

**Antoni Smoluk**

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

---

**WYKRES COSINUSA JEST ELIPSA**

---

**Streszczenie:** Artykuł ma trzy cele: dydaktyczny, naukowy i kulturalny. Proponuje się, analogicznie do określenia ciągu, nową definicję funkcji okresowej. Funkcją okresową jest każda funkcja, której dziedziną jest grupa koła  $T = \{z \in C : |z| = 1\}$  liczb zespolonych o module 1. Wykres funkcji okresowej leży na cylindrze  $T \times R$ . Wynika stąd, że wykresem cosinusa jest elipsa  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ .

**Słowa kluczowe:** dziedzina, wykres funkcji, funkcja okresowa, warunkowe ekstrema, cylinder.

DOI: 10.15611/ekt.2014.2.05

*Consuetudo est altera natura.  
(Przyzwyczajenie jest drugą naturą.)*

Funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, nazywa się krótko ciągiem; z tych samych powodów – precyzja i głęboka treść – funkcje okresowe potrzeba definiować inaczej niż dotychczas – krócej i jaśniej. Funkcja określona na kole, czyli funkcja, której dziedziną jest grupa koła,  $T = \{e^{it} : t \in R\}$ , nazywa się funkcją okresową. Multiplikatywna grupa  $T$  jest bowiem izomorficzna z addytywną grupą ilorazową  $R/2\pi$  liczb rzeczywistych  $R$ , gdzie naturalnie  $R/2\pi$  jest rodziną klas abstrakcji relacji równoważności  $x = y \pmod{2\pi}$ . Jak wykresem funkcji  $f: X \rightarrow Y$  jest podzbiór produktu  $X \times Y$ , tak wykres funkcji okresowej leży na cylindrze  $T \times R$  lub ogólniej  $T \times Y$ . Funkcje okresowe – rozumiane tradycyjnie – są funkcjami niezmienniczymi – automorfizmami – względem działania podgrupy addytywnej  $\{2\pi k : k \in Z\}$  grupy  $R$ , gdzie  $Z$  jest grupą liczb całkowitych; orbita funkcji okresowej jest jednym punktem.

**Uwaga.** *Wykresem funkcji cosinus  $\{(e^{it}, \cos t) : t \in R\}$  jest elipsa*

$$\frac{X^2}{2} + Y^2 = 1.$$

Widać to nieomal bezpośrednio. Funkcja  $f: R^2 \rightarrow R$  dwóch zmiennych, określona wzorem  $f(x, y) = x$ , osiąga ekstrema warunkowe, pod warunkiem  $x^2 + y^2 = 1$ , w punktach:  $A = (1, 0)$  – maksimum, oraz  $B = (-1, 0)$  – minimum. Naturalnie

$$\{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos t, \sin t): t \in R\};$$

przecięcie płaszczyzny  $z = x$ , czyli zbioru

$$\{(x, y, x) \in R^3: (x, y) \in R^2\},$$

z cylindrem

$$\{(x, y, z) \in R^3: (x, y) \in R^2, x^2 + y^2 = 1\},$$

w  $R^3$ , jest właśnie wykresem funkcji cosinus, a więc elipsą. Równanie tej elipsy, zapisane w nowych współrzędnych:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$

$$Y = y,$$

$$Z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$

jest dane wyżej; jest bowiem  $z = x$ , więc:  $X = \sqrt{2}x$ ,  $Y = y$ ,  $Z = 0$ . Równania parametryczne zaś dane są wzorami:

$$X = \sqrt{2} \cos t, Y = \sin t, Z = 0, t \in R.$$

Analogicznie, badając ekstrema warunkowe funkcji  $g(x, y)$ , przy tym samym warunku, widzimy, iż wykresem funkcji sinus jest elipsa

$$X^2 + \frac{Y^2}{2} = 1.$$

Jest to obrócony o  $\frac{\pi}{2}$  wykres funkcji cosinus.

Funkcje  $f(x, y) = x$  oraz  $g(x, y) = y$  są naturalnie rzutami na pierwszą i drugą oś. Funkcja  $h(x, y) = \max\{x, y\}$  nie jest projekcją, ale zasługuje na nazwę semiprojekcji. Nie jest to funkcja gładka – w punktach prostej  $y = x$  nie ma pochodnej. Cztery punkty:

$$A = (0, 1), B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), C = (1, 0), D = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

są lokalnymi ekstremami warunkowymi  $h$  na zbiorze  $x^2 + y^2 = 1$ ; w  $A$  i  $C$  funkcja  $h$  osiąga maksima, a w  $B$  i  $D$  – minima. Przecięcie cylindra wykresem funkcji  $h$  jest nową funkcją okresową – w połowie sinusem i w połowie cosinusem. Wykres

tej funkcji nie jest tworem płaskim. Podobnie rzecz się ma, gdy zamiast  $h$  weźmiemy funkcję  $j(x, y) = \min \{x, y\}$ . Przykłady te niegładkich ciągłych funkcji okresowych typu *spline* – funkcji sklejanych – pokazują, jak produktywna dydaktycznie jest zmiana definicji funkcji okresowej. Ciągła funkcja okresowa  $f \in C(T, R)$  jest przecięciem powierzchni  $F \in C([-1, 1]^2, R)$  z cylindrem. Odwzorowanie przestrzeni Banacha  $C([-1, 1]^2, R)$  w przestrzeń  $C(T, R)$ , które funkcji  $F$  przypisuje jej zawężenie do zbioru  $T$ , jest liniową surjekcją o normie 1; w obu przestrzeniach myślimy o normie Czebyszewa.

Wierzę, że wzmianka o wykresie funkcji sinus i definicji funkcji okresowej w ogólności będzie użyteczna dla nauczycieli – szczególnie tych, którzy widzą matematykę jako naukę o świecie fizycznym, dla których matematyka nie jest odmianą abstrakcyjnych wielowymiarowych szachów. Poznajemy to tylko, co istnieje. Nie ma nauki o niebycie. Przyjęcie grupy koła  $T$  za dziedzinę funkcji okresowej wyjaśnia istotę wszystkich przebiegów periodycznych w naturze: biologii, fizyce, ekonomii, kosmosie. W wirach powietrznych mieszkają przecie piękne panny – eteryczne wiły. Ruch wirowy jest powszechny. Jego istotą jest bowiem dążenie do równowagi. Czas ma naturę kołową – co jest, już było, co było – będzie. Jeśli celem szkoły jest wychowywanie, przekazywanie wiedzy i urabianie kultury naukowej, to niewątpliwie funkcje okresowe tak właśnie trzeba traktować. Stare nawyki jednak zmienia się opornie – tradycja jest stabilna. Sondaż wśród matematyków różnego szczebla (próba – z pewnością niereprezentatywna – liczyła kilkanaście osób) pokazał, że idea tu głoszona jest całkowicie obca dzisiejszym absolwentom wydziałów matematycznych. Nawet para – *nulla calamitas sola* – tytułarnych profesorów matematyki, po dwóch dniach detalicznych objaśnień, nie chwyciła, czym jest cosinus. Pomysł z nieznanymi mi powodów ostro zwalczany, jak szkodliwa i zła nauka, nie przystaje więc do stanu umysłów dzisiejszych matematyków. Może przeważa lęk przed nowym i prostym? Tak bywa u ludzi starszych – nie trzeba się uczyć, wystarcza rutyna. Moimi rozmówcami byli jednak w przewadze ludzie młodzi i bardzo młodzi. *Durnowo krysty, win kryczy pusty*. To dosadne przysłowie Rusinów lepiej pasuje do nas – rozpasanych w swej wolności – Polaków niż do dumnych Kozaków. Zawsze mamy swoje zdanie. Być może nawet ten esej jest tego przykładem. A ponadto już Arystoteles uważał, że *purus mathematicus* to *purus stupidus*. Pewnie coś w tym jest, bo mówi się, iż matka znanego matematyka żaliła się – chyba jednak z poczuciem dumy – sąsiadce: *mam trzech synów – dwóch normalnych i matematyka*.

*Ja wiem lepiej – sinus jest linią falistą i niczym więcej*. Wójtów matematycznych skorych do takich wypowiedzi jest w naszej – polskiej – matematyce sporo. A przecież jest to stara idea – koło jako dziedzina funkcji okresowej – dobrze znana specjalistom od analizy Fouriera. Tytułem przykładu podam dwa cytaty. Najpierw z trudnej popularnej książki *Kalejdoskop matematyczny* Hugona Steinhausa: „Gdy nawiniemy papier na świecę, potem przetniemy świecę ukośnie ostrym nożem i rozwinie papier, otrzymamy sinusoidę” [Steinhaus 1954, s. 234]. Cytat drugi jest z równie pięknie napisanej książki – tym razem specjalistycznej; jest nim pierwsze zdanie wstępu Jean-

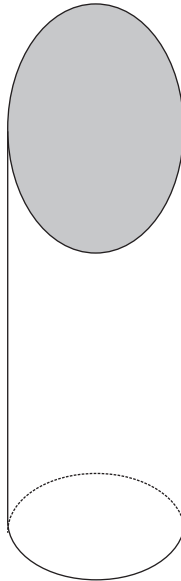
-Pierre'a Kahane'a do jego dzieła o szeregach Fouriera zbieżnych absolutnie [Kahane 1970]: „Książka traktuje o funkcjach klasy  $A$ , czyli o funkcjach ciągłych na okręgu o absolutnie zbieżnym szeregu Fouriera”. Steinhaus rozwija elipsę i pokazuje sinusoidę, Kahane zwinął sinusoidę i otrzymuje elipsę, chociaż tego wyraźnie nie pisze. Jest więc sinusoida – linia falista, jest elipsa – sinus. Przestrzeń Banacha okresowych ciągłych funkcji na prostej jest izomorficzna i izometryczna z przestrzenią funkcji ciągłych na okręgu. *Repetitio est mater studiorum*. Dziedziną funkcji okresowej *ex definitione* jest grupa koła  $T$ . Definicja ta rozszerza się natychmiast na funkcje dwuokresowe określone na torusie  $T^2$  i ogólnie na funkcje wielookresowe, których dziedziną jest produkt  $T^n$ . W tym jest cała sprawa. Można to uważać – mówiąc górnolotnie – za namiastkę nowego paradygmatu w teorii funkcji okresowych. Odrzućmy wygodną rutynę, a będzie lepiej, naturalniej, prościej. Może najwięcej zyska się zwolenników kołowej dziedziny funkcji okresowych, gdy poszerzymy wykład o przedstawioną tu myśl. Słuchacze sami zdecydują, co przyjąć za definicję. Pojawi się więcej modeli, teoria stanie się bogatsza, a wiedza szersza. Celem nauki jest wszak doskonałość.

August Kekulé, chemik niemiecki, twórca teorii budowy związków organicznych, w 1865 roku odkrył pierścieniową naturę benzenu i podał klasyczny dziś wzór strukturalny. Wzór ten powstał w sennej wizji, gdy zdrzemnął się przy biurku. Było to prawdziwe olśnienie. Podobnie rzecz ma się z elipsą i cosinusem. Elipsa jako wykres cosinusa pojawiła się we śnie. Zasługuje więc na uwagę i z tego także powodu. Śny bywają prorocze. Jest to drobny przyczynek – *toutes proportions gardées* – do psychologii odkryć naukowych. Największym pomnikiem sinusa jest chyba wrocławska wieża niebiańska *Sky Tower* (rys. 1).

Z powodu cosinusowej batalii profesor Bolesław Kopociński wygotował fraszkę na wzór nagrobków hryciańskich; Hrycianki to wieś koło Nowogródka. Żart w porę zawsze jest celny – trafia w sedno: czasem wspiera, innym razem rujnuje. Dziękuję w imieniu wszystkich sinusów i cosinusów bez względu na skutek.

### Epitafium

Tut lażył Anton Smaljuk,  
 Prafiessor wsjakich nauk.  
 Na mięso nie miał wkusa,  
 A dumał o kasinusach.  
 Ho! ho! ho!  
 Szczoz wsiakim da taho?



Rys. 1. Monument sinusa

## Literatura

Kahane J.-P., *Séries de Fourier absolument convergentes*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 50, Springer-Verlag. Berlin 1970.

Steinhaus H., *Kalejdoskop matematyczny*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1954.

### GRAPH OF THE COSINE FUNCTION IS AN ELLIPSE

**Summary:** Periodic function – it is a proposition of a new definition – has as its domain the multiplicative group  $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  of complex numbers with module one. Therefore the graph of the function  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$  lies on the cylinder  $T \times \mathbb{R}$ , and so the graph of cosine function is the ellipse  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ .

**Keywords:** domain, graph, periodic function, conditional extrema, cylinder.