. 178).

Symptomy kultury matematycznej ucznia można dostrzec już w młodszych klasach, gdy uczeń dostrzega błąd w wyniku dodawania następujących pięciu liczb trzycyfrowych: 322, 346, 478, 332, 354. Uczeń protestuje, widząc na tablicy wynik 1733: „Przecież dodawaliśmy same liczby parzyste, więc wynik nie może być liczbą nieparzystą. Gdzieś musi być błąd”. Spostrzeżenie zaliczymy do „eleganckich”, a u jego autora odnotujemy myślenie krytyczne oraz dobrą sprawność i komunikację.

Przykład konstrukcji nowej figury można zaliczyć do przejawów kultury matematycznej ucznia. Podczas lekcji geometrii o figurach podobnych uczeń dokonuje uogólnienia i przeniesienia własności pierścienia kołowego na wielokąty foremne. Zachowując równoległości boków, rysuje trójkąt z wyciętym trójkątem, kwadrat z wyciętym kwadratem itd. Otrzymane figury nazywa *dziurko-kątami*. W ten sposób ujawnia twórczość mini-t, zdolność operowania językiem matematycznym oraz wyobraźnia na poziomie konstrukcyjnym.

Uczennica prezentuje samodzielnie wykonaną fotografię symetrii (fotografia 1). Obraz przedstawia XIX-wieczną kamienicę oraz elewację nowoczesnego bu-

dynku po przeciwnej stronie ulicy. Fotografia zaopatrzona jest autorskim tytułem *Symetria względem czasu*. „Fotografia i jej autorska nazwa stanowi wyraz drogi poszukiwania dodatkowego, pozamatematycznego sensu symetrii. Odbiorca zostaje zachęcony do oddalenia się poza obszar matematyki, do szerszego pojęcia symetrii w architekturze, czasie, budowie materii. Nie tylko jako izometrii przestrzeni, ale przede wszystkim jako harmonii świata” (Makiewicz, 2013, s. 106).



Fotografia 1. Katarzyna Kalkowska, *Symetria względem czasu*
(Międzynarodowy Konkurs Fotograficzny *Matematyka w obiektywie*)

Przykład ten pokazuje, że kulturę matematyczną można rozwijać za pomocą sztuki wizualnej. Prowadzony w Zakładzie Dydaktyki Matematyki WMF US eksperyment pedagogiczny potwierdził skuteczność zastosowania fotografii w nauczaniu matematyki na rozwój wszystkich składników kultury matematycznej: języka matematyki, sprawności, twórczości, wyobraźni oraz matematycznej elegancji (Makiewicz, 2013).

Podsumowanie

Żyjemy w świecie matematycznym, nasza rzeczywistość wymaga matematycznych narzędzi myślenia i rozwiązywania problemów. Krzywych Béziera potrzebuje grafik komputerowy zajmujący się reklamą wizualną, rozkładu Poissona – badacz przyrody, harmonii złotego podziału – architekt, aparatu analizy matematycznej – ekonomista, a fraktali – diagnostyk zajmujący się mutacjami chromosomów lub meteorolog. Widzimy, że zastosowania matematyki znacznie

szerzej nas otaczają i mocniej kształtują naszą rzeczywistość niż rachunki szkolne ćwiczone na lekcjach. Pochodne cząstkowe znalazły zastosowanie w ekonometrii, równania różniczkowe – w elektrodynamice, mechanice, demografii czy chemii i kosmologii, system binarny – w informatyce (Makiewicz, 2013, s. 9). Sensem edukacji matematycznej nie jest jedynie wyposażenie ucznia w wiedzę i matematyczne umiejętności przydatne w innych dziedzinach wiedzy. Matematyka szkolna uczy pozamysłowego wnioskowania, argumentowania oraz abstrahowania od dostrzegalnych zjawisk. Wyposaża ucznia, studenta w uniwersalne narzędzia poznawcze oraz umiejętność operowania bytami abstrakcyjnymi.

Fenomen kultury matematycznej ucznia jest kategorią, która pomaga określić ideał współczesnego kształcenia matematycznego. Ideał przybliżający matematyczne rozumowanie, wzbogacający poziom i zakres interpretowania zjawisk występujących w świecie, wspomagający własną kondycję poznawczą i komunikacyjną, a także potęgę wyobraźni i wewnętrzną chęć tworzenia nowych konstruktów, odkrywania nowych faktów. Wychowanie ucznia do kultury matematycznej ma na celu nawiązanie łączności ze światem nauki. Jest również próbą postulowanego przez Hammonda (1983, s. 28) „uleczenia matematycznej ignorancji oraz zachętą do rozkoszowania się matematycznymi intuicjami”. Prowadzenie ucznia do krainy kultury matematycznej, nauka odkrywania i tworzenia jest pewnego rodzaju zabezpieczeniem poznawczym w samodzielnej drodze przez naukę. To jak ekwipunek, żywność i woda przygotowywane przez matkę na daleką podróż syna. Bo jak mawiał Penrose (1995, s. 468): „umysł zawsze może nawiązać kontakt ze światem, ale postrzegany fragment jest na ogół bardzo mały. Odkrycie matematyczne polega na poszerzeniu pola widzenia”.

Literatura

- Aigner, M. (2003). Die pure Eleganz der Mathematik, Gegenworte. Hefte für den Disput über Wissen. *Grezen der Wissenschaft*, 12, 11–15.
- Bruner, J. (2006). *Kultura edukacji*. Kraków: Universitas.
- Ciesielski, K., Pogoda, Z. (2013). *Królowa bez Nobla. Rozmowy o matematyce*. Warszawa: Demart.
- Czarnowski, S. (1946). *Kultura*. Warszawa: SW Książka.
- Duda, R. (1990). Dyskusja „Co to jest kultura matematyczna?”. *Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie*, 5, 2–4.
- Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben? *Der Mathematikunterricht*, 4, 5–29.
- Guilford, J.P. (1978). *Natura inteligencji człowieka*. Warszawa: PWN.
- Hammond, A.L. (1983). Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura. W: L.A. Steen (red.), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów* (s. 26–49). Warszawa: WNT.
- Kaufman, J.C. Beghetto, R.A. (2009). Beyond Big and Little: The Four C Model of Creativity. *Review of General Psychology*, 13(1), 1–12.
- Karwowski, M. (2009). *Klimat dla kreatywności. Koncepcje, metody, działania*. Warszawa: Difin.
- Kotarbiński, T. (1970). Logika jako szkolny przedmiot pomocniczy. Ze szczególnym uwzględnieniem studiów humanistycznych. *Studia Logika*, XXVI, 99–112.
- Kordos, M. (2009). *Zobaczyć to, czego nie widać, czyli kultura matematyczna w praktyce*. Toruń: Aksjomat.

- Kurina, F. (1991). Kultura matematyczna nauczyciela matematyki. *Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie*, 6, 30–32.
- Limont, W. (2010a). Pedagogika twórczości, czyli edukacja ku twórczości. W: B. Śliwerski, *Pedagogika. Podręcznik akademicki. Subdyscypliny i dziedziny wiedzy o edukacji* (s. 263–289). T. 4. Gdańsk: GWP.
- Limont, W. (2010b). *Uczeń zdolny. Jak go rozpoznać i jak z nim pracować*. Sopot: GWP.
- Makiewicz, M. (2011). *Elementy kultury matematycznej w fotografii*. Szczecin: KMDM US.
- Makiewicz, M. (2010a). Kształcenie u uczniów postawy badacza-odkrywcy poprzez sztukę na przykładzie zajęć koła matematycznego w gimnazjum. *Rocznik Pedagogiczny*, 33, 181–190.
- Makiewicz, M. (2010b). *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli*. Szczecin: Wyd. US.
- Makiewicz, M. (2013). *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*. Szczecin: KMDM US.
- Nęcka, E. (2001). *Psychologia twórczości*. Gdańsk: GWP.
- Penrose, R. (1995). *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*. Warszawa: PWN.
- Siwek, H. (2005). *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*. Warszawa: WSiP.
- Urban, K.K. (1990). Recent Trends in Creativity Research and Theory in Western Europe. *European Journal of High Ability*, 1, 99–113.
- Więśław, W. (1998). Kultura matematyczna a kultura matematyków. *Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie*, 21, 27–31.