

Dariusz Kacprzak

Politechnika Białostocka

e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl

Katarzyna Rudnik

Politechnika Opolska

e-mail: k.rudnik@po.opole.pl

SKIEROWANE LICZBY ROZMYTE *VERSUS* WYPUKŁE LICZBY ROZMYTE W METODZIE FSAW¹

ORDERED FUZZY NUMBERS VERSUS CONVEX FUZZY NUMBERS IN THE FSAW METHOD

DOI: 10.15611/pn.2017.469.08

JEL Classification: C44

Streszczenie: Celem badania jest porównanie wykorzystania trójkątnych liczb rozmytych skierowanych (OFNs) i wypukłych (CFNs) w rozmytej metodzie SAW (FSAW). Dodatkowo badano wykorzystanie, w celu otrzymania uporządkowania liniowego obiektów, dwóch metod wyostrzania: metody środka ciężkości (CoG) oraz metody opartej na transformacie Mellina. Praca zawiera podstawę teoretyczną prowadzonych badań oraz poglądowy przykład numeryczny. W wyniku analiz stwierdzono, że użycie trójkątnych OFNs w metodzie FSAW nie daje dodatkowych korzyści, gdyż nie wpływa na wyniki uporządkowania obiektów. Ponadto w wyniku agregacji mogą się pojawić niewłaściwe OFNs, co z kolei nie pozwala na zastosowanie metody wyostrzania opartej na transformacie Mellina, która jak pokazano jest metodą bardziej precyzyjną od metody CoG.

Słowa kluczowe: metoda rozmyta SAW, skierowane liczby rozmyte, wypukłe liczby rozmyte, transformata Mellina.

Summary: The aim of the study is to compare the use of triangular Convex Fuzzy Numbers (CFNs) and triangular Ordered Fuzzy Numbers (OFNs) in the Fuzzy SAW method (FSAW). Additionally, in order to obtain unambiguous objects, we studied the use of two defuzzification methods: the Center of Gravity method (CoG) and the method based on Mellin transform. The paper includes the theoretical basis of the study and a numerical example. Summing up the results, it can be concluded that the use of OFN numbers in the FSAW method is unreasonable. It does not affect the results of objects order and it only affects the visual aspects of the assessment. Furthermore, in some cases, the results are in the form of impro-

¹ Badania zostały zrealizowane w ramach prac nr S/WI/1/2016 oraz NBS-49/16 026/16 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

per OFNs, which in turn does not allow the use of the method based on Mellin transform (the method more precise than the CoG method).

Keywords: fuzzy SAW method, ordered fuzzy numbers, convex fuzzy numbers, Mellin transform.

1. Wstęp

Jedną z najprostszych i najpopularniejszych wielokryterialnych metod podejmowania decyzji jest metoda SAW (*Simple Additive Weighting*). Polega ona na wyznaczeniu dla każdego obiektu (wariantu decyzyjnego) kombinacji liniowej elementów znormalizowanej macierzy decyzyjnej oraz odpowiednich elementów wektora wag. Pozwala to na liniowe uporządkowanie obiektów i wskazanie obiektu optymalnego w ramach przyjętych cech (kryteriów). Rozmyta jej wersja, tzw. FSAW (*Fuzzy SAW*), oparta na liczbach rozmytych w wyniku agregacji daje liczby rozmyte, które po wyostrzeniu pozwalają uporządkować liniowo obiekty.

Celem pracy jest porównanie tradycyjnej metody FSAW, wykorzystującej trójkątne wypukłe liczby rozmyte (*Convex Fuzzy Numbers* – CFNs), z metodą FSAW opartą na trójkątnych skierowanych liczbach rozmytych (*Ordered Fuzzy Numbers* – OFNs). Dodatkową własność OFN, skierowanie, wykorzystuje się do pokazania typu cechy. Oceny obiektów względem cech będą pochodziły z wcześniej ustalonej skali. Sprawia to, że macierz decyzyjna nie musi być normalizowana, a dokonując agregacji, uzyskuje się różne wyniki w prezentowanych metodach (jeżeli wśród cech występują zarówno stymulanty, jak i destymulanty). Do wyostrzenia uzyskanych wyników wykorzystana będzie najczęściej stosowana metoda, tzw. metoda środka ciężkości, oraz metoda oparta na transformacie Mellina. Obie metody pozwalają na uwzględnienie kształtu funkcji przynależności.

2. Liczby rozmyte i skierowane liczby rozmyte

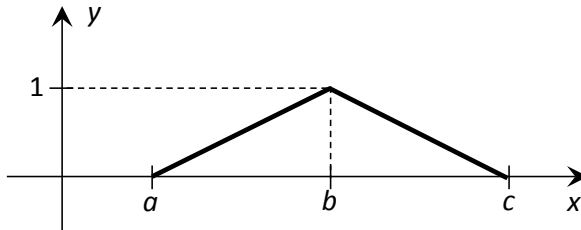
Genezą powstania teorii zbiorów rozmytych [Zadeh 1965] była potrzeba matematycznego modelowania i opisanie wielkości nieprecyzyjnych, wieloznacznych czy też wyrażonych za pomocą języka mówionego. Zbiorem rozmytym A na uniwersum X nazywa się zbiór par $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A : X \rightarrow [0,1]\}$, gdzie μ_A jest funkcją przynależności, która każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A . Wypukła liczba rozmyta A to zbiór rozmyty określony na uniwersum liczb rzeczywistych ($X = \mathbb{R}$), który jest wypukły, normalny i ma funkcję przynależności μ_A kawałkami ciągłą.

W praktycznych zastosowaniach liczb rozmytych, np. w metodzie FSAW, często wykorzystuje się trójkątne liczby rozmyte, które zapisujemy w formie

$$A = (a, b, c), \text{ gdzie } a < b < c, \quad (1)$$

a ich funkcja przynależności ma postać (rys. 1):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{gdy } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{gdy } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{gdy } x \leq a \vee x \geq c \end{cases} \quad (2)$$



Rys. 1. Trójkątna liczba rozmyta $A = (a, b, c)$

Źródło: opracowanie własne.

Niech $S = (a_S, b_S, c_S)$ i $Z = (a_Z, b_Z, c_Z)$ będą trójkątnymi liczbami rozmytymi oraz $r \in \mathbb{R}$. Suma S i Z jest równa $S + Z = (a_S + a_Z, b_S + b_Z, c_S + c_Z)$, natomiast iloczyn r i S jest równy $r \cdot S = (r \cdot a_S, r \cdot b_S, r \cdot c_S)$. Powyższe działania są wykonywane w metodzie FSAW.

Model wypukłych liczb rozmytych ma pewne ograniczenia, m.in. powiększanie nieprecyzyjności (nośnika liczby rozmytej, tzn. zbioru $\text{supp}A = \{x \in X: \mu_A(x) > 0\}$) w trakcie wykonywania działań (m.in. niezależnie, czy dwie liczby rozmyte dodamy czy odejmiemy, następuje powiększanie nośnika), brak elementów przeciwnych względem dodawania i odwrotnych względem mnożenia. Ograniczenia te doprowadziły do pojawienia się modyfikacji istniejącego modelu oraz powstania nowego, tzw. modelu skierowanych liczb rozmytych.

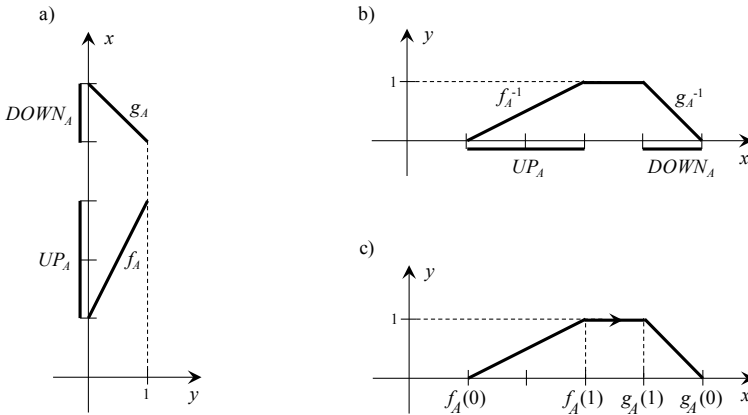
Model skierowanych liczb rozmytych został zaprezentowany w 2002 roku przez Kosińskiego, Prokopowicza i Słezaka w serii prac [Kosiński i in. 2002; Kosiński i in. 2003; Kosiński, Prokopowicz 2004]. Skierowaną liczbą rozmytą A nazywamy uporządkowaną parę funkcji ciągłych

$$A = (f_A, g_A), \quad (3)$$

gdzie $f_A, g_A: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. W celu zachowania zgodności z klasycznymi oznaczeniami zbiorów (liczb) rozmytych, zmienną niezależną funkcji f_A i g_A oznaczmy przez y , natomiast ich wartość (zmienną zależną) przez x (rys. 2a). Ciągłość funkcji f_A i g_A oznacza, że obrazy zbioru $[0, 1]$ są ograniczonymi przedziałami odpowiednio UP_A i $DOWN_A$ (rys. 2a), których granice oznaczamy następująco: $UP_A = [f_A(0), f_A(1)]$ i $DOWN_A = [g_A(1), g_A(0)]$. W określeniu OFN wymagane jest, aby funkcje f_A i g_A

były ciągle, ale jeżeli dodatkowo założymy, że f_A jest rosnąca, a g_A malejąca i $f_A(y) \leq g_A(y)$ dla każdego $y \in [0,1]$, możemy określić funkcję przynależności skierowanej liczby rozmytej A w postaci (rys. 2b):

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin [f_A(0), g_A(0)] \\ f_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in UP_A \\ 1 & \text{gdy } x \in [f_A(1), g_A(1)] \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in DOWN_A \end{cases} \quad (4)$$



Rys. 2. a) Skierowana liczba rozmyta A , b) OFN A przedstawiona w sposób nawiązujący do CFN, c) strzałka przedstawiająca porządek odwróconych funkcji i orientację OFN A

Źródło: [Kosiński i in. 2002].

Na rysunku 2c pokazano skierowaną liczbę rozmytą A w sposób nawiązujący do CFN oraz strzałkę, która obrazuje porządek odwróconych funkcji f_A i g_A , jak również orientację OFN. Szczególnym przypadkiem skierowanych liczb rozmytych są liczby rzeczywiste. W modelu OFN są one utożsamiane z parą funkcji stałych. Dokładniej, liczba $r \in \mathbb{R}$ jest zapisywana jako skierowana liczba rozmyta postaci $r = (r^*, r^*)$, gdzie $r^*(y) = r$ dla $y \in [0,1]$. Działania wykorzystywane w metodzie FSAW są postaci: $\forall y \in [0,1] [f_C(y) = f_A(y) * f_B(y) \text{ i } g_C(y) = g_A(y) * g_B(y)]$, gdzie $C = (f_C, g_C)$ jest wynikiem działania $* \in \{+, \cdot\}$ na liczbach $A = (f_A, g_A)$ i $B = (f_B, g_B)$.

W określeniu funkcji przynależności skierowanej liczby rozmytej (4) pojawiają się cztery liczby rzeczywiste $f_A(0)$, $f_A(1)$, $g_A(1)$ i $g_A(0)$. Jeżeli funkcje f_A i g_A są liniowe, liczby te w sposób jednoznaczny opisują OFN, którą możemy zapisać w postaci (rys. 2c):

$$A = (f_A(0), f_A(1), g_A(1), g_A(0)). \quad (5)$$

Gdy $f_A(1) < g_A(1)$, mówimy o trapezowej skierowanej liczbie rozmytej, natomiast gdy $f_A(1) = g_A(1)$ – o trójkątnej skierowanej liczbie rozmytej.

Korzystając z reprezentacji (5), działania wykorzystywane w metodzie FSAW określamy następująco. Niech $r \in \mathbb{R}$ oraz $A = (f_A(0), f_A(1), g_A(1), g_A(0))$ i $B = (f_B(0), f_B(1), g_B(1), g_B(0))$ będą OFNs. Dodawanie A i B określa formuła $A + B = (f_A(0) + f_B(0), f_A(1) + f_B(1), g_A(1) + g_B(1), g_A(0) + g_B(0))$, a mnożenie A przez r jest postaci $r \cdot A = (r \cdot f_A(0), r \cdot f_A(1), r \cdot g_A(1), r \cdot g_A(0))$.

3. Wyostrzenie liczb rozmytych

W wielu praktycznych zastosowaniach liczb rozmytych, np. w regulatorach rozmytych czy w metodach wielokryterialnych jak FSAW, ważną rolę pełnią funkcje, które liczbie rozmytej przyporządkowują liczbę rzeczywistą. Operacja ta nosi nazwę wyostrzenia (inaczej defuzyfikacji).

Istnieje szereg metod wyostrzenia trójkątnych (wypukłych i skierowanych) liczb rozmytych. Znaczna ich część opiera się na charakterystycznych punktach tych liczb (1) i (5). W pracy wykorzystamy dwie metody uwzględniające również kształt funkcji przynależności: popularną i powszechnie stosowaną metodę środka ciężkości oraz metodę opartą na transformacie Mellina.

Metoda środka ciężkości (*Center of Gravity* – CoG) dla wypukłej liczb rozmytej A o funkcji przynależności $\mu_A(x)$ opisana jest formułą:

$$\phi_{CoG}(A) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x \cdot \mu_A(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} \mu_A(x) dx}, \quad (6)$$

kóra dla trójkątnej wypukłej liczby rozmytej (1) ma postać:

$$\phi_{CoG}(A) = \frac{a+b+c}{3}. \quad (7)$$

Środek ciężkości dla skierowanej liczby rozmytej (3) obliczany jest z zależności:

$$\phi_{CoG}(A) = \frac{\int_0^1 \frac{f_A(y)+g_A(y)}{2} \cdot |f_A(y)-g_A(y)| dy}{\int_0^1 |f_A(y)-g_A(y)| dy}, \quad (8)$$

kóra dla trójkątnej OFN (5), gdzie $f_A(1) = g_A(1)$, ma postać:

$$\phi_{CoG}(A) = \frac{f_A(0)+f_A(1)+g_A(0)}{3}. \quad (9)$$

Metoda wyostrzenia oparta na transformacie Mellina [Zemaniań 1968] polega na przekształceniu funkcji przynależności w funkcję gęstości prawdopodobieństwa, np. za pomocą transformacji proporcjonalnej, oraz wyznaczeniu dwóch podstawowych momentów, tzn. wartości oczekiwanej i wariancji². W przypadku trójkątnej CFN (1) o funkcji przynależności (2) wartość oczekiwana ma postać:

$$m(A) = \frac{a+b+c}{3}, \quad (10)$$

² Szersze informacje oraz wyprowadzenia zależności w metodzie wyostrzenia opartej na transformacie Mellina można znaleźć m.in. w pracach [Kacprzak, Rudnik 2015; Yoon 1996].

natomiast wariancja obliczana jest ze wzoru:

$$\sigma^2(A) = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}. \quad (11)$$

Rozważając trójkątną OFN (5), gdzie $f_A(1) = g_A(1)$, otrzymujemy odpowiednio:

$$m(A) = \frac{f_A(0)+f_A(1)+g_A(0)}{3}, \quad (12)$$

$$\sigma^2(A) = \frac{f_A^2(0)+f_A^2(1)+g_A^2(0)-f_A(0)f_A(1)-f_A(0)g_A(0)-f_A(1)g_A(0)}{18}. \quad (13)$$

4. Metoda FSAW

Jak wspomniano we wstępie, celem pracy jest porównanie rozmytej metody SAW, opartej na CFNs, z metodą bazującą na OFNs. Aby przybliżyć metodę FSAW wprowadźmy następujące oznaczenia: K_j ($j = 1, \dots, N$) – j -ta cecha, w_j ($w_j > 0$) – waga j -tej cechy, spełniająca zależność $w_1 + w_2 + \dots + w_N = 1$, W_i ($i = 1, \dots, M$) – i -ty obiekt, x_{ij} – ocena i -tego obiektu ze względu na j -tą cechę, wyrażona za pomocą liczby rozmytej CFN lub OFN. W tabeli 1 zamieszczono etapy metody FSAW, z uwzględnieniem różnic w obliczeniach dla obu modeli liczb rozmytych.

Tabela 1. Etapy w metodzie FSAW

Nr etapu	Metoda FSAW	
	Wypukłe liczby rozmyte – CFN	Skierowane liczby rozmyte – OFN
1	Utworzenie rozmytej macierzy decyzyjnej $X = (x_{ij})$ gdzie x_{ij} są trójkątnymi wypukłymi liczbami rozmytymi postaci (1)	
	gdzie x_{ij} są trójkątnymi skierowanymi liczbami rozmytymi postaci (5) ³	
2	Utworzenie znormalizowanej rozmytej macierzy decyzyjnej $Z = (z_{ij})$ gdzie z_{ij} ma postać [Chen 2000]: $\left(\frac{a_{ij}}{\max_i c_{ij}}, \frac{b_{ij}}{\max_i c_{ij}}, \frac{c_{ij}}{\max_i c_{ij}} \right)$, gdy K_j – stymulanta; $\left(\frac{\min_i a_{ij}}{c_{ij}}, \frac{\min_i a_{ij}}{b_{ij}}, \frac{\min_i a_{ij}}{a_{ij}} \right)$, gdy K_j – destymulanta	
	gdzie z_{ij} ma postać [Rudnik, Kacprzak 2015; Roszkowska, Kacprzak 2016]: $\left(\frac{f_{ij}(0)}{\max_i g_{ij}(0)}, \frac{f_{ij}(1)}{\max_i g_{ij}(0)}, \frac{g_{ij}(1)}{\max_i g_{ij}(0)}, \frac{g_{ij}(0)}{\max_i g_{ij}(0)} \right)$, gdy K_j – stymulanta; $\left(\frac{\min_i g_{ij}(0)}{f_{ij}(0)}, \frac{\min_i g_{ij}(0)}{f_{ij}(1)}, \frac{\min_i g_{ij}(0)}{g_{ij}(1)}, \frac{\min_i g_{ij}(0)}{g_{ij}(0)} \right)$, gdy K_j – destymulanta	
3	Obliczenie wartości funkcji agregującej dla każdego obiektu W_i za pomocą formuły [Hwang, Yoon 1981]:	

³ W przypadku użycia OFNs, dodatkowa ich własność, tzn. skierowanie, jest wykorzystywana do wskazania typu cechy. Stymulanta (cecha typu „zysk”) obrazowana jest skierowaniem zgodnym z osią x (rys. 2c), natomiast destymulanta (cecha typu „strata”) widoczna jest w skierowaniu przeciwnym.

	$FSAW(W_i) = \sum_{j=1}^N z_{ij} \cdot w_j$
4	<p>Uporządkowanie obiektów W_i liniowo ze względu na wartości funkcji wyostrzania liczb rozmytych $FSA(W_i)$.</p> <p>W przypadku metody środka ciężkości wyższe wartości $\phi_{CoG}(FSAW(W_i))$ oznaczają, że obiekt W_i zajmuje wyższą pozycję w rankingu.</p> <p>Jeśli stosuje się metodę wyostrzania opartą na transformacie Mellina, o pozycji w rankingu decyduje wartość oczekiwana. Podobnie jak dla CoG – im wyższa jej wartość, tym wyższa pozycja obiektu w rankingu. W sytuacji kiedy wartości oczekiwane są jednakowe, wyższą pozycję w rankingu osiąga obiekt o niższej wartości wariancji.</p>

Źródło: opracowanie własne.

5. Przykład numeryczny

W celu porównania metody FSAW z wykorzystaniem liczb rozmytych CFN i OFN rozważmy przykład oparty na danych umownych. Załóżmy, iż proces decyzyjny polega na ocenie czterech obiektów W_i ($i = 1, \dots, 4$) względem pięciu cech K_j ($j = 1, \dots, 5$). Cechy K_1 i K_4 są destymulantami, pozostałe stymulantami. W trakcie procesu decyzyjnego eksperci przydzielili stałe oceny ważności wspomnianych cech w_j o wartościach równych $w = \{0.20, 0.30, 0.15, 0.20, 0.15\}$. W celu oceny obiektów określono skalę punktową 1-7, odzwierciedlającą opis lingwistyczny oceny. Z uwagi na występujące niepewności w procesie podejmowania decyzji, punkty zostały rozmyte do postaci odpowiednio liczb rozmytych typu CFNs i OFNs (tabela 2). Dla stymulant liczba OFN ma skierowanie dodatnie, dla destymulant skierowanie ujemne. Tabela 3 przedstawia oceny punktowe i lingwistyczne obiektów określone przez ekspertów. Na ich podstawie wyliczono liczby rozmyte będące wynikiem metody FSAW dla obu analizowanych przypadków oraz przeprowadzono wyostrzanie metodami: środka ciężkości CoG oraz z wykorzystaniem transformaty Mellina (tabela 4).

Zauważmy, że metoda FSAW daje różne rezultaty dla modeli CFNs i OFNs. Skierowane liczby rozmyte dają wyniki o skierowaniu dodatnim oraz węższy nośnik niż dla CFN⁴. Dodatkowo widzimy, że zastosowanie wyostrzania metodą środka ciężkości oraz opartej na transformacie Mellina daje ten sam ranking postaci $W4 < W2 < W1 = W3$. Wynik ten jest prawidłowością dla trójkątnych wypukłych i skierowanych liczb rozmytych (jeżeli liczba wynikowa jest właściwa). Wynika ona z określenia działań na liczbach trójkątnych w modelach CFN i OFN oraz wyprowadzonych formuł (7), (9), (10) i (12). Ponadto można zauważyć, że dla dwóch obiektów $W1$ i $W3$ wyniki wyostrzania są takie same, co nie pozwala na rozróżnienie tych obiektów. Jednakże zastosowanie transformaty Mellina daje możliwość obliczenia wariancji, co w tym przypadku pozwala na ich rozróżnienie. Z uwagi na mniejszą wariancję obiekt $W3$ jest bardziej preferowany od obiektu $W1$.

⁴ Należy zaznaczyć, że w przypadku zastosowania liczb OFN wynik może mieć postać niewłaściwej liczby rozmytej (nieposiadające funkcji przynależności).

Tabela 2. Skala ocen obiektów i ich odpowiedniki w postaci liczb CFN i OFN

Ocena punktowa	Ocena lingwistyczna	Liczba CFN lub OFN skierowana dodatnio			OFN skierowana ujemnie		
		$a \vee f(0)$	$b \vee f(1)$	$c \vee g(0)$	$f(0)$	$f(1)$	$g(0)$
1	bardzo słaba	1	1	3	3	1	1
2	słaba	1	2	4	4	2	1
3	średnio słaba	1	3	5	5	3	1
4	dostateczna	2	4	6	6	4	2
5	średnio dobra	3	5	7	7	5	3
6	dobra	4	6	7	7	6	4
7	bardzo dobra	5	7	7	7	7	5

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Ocena punktowa i lingwistyczna obiektów dla przykładu numerycznego

	Ocena punktowa					Ocena lingwistyczna				
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
W_1	3	3	5	4	3	średnio słaba	średnio słaba	średnio dobra	dostateczna	średnio słaba
W_2	1	3	5	4	3	bardzo słaba	średnio słaba	średnio dobra	dostateczna	średnio słaba
W_3	4	3	2	5	3	dostateczna	średnio słaba	słaba	średnio dobra	średnio słaba
W_4	2	2	4	4	4	słaba	słaba	dostateczna	dostateczna	dostateczna

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Porównanie wyników obliczeń metody FSAW z uwzględnieniem liczb CFN i OFN

CFN	Ocena rozmyta										$FSAW(W_i)$			ϕ_{CoG}	Transformata Mellina						
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	$m(W_i)$	$\sigma^2(W_i)$														
W_1	1	3	5	1	3	5	3	5	7	2	4	6	1	3	5	1,50	3,50	5,50	3,500	3,500	0,667
W_2	1	1	3	1	3	5	3	5	7	2	4	6	1	3	5	1,50	3,10	5,10	3,233	3,233	0,542
W_3	2	4	6	1	3	5	1	2	4	3	5	7	1	3	5	1,60	3,45	5,45	3,500	3,500	0,618
W_4	1	2	4	1	2	4	2	4	6	2	4	6	2	4	6	1,50	3,00	5,00	3,167	3,167	0,514
OFN	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	$FSAW(W_i)$			ϕ_{CoG}	$m(W_i)$	$\sigma^2(W_i)$										
W_1	5	3	1	1	3	5	3	5	7	6	4	2	1	3	5	3,10	3,50	3,90	3,500	3,500	0,027
W_2	3	1	1	1	3	5	3	5	7	6	4	2	1	3	5	2,70	3,10	3,90	3,233	3,233	0,062
W_3	6	4	2	1	3	5	1	2	4	7	5	3	1	3	5	3,20	3,45	3,85	3,500	3,500	0,018
W_4	4	2	1	1	2	4	2	4	6	6	4	2	2	4	6	2,90	3,00	3,60	3,167	3,167	0,024

Źródło: opracowanie własne.

6. Podsumowanie

W artykule przedstawiono porównanie wykorzystania trójkątnych wypukłych liczb rozmytych i trójkątnych skierowanych liczb rozmytych w metodzie FSAW. Dodatkowo badano wykorzystanie, w celu otrzymania jednoznacznego uporządkowania obiektów, dwóch metod wyostrzania: metody środka ciężkości oraz metody opartej na transformacie Mellina.

W trakcie analiz dokonano następujących obserwacji. Użyte metody wyostrzania uwzględniają klasę funkcji przynależności, jednak w przypadku trójkątnych liczb rozmytych sprowadzają się do obliczeń na podstawie charakterystycznych punktów, tzn. argumentów, na końcach ramion oraz w wierzchołku. Ponadto wyprowadzone zależności dla trójkątnych CFNs oraz OFNs pokazują, że obie stosowane metody wyostrzania dają ten sam porządek (jeżeli zagregowana OFN jest właściwa). Dodatkowo metoda oparta na transformacie Mellina jest korzystniejsza, ponieważ daje skrupulatniejsze porównanie przez wykorzystanie wariacji, jednak nie może być stosowana dla OFNs niewłaściwych. Oznacza to, że użycie trójkątnych OFNs w metodzie FSAW nie daje dodatkowych korzyści w stosunku do trójkątnych CFNs, jeśli stosuje się metodę wyostrzania środka ciężkości oraz opartą na transformacie Mellina.

Literatura

- Chen C.T., 2000, *Extension of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment*, Fuzzy Sets and Systems, 114, s. 1-9.
- Hwang C.L., Yoon K., 1981, *Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications*, Springer, Berlin.
- Kacprzak D., Rudnik K., 2015, *Podjęmowanie decyzji z wykorzystaniem rozmytej metody SAW i transformaty Mellina*, Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych, t. 16, nr 3, s.141-150.
- Kacprzak D., Rudnik K., 2016, *Metoda AHP i rozmyta SAW oparta na skierowanych liczbach rozmytych w procesie wyboru trasy dostaw*, Innowacje w Zarządzaniu i Inżynierii Produkcji, t. 2, s.71-84.
- Kosiński W., Prokopowicz P., 2004, *Algebra liczb rozmytych*, Matematyka Stosowana. Matematyka dla Społeczeństwa, 5(46), s. 37-63.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2002, *Fuzzy Numbers with Algebraic Operations: Algorithmic Approach*, [w:] Kłopotek M., Wierzchoń S.T., Michalewicz M. (red.), *Intelligent Information Systems*, Proceedings of the IIS'2002 Symposium, Sopot, Poland, June 3-6, , Physica Verlag, Heidelberg, s. 311-320.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2003, *Ordered fuzzy numbers*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematic, 52(3), s. 327-339.
- Kosiński W., Wilczyńska-Sztyma D., 2010, *Defuzzification and Implication within Ordered Fuzzy Numbers*, IEEE World Congress on Computational Intelligence, Barcelona, Spain, s.1073-1079.
- Roszkowska E., Kacprzak D., 2016, *The fuzzy SAW and fuzzy TOPSIS procedures based on ordered fuzzy numbers*, Information Sciences, vol. 369, s. 564-584.
- Yoon K.P., 1996, *A probabilistic approach to rank complex fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, 80, s. 167-176.
- Zadeh L.A., 1965, *Fuzzy sets*, Information and Control, vol. 8, s. 338-353.
- Zemanian A.H., 1968, *Generalized Integral Transformations*, Published by Interscience Publishers, New York.