Włodzimierz Szkutnik
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

CHAOTYCZNE REAKCJE RYNKÓW FINANSOWYCH – – ASPEKT PROBABILISTYCZNY WYCENY I ZABEZPIECZEŃ PŁATNICZYCH NA RYNKU KAPITAŁOWYM

Wprowadzenie

Właściwe dla prowadzonych rozważań będą modele finansowych kalkulacji na zupełnych i niezupełnych rynkach z zastosowaniem niesamofinansujących się strategii. W takich wypadkach naturalnym ujęciem zagadnienia jest odejście od typowego założenia dotyczącego stochastycznej struktury cen akcji przy modelowaniu stóp zwrotu (ich logarytmów) i rozpatrzenie wariantowego przypadku, w którym nie czyni się założeń dotyczących rozkładu normalnego logarytmów tych stóp. Wymaga to jednak egzemplifikacji modelu finansowego rynku w warunkach statystycznej nieokreśloności, co odpowiada zadaniu modelowania racjonalnego zachowania inwestora. W wypadku niezupełnych rynków rozważone będą kalkulacje opcyjnie i zadania minimalizacji ryzyka.

1. Zupełny rynek i strategie arbitrażowe

W analizach portfelowych uwzględniających ryzyko inwestycyjne rozważa się w formalnym ujęciu model finansowego rynku i inwestycyjne strategie umożliwiające opis ewolucji papierów wartościowych na finansowym rynku. Wystarcza wtedy przyjąć, że jego postać wyrażona jest przez dwa dyskretne stochastyczne równania opisujące aktywa pozbawione ryzyka i aktywa ryzykowne.

Taki model można zapisać w postaci:

$$\Delta B_n = r_n \cdot B_{n-1} \;\; , \quad \Delta S_n = \rho_n \cdot S_{n-1}$$

Dyskretyzacja stochastyczna tych równań wymaga, aby przestrzeń probabilistyczna będąca opisem losowego rozkładu wartości aktywów była generowana przez skończony zbiór zdarzeń elementarnych Ω, przeliczalną rodzinę zdarzeń losowych odpowiadających borelowskiej algebrze zdarzeń $F = F_N, N \in C_+$ – zbiór całkowitych liczb dodatnich. Wprowadzenie oznaczenia dla sum pierwszych n wyrazów (stochastycznych) ciągów $(\rho_n)_{n \in Z_+}$ i $(r_n)_{n \in Z_+}$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} r_k\,, \quad W_n = \sum_{k=0}^{n} \rho_k$$

pozwala sprowadzić równania modelu rynku dyskretnego do postaci stochastycznie ekspotencjalnej:

$$B_n = B_0 \cdot \mathcal{E}_n(T), \quad S_n = S_0 \cdot \mathcal{E}_n(W) \tag{1}$$

Przy takim opisie rynku zakłada się, że $F_n = \sigma\{S_0, \dots, S_n\}$, tj. F_n jest minimalną σ-algebrą, względem której mierzalne są zdarzenia $S_0, \dots, S_n$.

Rynek określony w równaniach (1) nazywany jest powszechnie (*B*, *S*)-rynkiem. W dalszej części dla zapobieżenia niepotrzebnym technicznym trudnościom wywody będą prowadzone dla przypadku jednowymiarowego S_n, i w tym wypadku, jak wynika ze znanych z literatury wyników, najbardziej treściwym modelem (zupełnym) (*B*, *S*)-rynku jest dwumianowy model, jednak wiele wyników jest także adekwatnych w wielowymiarowym wariancie. Okazuje się także, że można uzyskać ogólny model (*B*, *S*)-rynku zakładając tylko dodatnią wartość cen aktywów *B* i *S*. W tym wypadku pojawia się multiplikatywna forma dla *B* i *S*, która znowu prowadzi do rozpatrywanego tutaj modelu (1).

W analizie inwestycji kapitałowych stosowane jest pojęcie tzw. inwestycyjnej strategii, przez którą rozumiany jest stochastyczny dwuwymiarowy ciąg $\pi = (\pi_n(\beta_n, \gamma_n))_{n \in Z_+}$. Elementy $\beta_n \in \mathrm{F}_N$, $\gamma_n \in \mathrm{F}_{N-1}$ tego ciągu interpretowane są jako liczby aktywów bez ryzykownych *B* i z ryzykiem *S* w momencie czasu $n \in Z_+$. Ponadto istotne jest także pojęcie „kapitału” portfela π, którym w myśl przyjmowanego określenia jest stochastyczny ciąg $X^\pi = (X_n^\pi)_{n \in Z_+}$, gdzie $X_n^\pi = \beta_n \cdot B_n + \gamma_n \cdot S_n$.

Na podstawie tych pojęć można wprowadzić klasę samofinansujących się portfeli, przez którą będziemy rozumieć klasę portfeli π oznaczaną przez *SF*, spełniającą warunek:

$$B_{n-1} \cdot \Delta\beta_n + S_{n-1} \cdot \Delta\gamma_n = 0 \tag{2}$$

W tym kontekście można zauważyć, że kapitał samofinansującego się portfela π wyrażony w postaci:

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=0}^{n}(\beta_n \cdot \Delta B_k + \gamma_n \cdot \Delta S_k)$$

jest równoważny warunkowi samofinansującego się portfela (2), gdzie $\Delta B_0 = \Delta S_0 = 0$.

Istotna w stosowaniu strategii inwestycyjnych jest dopuszczalność arbitrażu na rynku akcji. Dlatego w klasie portfeli samofinansujących się SF można wyróżnić te portfele π, które realizują arbitrażową możliwość na rynku akcji w następującym znaczeniu:

$$X_0^\pi = 0,\ X_n^\pi \geq 0$$

dla $n \leq N$ (z prawdopodobieństwem P – prawie na pewno $(P - \text{p.n.p})$ i $X_N^\pi > 0$ z dodatnim prawdopodobieństwem).

Ekonomiczna treść, która tu się przejawia wynika z określenia występowania arbitrażu na rynku. Polega to na możliwości pojawienia zysku z inwestycji bez ryzyka, gdy na rynku występuje arbitrażowy portfel. Klasę takich portfeli oznaczymy przez SF_{arb} i rynek nazwiemy arbitrażowym lub bez arbitrażu, gdy odpowiednio w klasie SF_{arb} występuje chociaż jeden arbitrażowy portfel lub gdy takiego portfela nie ma.

W dalszej części opracowania będą rozważane finansowe kalkulacje na zupełnym rynku, przy niesamofinansujących się strategiach. Prowadzenie takich wywodów wymaga jednak pewnych ścisłych określeń z zakresu probabilistyki i wyprowadzonych na ich bazie własności. Wydaje się, że dla pełnego zrozumienia dalszych rozważań niezbędne jest omówienie chociaż podstawowych pojęć z tego zakresu i podanie znanych wyników z teorii procesów stochastycznych.

2. Martyngałowe miary i arbitraż

W probabilistyce miarę prawdopodobieństwa P^*, równoważną P, nazywa się miarą martyngałową lub neutralną względem ryzyka, jeśli względem miary P^* stochastyczny ciąg:

$$(S_n/B_n)_{n \leq N}$$

jest martyngałem. Oznacza to stałość wartości oczekiwanych względem danej miary probabilistycznej [4] dla wyrazów powyższego ciągu. Miar takich może być cała klasa $\boldsymbol{P}^*$.

Kryterium martyngalności miary P'

Jeśli w modelu rynku (1) stochastyczny ciąg $(r_n)_{n \leq N}$ jest prognozowalny i $r_n \to -1,$ wtedy względem miary P' jednocześnie są martyngałami:

$$R_n = \frac{S_n}{R_n} \quad \text{oraz} \quad (\textstyle\sum_o^n (\rho_k - r_k))_{n \leq N}$$

Kryterium to wynika głównie z własności stochastycznej wykładniczości.

Martyngałowa miara P^* względem miar równoważnych *P*

W tej sytuacji zupełnie naturalnie pojawia się problem poszukiwania martyngałowej miary $\boldsymbol{P}^*$ wśród miar równoważnych *P*. Oznaczając w tym celu odpowiadającą lokalną gęstość przez:

$$(Z_n)_{n \leq N}$$

z kryterium martyngalności miary względem względem $\boldsymbol{P}^*$ wynika, że:

$$R \text{ jest martyngałem} \Leftrightarrow (V - U)$$

Dla przykładu i upraszczając kontekst powyższego formalnego ujęcia przyjmiemy, że *V* jest martyngałem już względem wyjściowej miary P. Wtedy z twierdzenia Girsanowa [4] wynika, że:

$$V_n^* = V_n - \sum_{k \leq n} E(Z_{k-1}^{-1} \cdot Z_k \cdot \Delta V_k / F_{k-1}$$

jest martyngałem względem miary $\boldsymbol{P}^*$. Konsekwencją tego jest sposób wyboru miary $\boldsymbol{P}^*$, która powinna być wybrana w taki sposób, aby odpowiadająca jej gęstość czyniła zadość relacji:

$$\Delta U_n = E(Z_{n-1}^{-1} \cdot Z_n \cdot \Delta V_n / F_{n-1})$$

Przypadek ten ma naturalne uogólnienie.

Wprowadzone powyżej pojęcia i podane wnioski prowadzą do stwierdzenia ścisłego związku arbitrażowego rynku, będącego ekonomiczną kategorią w aspekcie finansowego postrzegania inwestycji na rynku kapitałowym oraz martyngałowej miary. Zachodzi bowiem równoważność między istnieniem miary martyngałowej $\boldsymbol{P}^*$ wśród miar równoważnych P a istnieniem arbitrażowego portfela SF_{arb}, gdy w modelu rynku (1) o ciągu stóp zwrotu

r_n $(r_n > -1, n \leq N)$ założy się deterministyczną naturę [8]. W nietrywialnym dowodzie tego faktu występują dwa zbiory zmiennych losowych $\xi = \xi(\omega)$ określonych na (Ω, F), które będą jeszcze wykorzystane w dalszej części rozważań:

$$\sum\nolimits_0 = \{\xi \in R : \exists\ \pi \epsilon SF, X_0^\pi = 0\ \wedge\ X_N^\pi\ = \xi\ \}$$

$$\sum\nolimits_1 = \{\xi \geq 0 : E\xi \geq 1\ \}$$

Okazuje się, że przy nieistnieniu arbitrażowego portfela wynika, że zbiory te nie mają wspólnych elementów.

3. Urealnienie kierunków modelu rynku

Badanie rynku (1) może być prowadzone w kierunku bardziej realnej sytuacji, kiedy zmiany portfela są stowarzyszone albo z przypływem, albo z odpływem kapitału. Modelowanie takiej sytuacji na rynku zostanie przeprowadzone w obecności pewnego stochastycznego ciągu $G = (G_n)$ oraz całej klasy takich strategii $\pi = (\beta_n, \gamma_n)$, które będziemy nazywać G-finansującymi, a ich klasę będziemy oznaczać przez *GF*. Właściwość charakteryzująca tę klasę uwzględnia odpływy i przypływy kapitału z i do portfela, co wyraża równanie:

$$B_{n-1} \cdot \Delta\beta_n + S_{n-1} \cdot \Delta\gamma_n = -\Delta G_n \tag{3}$$

gdzie:

$$G_n = \sum_{k=1}^n \Delta G_k,\ \ G_0 = 0$$

Należy przyjąć, że jeśli $\Delta G \geq 0$ (odpowiednio $\Delta G \leq 0$), to G-finansującą strategię π nazywa się strategią zapotrzebowania (odpowiednio strategią z refinansowaniem lub inwestowaniem). Z powyższego wynika, że na podstawie (2) samofinansowanie oznacza 0-finansowalność.

Odpowiednio do równania (3), które nazywa się równaniem bilansowym [8] dla kapitału X^* strategii $\pi \in GF$ mamy zależności:

$$\begin{aligned} X_n^\pi &= \beta_n \cdot B_n + \gamma_n \cdot S_n \\ X_{n-1}^\pi &= \beta_n \cdot B_{n-1} + \gamma_n \cdot S_{n-1} - \Delta G_n \end{aligned} \tag{4}$$

Stąd dla dowolnej strategii π z klasy samofinansujacych się portfeli SF z równania (4) otrzymuje się:

$$\Delta X_n^\pi = r_n \cdot X_{n-1}^\pi + \gamma_n \cdot S_{n-1} \cdot (\rho_n - r_n) - (1 + r_n) \cdot \Delta G_n$$

To stochastyczne niejednorodne i liniowe równanie ma rozwiązanie:

$$X_n^\pi = Exp_n(U) \cdot \{X_0^\pi + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k^{-1}(U) \cdot \gamma_k \cdot S_{k-1}(\rho_k - r_k) - \\ - \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{k-1}^{-1}(U) \cdot \Delta G_k \} \tag{5}$$

Oznaczając:

$$M_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}(U) \cdot \gamma_k \cdot S_{k-1}(\rho_k - r_k)$$

$$G_n^{exp} = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{k-1}^{-1}(U) \cdot \Delta G_k, \qquad G_0^{\mathcal{E}} = 0$$

ze wzoru (5) otrzymamy nową postać tego równania:

$$\mathcal{E}_k^{-1}(U) \cdot X_n^\pi - G_n^{\mathcal{E}} \tag{6}$$

Ze stwierdzonej już wcześniej własności o równoważności między istnieniem miary martyngałowej $\boldsymbol{P}^*$ wśród miar równoważnych P a istnieniem arbitrażowego portfela SF_{arb}, gdy w modelu rynku (1) o ciągu stóp zwrotu r_n $(r_n > -1, n \leq N)$ założy się deterministyczny charakter, wynika w szczególności, że względem martyngałowej miary $\boldsymbol{P}^*$ wielkość:

$$\mathcal{E}_n(U) \cdot X_n^\pi$$

jest martyngałem, jeśli *G* jest martyngałem.

Jako wniosek z (6) otrzymuje się, że:

$$E^* \mathcal{E}_k^{-1}(U) \cdot X_n^\pi = X_0^\pi - \sum_{k=1}^n E^* \mathcal{E}_{k-1}^{-1}(U) \cdot \Delta G_k$$

Dla (*B*, *S*)-rynku (1) z zadanym płatniczym rygorem (*f*, *N*) względem europejskiej lub amerykańskiej opcji zachowane zostają określenia wynikające z określenia płatniczych reguł i inwestycyjnego kosztu dla opcji europejskich i odpowiednie własności dla opcji amerykańskich. Poniżej krótko wyjaśnimy założenia specyfikujące dodatkowe właściwości samofinansującego się portfela spełniającego wprowadzone właściwości.

Zobowiązania płatnicze i opcje europejskiego rodzaju

Rozpatrując finansowy rynek (*B*, *S*) uwzględnia się tzw. zobowiązania płatnicze z datą wygaśnięcia *N*, przez które rozumie się parę (*f*, *N*), gdzie *f* jest F_N mierzalną nieujemną losową wielkością. Uczestnik rynku, który powinien wygasić płatnicze zobowiązanie zmuszony jest tak zorganizować swoją inwestycyjną działalność, aby odpowiedni portfel inwestycyjny π dostarczył kapitał $X_N^\pi \geq f$.

Procedura skonstruowania takiego portfela, prowadząca do zrealizowania zobowiązania płatniczego, nazywana jest hedgingiem tego zobowiązania, a sam portfel – hedgingowanym portfelem. Charakter płatniczych zobowiązań może być dostatecznie dowolny w ramach dopuszczalnych procedur dozwolonych na rynku akcji. W tym aspekcie jedno z ważniejszych zadań wynikających z hedgingowania płatniczych zobowiązań wynika z przyczynowości łączącej się z wyceną opcji. Z jednej strony może to być niezwykle trudne zadanie, ale jednocześnie odpowiednio sformalizowane i w maksymalnym stopniu oddające realia zobowiązań i warunków rynkowych dość łatwe w implementacji kalkulacyjnej.

Przykładowy wariant wyceny 1

Na (*B*, *S*)-rynku prowadzi działalność emitent określonego papieru wartościowego w celu kupna, sprzedaży itp. Aby zostać posiadaczem takiego papieru należy najpierw zapłacić emitentowi określona premię C. Przy tym nabywca ma prawo przedstawienia danego papieru do wykupu w momencie *N* i otrzymania wypłaty w wysokości *f*. Taki pochodny papier wartościowy jest znany jako opcja europejskiego typu (na zakup, sprzedaż itd. aktywu), a sama transakcja – – kontraktem opcyjnym.

Oczywiste jest, że bardzo ważna jest tu kwestia oceny wartości sprzedaży i kupna opcji oraz sekurytyzowania (hedgingłu) płatniczego zobowiązania względem danej opcji. Przede wszystkim należy najpierw sformalizować określenia tych obiektów.

Przyjmiemy, że na (*B*, *S*)-rynku (1) zadana jest początkowa wartość kapitału $x > 0$ i płatnicze zobowiązanie (*f*, *N*). Samofinansujący portfel π nazywa się (*x*, *f*, *N*)-hedgingiem (zabezpieczeniem), jeśli kapitał X^π ma własności:

$$X_0^\pi = x, \text{ oraz dla dowolnego } \omega \in \Omega, \quad X_N^\pi \geq f(\omega) \tag{7}$$

Hedging nazywa się minimalnym, jeśli w (7) osiągnięta jest równość. W takim przypadku stwierdza się osiągnięcie płatniczego zobowiązania (*f*, *N*).

Oznaczając przez $\Pi(x,\ f,\ N)$ zbiór wszystkich (*x*, *f*, *N*)-hedgingów (zabezpieczeń), przyjmuje się określenie inwestycyjnego kosztu płatniczego zobowiązania (*f*, *N*):

$$C(N) = inf\{x > 0 \colon \Pi(x, f, N) \neq \emptyset\} \tag{8}$$

Inwestycyjny koszt jest ograniczony, gdyż Ω jest zbiorem skończonym.

Wielkość $C(N)$ nazywa się sprawiedliwą ceną opcyjną. Wynika to stąd, że (f, N) jako płatnicze zobowiązanie opcyjne na zakup, sprzedaż itd. niektórych aktywów, poprzez formułę (8) realizuje zasadę zadowolenia zarówno sprzedawcy, jak i kupującego. Jest tak, ponieważ sprzedawca może na danym rynku „osiągnąć” zobowiązanie (f, N), a kupujący płaci, w określonym sensie, minimalną premię sprzedawcy.

Wnioski z wprowadzonych założeń urealnienia kierunków modelu rynku

Dla (B, S)-rynku (1) z zadanym płatniczym zobowiązaniem (f, N) przy opcji europejskiego rodzaju zachowują swoje znaczenie określenia (7) i (8). Amerykańskich opcji, jako skonstruowanych odmiennie od europejskich i wymagających nieco innego ujęcia nie rozpatrujemy w tym opracowaniu, chociaż i dla nich zachowują moc odpowiednie określenia dla kapitału początkowego i kapitału odpowiadającego minimalnemu hedgingowi. W obu przypadkach klasę *SF* zastępuje klasa GF [8]. Odpowiednie ceny i hedgingi są przy tym nazywane *G*-cenami i *G*-hedgingami.

W warunkach zupełnego (B, S)-rynku, przy jedynej martyngałowej mierze P^* i założonym ciągu stóp zwrotu $r_n > -1$ (także amerykańskiego), zadanie wyceny i zabezpieczenia opcji ma adekwatne rozwiązanie w klasie *SF*.

W podobny sposób analogiczne zadanie można rozpatrzyć dla klasy *G*-samofinansujących się strategii (dla uściślenia, strategii z refinansowaniem lub inwestowaniem). Istotne jest przy tym, że można wyjaśnić wtedy, o jaką wielkość różni się sprawiedliwa cena od G-ceny.

Przy przyjętych wyżej założeniach odnośnie do zupełnego rynku zachodzą bowiem trzy własności:

1. Sprawiedliwa cena opcyjna wyraża się w formule:

$$C(N, G) = E^*(\mathcal{E}_N^{-1})(U) \cdot f + \sum_{k=1}^{N} \mathcal{E}_{k-1}^{-1}(U)\Delta G_k \tag{9}$$

2. Istnieje minimalny (C, f, N)-hedging:

$$\pi^* = ((\beta_n^*, \gamma_n^*))_{n \le N}$$

określony wzorami:

$$\gamma_n^* = \frac{\alpha_n^* \cdot B_n}{S_{n-1}}$$

$$\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1} - \Delta G_n}{B_{n-1}}$$

gdzie α_T^* – z rozwinięcia [8]:

$$M_n^* = \frac{x}{B_0} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* (\rho_k - r_k), \quad n \leq N$$

a $M_0^* = \frac{x}{B_0}$.

3. Istnieje ściśle określony kapitał minimalnego G-hedgingu.

Rozpatrzony model dotyczył rynku bez arbitrażu charakteryzującego się własnością zupełności. Wiąże się z tym jednoznaczność martyngałowej miary. Względem tej miary prowadzone były wszystkie finansowe kalkulacje i formalne wywody. Jeśli rozważa się niezupełne rynki można także szacować opcyjnie zabezpieczenia oraz minimalne ryzyko. Martyngałowa miara nie jest wtedy jednak jedyna. W tym przypadku należy zredefiniować pojęcie „ceny opcji" (europejskiego rodzaju) ze zobowiązaniem płatniczym w ramach niezupełnego modelu rynku (1). Uczestnik rynku może w tym przypadku występować w charakterze sprzedawcy i w charakterze kupującego opcje. Różne postrzeganie cen przez sprzedawcę i przez kupującego prowadzi w tym przypadku do wyrażenia, ogólnie określając, rożnych cen sprzedaży $C^*(N)$ i zakupu $C_*(N)$ i do pojawienia niezerowej różnicy między tymi cenami określanymi powszechnie w literaturze jako *spread*. Przypadek ten jest bardziej złożony merytorycznie i formalnie należy rozpatrywać go inaczej niż w przypadku ujęcia zaprezentowanego w niniejszym opracowaniu.

4. Chaos deterministyczny – schemat systemu

Ujmując zagadnienie generujące chaotyczne warunki kształtowania się cen akcji w warunkach pełnego determinizmu można wprowadzić pojęcie „nieliniowego chaotycznego modelu". Zbadanie takiego efektu umożliwia ocenę straty na efektywności systemu i przejście systemu w stan chaosu. Konieczna przy tym jest znajomość jednego z istniejących podejść w rozróżnieniu „stochastyczności" i „chaotyczności". Przedstawione teraz rozróżnienie analizowane jest z zastosowaniem korelacyjnego wymiaru badanych ciągów wielkości, których bliżej nie będziemy omawiać. Umożliwia to wtedy opis metody obliczania górnej i dolnej ceny hedgingowania płatniczego zobowiązania w jednoetapowym modelu rynku dla gwarantowanego przypadku, tj. przy warunku, że stopa procentowa akcji jest „chaotyczną" wielkością.

Chaos i rynki

Ewolucja logarytmicznych stóp zwrotu cen akcji zwykle przedstawiana jest jako ciąg:

$$h = (h_n)$$

gdzie $h_n = ln\frac{S_n}{S_{n-1}}$ oraz S_n – wartość „ceny" w momencie n, wychodząc z hipotezy, że wielkości te mają stochastyczna naturę, tj.:

$$S_n = S_n(\omega), \qquad h_n = h_n(\omega)$$

są wielkościami losowymi, zadanymi na pewnej filtrowanej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \Phi, (\Phi_n)_{n\geq 1}, P)$ i które modelują stochastyczną nieokreśloność stanów „otoczenia".

Z drugiej strony stwierdzone zostało już dawno, że nawet zupełnie proste nieliniowe systemy deterministyczne, które można zapisać w postaci:

$$x_{n+1} = f(x_n; \lambda), \quad n = 0, 1, \dots \tag{10}$$

lub:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}; \lambda), \tag{11}$$

gdzie λ – pewien parametr, mogą generować (przy odpowiednich początkowych warunkach), ciągi $(x_{0,} x_1, \dots)$, których prowieniencja jest podobna do stochastycznych ciągów wartości.

Ta okoliczność uzasadnia pytanie, czy niektóre ekonomiczne, w tym finansowe, szeregi nie są w realnym ich postrzeganiu właśnie nie stochastyczne, a chaotyczne, tzn. takie, które niejako wymuszają modelowanie ich przez deterministyczne nieliniowe systemy. Mogą one prowadzić do efektów obserwowanych przy stochastycznej analizie finansowych danych. Szczególnie znajduje to uzasadnienie w ostatnim okresie, gdy z jednej strony stwierdzono eksperymentalnie reakcję rynków na zachowanie się decydentów politycznych, a z drugiej obserwowane są mało uzasadnione stochastycznymi szokami perturbacje na rynkach finansowych niedające się łatwo wyprofilować metodycznie przez racjonalne działania i nieodpowiadające na łączne losowe reakcje uczestników rynku.

Przykłady nieliniowych chaotycznych systemów

Przytaczając pewne przykłady nieliniowych chaotycznych systemów zaprezentujemy ich zachowanie się, a także umożliwimy uzasadnienie pytania pojawiającego się w naturalny sposób w takich sytuacjach, a mianowicie, jak określić, czy realizowany dany szereg generowany jest przez stochastyczny czy chaotyczny system.

W aspekcie prognozy przyszłego ruchu cen znacząco ważna jest kwestia, w jakim zakresie można prognozować na podstawie nieliniowych chaotycznych systemów. Okazuje się, że sytuacja nie jest zbyt optymistyczna, gdyż chaotyczne systemy charakteryzuje, niezależnie od ich deterministyczności, duża zmienność ich trajektorii, która może się pojawiać przy niedokładnych danych początkowych, a ponadto zależy istotnie od wartości parametru λ .

Logistyczne przekształcenie

W logistycznej aplikacji przekształceń mającej w ekonomii wiele odniesień rozpatrzymy przekształcenie logistyczne [7]:

$$x \longrightarrow Tx \equiv \lambda x(1-x)$$

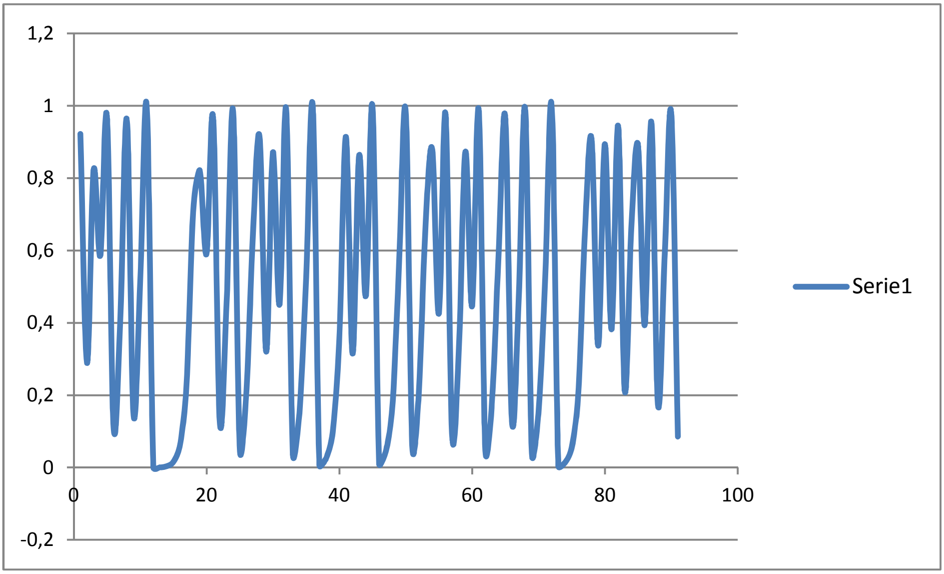
i wywołany przez nie (jednowymiarowy) nieliniowy dynamiczny system:

$$x_n = \lambda x_{n-1}(1-x_{n-1}),\ \ n = 0, 1, \dots, \qquad 0 < x_0 < 1 \tag{12}$$

Dla wartości $\lambda \leq 1$ rozwiązania $x_n = x_n(\lambda)$ maleją i są zbieżne do zera przy $n \to \infty$ i wszystkich $0 < x_0 < 1$. W takim przypadku stan $x_\infty = 0$ można rozpatrywać, jak ten jednoznaczny stabilny stan, do którego zbieżne są wszystkie wartości x_n przy $n \to \infty$. Przy $\lambda = 2$ wartości x_n są rosnące do 0,5. Zatem w tym przypadku także istnieje jednoznaczne stabilne rozwiązanie $x_\infty = 0{,}5$, które „przyciąga" wartości x_n przy $n \to \infty$.

Zwiększając wartość parametru λ łatwo stwierdzić, że w systemie (3), przy $\lambda < 3$ tak jak wcześniej istnieje tylko jedno stabilne rozwiązanie, jednak już przy $\lambda = 3$ powstaje jakościowo nowy efekt, a mianowicie w miarę wzrostu *n* występują dwa stany stabilności x_∞, w których na przemian znajduje się system. Taki sam charakter zachowuje system przy zwiększaniu wartości parametru λ, ale system zachowuje się nagle inaczej przy niewielkim wzroście parametru λ, i przy $\lambda = 3{,}5644\ldots$takich stanów jest 16, przy $\lambda = 3{,}5696\ldots$ jest ich już 64, a przy $\lambda = 3{,}6$ liczba takich stanów jest już nieograniczenie duża. Ten ostatni przypadek tłumaczy się utratą stabilności przez system i przejście systemu w stan chaosu.

Dla $\lambda = 4$ mamy sytuację zbliżoną do losowości probabilistycznej (rys. 1).



Rys. 1. Przypadek $\lambda = 4$, $x_0 = 0{,}9$

Nieograniczona liczba stanów wyjaśniana jest także w tym przypadku przez utratę stabilności systemu i przejście systemu w stan chaosu, przy tym w pełni znika periodyczny charakter zmiany stanów i system rozpoczyna wykonywanie błądzenia po nieskończonej liczbie stanów. Ważne jest spostrzeżenie, że chociaż system pozostaje deterministyczny, praktycznie nie można przewidzieć, gdzie znajdzie się po pewnym czasie, ponieważ ograniczona dokładność określenia wartości x_n i λ może silnie wpływać na wartości prognozowanych wielkości.

Nie pozostawia zatem wątpliwości fakt, że wartości (λ_k) parametru λ, gdzie zachodzi „rozgałęzienie", stają się wszystkie „bliżej i bliżej".

M. Feigenbaum sformułował hipotezę, a O. Lanford wykazał, że (dla wszystkich parabolicznych systemów):

$$\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \to F, \quad k \to \infty$$

gdzie $F = 4{,}669201 \ldots$ – stała uniwersalna, nazywana liczbą Feigenbauma.

Parametr $\lambda = 4$ ma w równaniu (12) szczególną rolę – właśnie przy tej wartości ciąg obserwacji odpowiadających (chaotycznych) ciągowi (x_n) przypomina realizację stochastycznego ciągu typu „białego szumu". W rzeczywistości, jeśli weźmiemy $x_0 = 0{,}1$ i obliczymy rekurencyjną formułą (12) $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$, to empiryczne wartości średniej i odchylenia standardowego wynoszą odpowiednio, 0,48887 i 0,35742 (z dokładnością do 5 cyfr). Natomiast dla 100 powtórzeń wyniki są następujące: empiryczne wartości średniej i odchylenia standardowego odpowiednio wynoszą: 0,474916 i 0,361261 (dokładnością do 6 cyfr).

Tabela 1

Wartości (empirycznej) korelacyjnej funkcji $\hat{p}(k)$, obliczone dla wartości $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$

1	–0,033	11	–0,046	21	–0,008	31	0,038
2	–0,058	12	0,002	22	0,009	32	–0,017
3	–0,025	13	–0,011	23	–0,039	33	0,014
4	–0,035	14	0,040	24	–0,020	34	0,001
5	–0,012	15	0,014	25	–0,008	35	0,017
6	–0,032	16	–0,023	26	0,017	36	–0,052
7	–0,048	17	–0,030	27	0,006	37	0,004
8	0,027	18	0,037	28	–0,004	38	0,053
9	–0,20	19	0,078	29	–0,019	39	–0,021
10	–0,013	20	0,017	30	–0,076	40	0,007

Źródło: Opracowanie własne na podstawie [6].

Z podanych w tabeli wartości funkcji korelacyjnej jest widoczne, że wielkości (x_n), wywołane przez logistyczne przekształcenie z $\lambda = 4$ praktycznie można uważać jako nieskorelowane i w tym znaczeniu ciąg (x_n) może być nazwany „chaotycznym białym szumem”.

Interesująca jest uwaga, że dla systemu $x_n = 4x_{n-1}(1 - x_{n-1})$, $n = 1, \dots$, $0 < x_0 < 1$, istnieje niezmienniczy rozkład P, tj. taki, że $P(T^{-1}A) = P(A)$ dla dowolnego borelowskiego zbioru A z przedziału (0, 1), którego gęstość:

$$p(x) = \frac{1}{\pi[x(1-x)]^{1/2}}\ , \quad x \in (0,1) \tag{13}$$

Wynika z tego, że jeśli przyjąć losową początkową wartość x_0 z gęstością rozkładu prawdopodobieństwa $p = p(x)$, to losowe wielkości x_n, $n \geq 1$ będą z tego samego rozkładu, z którego pochodzi x_0 .

Należy tu stwierdzić, co wynika z teorii probabilistyki, że w uzyskanym w ten sposób stochastycznym systemie (x_n) cała „losowość” jest całkowicie określona przez początkową wartość x_0 , a dynamika przejść $x_n \to x_{n+1}$ zadana jest w deterministyczny sposób w relacji (12).

Przy rozkładzie zadanym funkcją gęstości (4) nietrudno jest stwierdzić, że wartość oczekiwana $Ex_0 = 0{,}5,\ Ex_0^2 = \frac{3}{8},\ D^2x_0 = \frac{1}{8}\ (D^2 = (0{,}35355^2)$ (średnia z wartością 0,48887 i odchylenie standardowe 0,35742, podane wyżej) i:

$$p(k) \equiv \frac{Ex_0x_k - Ex_0E_k}{\sqrt{Dx_0Dx_k}} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } k = 0 \\ 0, & \text{jeśli } k \neq 0 \end{cases}$$

Przykładowe przekształcenia w modelowaniu finansowych wskaźników w okresach kryzysu finansowego

1. Przekształcenie Bernoulliego

$$x_n = 2x_{n-1} \text{ (mod 1)},\ n = 1,2,\ldots,\quad x_o \in (0,1)$$

W tym przypadku niezmienniczy jest jednostajny rozkład z gęstością $p(x) = 1,\ \ x \in (0,1)$. Podstawowe charakterystyki w tym rozkładzie dla wielkości losowej x_0 wynoszą:

$$Ex_0 = \frac{1}{2},\ Ex_0^2 = \frac{1}{3},\ Dx_0 = \frac{1}{12},\ p(k) = 2^{-k},\ k = 0,1,\ldots .$$

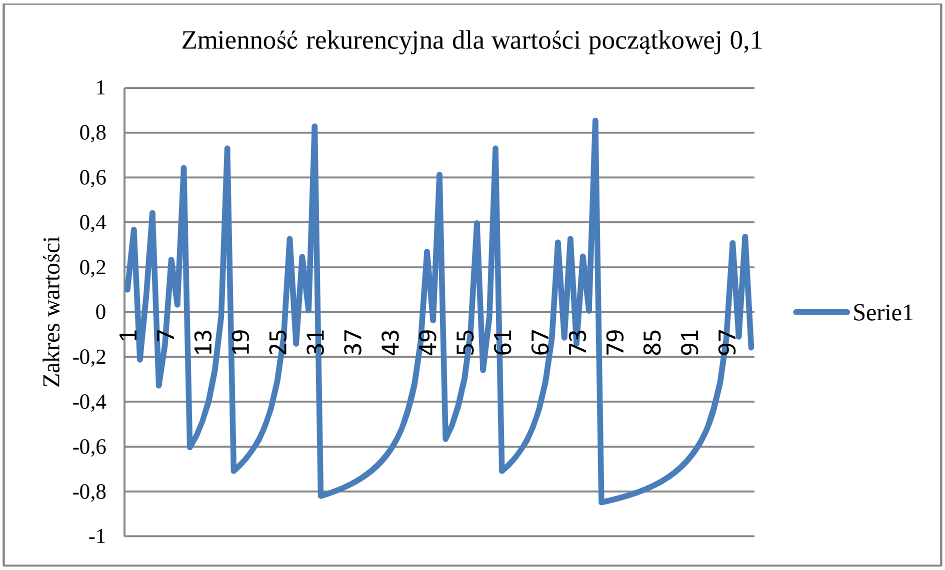
2. Przekształcenie „namiotowe”

$$x_n = 1 - |1 - 2x_{n-1}|,\qquad n = 1,2,\ldots,\qquad x_0 \in (0,1)$$

Tu także, jak dla przekształcenia Bernoulliego, niezmienniczy jest rozkład jednostajny w przedziale (0,1). Ponadto $Ex_0 = \frac{1}{2},\ Ex_0^2 = \frac{1}{3},\ Dx_0 = \frac{1}{12}$, $p(k) = 0,\ k \neq 0.$

3. Przekształcenie pierwiastkowe

$$x_n = 1 - 2\sqrt{x_{n-1}},\ \ n - 1,\ldots,\quad x_0 = (-1,1)$$



Rys. 2. Wykres zmian wartości rekurencyjnych w przekształceniu pierwiastkowym

Niezmienniczy jest tutaj rozkład jednostajny na odcinku (–1, 1) z gęstością $p(x) = \frac{1-x}{2}$, przy tym $Ex_0 = -\frac{1}{3}$, Ex_0^2, $Dx_0 \ = \frac{2}{9}$.

Wskazane przykłady nieliniowych dynamicznych systemów są istotne w różnych aspektach. Po pierwsze, można zauważyć, na przykładzie logistycznego systemu, którego rozwój jest „binarny”, że wyraziście wyraża się idea chaotyczności. Po drugie, kształtowanie się takich systemów, scharakteryzowanych własnością chaotyczności, przytacza na myśl ich zastosowanie przy konstrukcji modeli ewolucji finansowych indeksów, a szczególnie w okresach kryzysowych. Dla takich okresów właściwa jest właśnie „chaotyczność”, a nie „stochastyczność”.

Okoliczność, że formalnie deterministyczne systemy mogą przejawiać właściwości typu „stochastycznego białego szumu” jest znana od dawna i nie jest czymś nieoczekiwanym. Dlatego powstają dwie kwestie odnoszące się do tego, jak rozróżniać „stochastyczne” i „chaotyczne systemy” oraz czy można w zasadniczy sposób zdecydować, jaka jest istotna natura „nieregularności” finansowych danych – „stochastyczna” czy „chaotyczna”.

Przedstawimy ujęcie mające główne znaczenie przy rozróżnianiu „stochastyczności” i „chaotyczności” funkcji:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} \frac{\emptyset(N,\varepsilon)}{N^2} \tag{14}$$

gdzie $\emptyset(N,\varepsilon)$ – liczba takich par (i,j), $i,j \leq N$, dla których w rozpatrywanym ciągu (x_n) elementy tego ciągu są odległe o mniej niż ε, tzn.:

$$|x_i - x_j| < \varepsilon$$

Oprócz funkcji $C(\varepsilon)$ rozważa się funkcję:

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} \frac{\emptyset_m(N,\varepsilon)}{N^2}$$

gdzie $\emptyset(N,\varepsilon)$ – liczba takich par (i,j), dla których wszystkie współrzędne wektorów $(x_i, \dots, x_{i+m-1})$ i $(x_j, \dots, x_{j+m-1})$ dla $i,j \leq N$ różnią się nie więcej niż ε. W wypadku $m = 1$ mamy $\emptyset_1(N,\varepsilon) = \emptyset(N,\varepsilon)$.

Dla stochastycznych ciągów (x_n) mających cechy „białego szumu” przy małych wartościach ε funkcja spełnia relację:

$$C_m(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\nu_m} \tag{15}$$

gdzie „fraktalny” wykładnik $\nu_m = m$. Własnościom w rodzaju (15) czyni zadość także i wiele deterministycznych systemów, w tym logistyczny system (12). Wykładnik ν_m nazywany jest także korelacyjnym wymiarem.

Idea rozróżniania „stochastycznych” i „chaotycznych” ciągów wychodzi z takiej obserwacji, że korelacyjny wymiar w takich ciągach jest różny. W ciągach „stochastycznych” jest większy niż w „chaotycznych”.

Oceny korelacyjnego wymiaru

W charakterze ocen korelacyjnego wymiaru ν_m naturalne jest rozpatrzenie wielkości:

$$\tilde{\nu}_{m,j} = \frac{\ln C_m(\varepsilon_j) - \ln C_m(\varepsilon_{j+1})}{\ln \varepsilon_j - \ln \varepsilon_{j+1}}$$

lub:

$$\tilde{\nu}_m(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \tilde{\nu}_{m,j}$$

gdzie $\varepsilon_j = \varphi^j$, $0 < \varphi < 1$.

Z wyników znanych z literatury [8] wynika po pierwsze, jednorodność „fraktalnej" struktury „korelacyjnego wymiaru" indeksów *IBM* i S & P500, po drugie, że dla tych indeksów ciągi (h_n) z $h_n = ln\frac{S_n}{S_{n-1}}, n \geq 1$ zmierzają do siebie szybciej niż stochastyczny „biały szum". Spostrzeżenie to nie jest podstawą do odrzucenia hipotezy o tym, że bliskimi właściwościami mogą charakteryzować się także inne „chaotyczne" ciągi z wielkim „korelacyjnym rozmiarem".

W praktyce analizowania problemu rozróżniania „chaotyczności" i „stochastyczności" znajduje także zastosowanie podejście, w którym rozpatrywane jest kształtowanie się rozkładu prawdopodobieństwa systemu.

5. Wariant rozwiązania zadania rekonstrukcji operatora ewolucji dla rynków futures

W zastosowaniach rozpatrywane są różne możliwe rozwiązania zadania rekonstrukcji operatora ewolucji dla rynków futures. Podstawową przesłanką jest to, że dowolny wybór nieliniowości bez wprowadzenia apriorycznej informacji lub specjalnego uprzedniego badania obiektu nie zawsze umożliwia wybór udanej rekonstrukcji. Dlatego na danym etapie modelowania szerokie zastosowanie ma dotąd dla prognozowania rynkowych charakterystyk analiza techniczna. Reguły tej teorii uwzględniają fakt, że w dynamice rynku akcji istotne są trzy podstawowe źródła informacji: ceny akcji, wielkość sprzedaży i otwarte zlecenia. Wielkość obrotów i otwarte zlecenia nie są arbitralnie znaczące, ale mimo tego są ważnymi czynnikami wpływającymi na formowanie cen akcji. Otwarte zlecenia są ilością niezamkniętych pozycji na końcu dziennej sesji.

Tak zobrazowany proces jest podstawą modelu prognozowania cen na rynku futures i powinien opisywać zmiany trzech komponent rynkowych – cena kontraktu, wielkość obrotów, otwarte pozycje. Istniejąca relacja między opisanymi wskaźnikami ekonomicznymi wyrażona jest krzyżującymi się iloczynami odpowiednich fazowych zmiennych występujących w modelu prognozowania cen na rynku futures. Dane parametry są zmiennymi na pewnym dostatecznie dużym odcinku czasu, ale kawałkami stałymi na niewielkim badanym przedziale czasu-kroku prognozy. Taki model, analizowany na osnowie teorii deterministycznego chaosu, wskazuje, że wiele losowych ekonomicznych zjawisk jest bardziej przewidywalnych niż przyjęto sądzić.

Literatura

1. Andritzky B., *Sovereign Default Risk Valuaation. Implication of Debt Crises and Bond Restructurings*, Verlag, Berlin 2006.
2. Hull J., *Futures and Other Deivative Securie*s, Englewood Cliffs, Prentice-Hall 1992.
3. Karatzas J., Shreve S.E., *Metods of mathematical finance*, Springer Verlag, New York 1999.
4. Lipcer N., Sziriajew A.R., *Statystyka procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1981.
5. Mandelbrot B., *Fractals and scaling in finance: discontinuity, concetration, risk*, Springer 1997.
6. *Podstawy stochastycznej finansowej matematyki*, T. 1. *Fakty. Modele*, T. 2. *Teoria*, FAZIS, Moskwa 1998.
7. Sziriajew I., *Opcje i ryzyko, prawdopodobieństwo, zabezpieczenia i chaos. Matematyka finansów*, URSS, Moskwa 1999.
8. Sziriajew W., *Fianansowyie rynki: Neironye eti, chaos, nichinejnaia dinamica*, Dom Książki Librocom, Moskwa 2009.
9. Wilmott P., Howison S., Dewynne J., *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press 1997.

CHAOTIC RESPONSE OF THE FINANCIAL MARKETS – PROBABILISTIC ASPECTS OF PAYMENT SECURITY VALUATION AND CAPITAL MARKET

Summary

Considered in developing the financial model of the exemplification of the market refers to the complete markets. Developed the idea not-self-financing the strategy at a fair valuation of the possible options. The appropriate development of this theme is the introduction to the issue of the financial model of incomplete markets and to structure the equity portfolio under the assumption of statistical indeterminacy. The derived formulas in the article is a basic introduction to the analysis of the financial market, but the aspect of perspective on this subject with seemingly very formalized, leading to appraise the relevant hedging approach equivalent security.

The following article about the chaotic financial data responsive to capital markets. Examined aspect of distinguishing chaotic and stochastic defined in terms of looking at this problem. Discusses the correlation dimension as an assessment of the degree of chaos in time series data. Attention has been returned to the issue in various applications possible solutions to the tasks for the reconstruction of the evolution operator of futures markets. The basic premise is that any choice of non-linearities without introducing a priori information or special prior studies do not always object to select the successful reconstruction.