Daniel Iskra
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

OPTYMALIZACJA PORTFELA INWESTYCYJNEGO ZE WZGLĘDU NA MINIMALNY POZIOM TOLERANCJI DLA USTALONEGO VaR

Wprowadzenie

W ostatnich latach bardzo popularną miarą ryzyka stała się wartość zagrożona (wartość narażona na ryzyko, Value at Risk lub w skrócie *VaR*). Definicja wartości zagrożonej $VaR(\alpha, t)$ z poziomem tolerancji α dla ustalonego czasu t jest następująca [1; 7]:

$$P(S_0 - S_t \geq VaR(\alpha, t)) = \alpha \,, \tag{1}$$

gdzie:

S_0, S_t – wartość początkowa i końcowa procesu ceny instrumentu finansowego (portfela),

α – poziom tolerancji (poziom istotności) dla szacowanej wartości *VaR*.

Wartość zagrożona to taka strata wartości instrumentu finansowego, że straty większe lub równe *VaR* mogą wystąpić z zadanym prawdopodobieństwem (poziomem tolerancji) α .

W artykule opisano model optymalizacji struktury portfela inwestycyjnego, w którym dla założonego poziomu akceptowalnej straty (wartości zagrożonej) minimalizowano poziom tolerancji α (czyli prawdopodobieństwo, że straty w portfelu będą większe od założonej). Rozkłady użyte do opisu logarytmicznej stopy zwrotu z portfela były rozkładami empirycznymi wyznaczanymi „metodą historyczną" (na podstawie danych historycznych) oraz jej rozszerzeniem uwzględniającym jednodniową pamięć. Pamięć modelowano procesem Markowa [2; 3; 6], w którym stan był determinowany znakiem ostatniej stopy zwrotu.

1. Test zgodności poziomu tolerancji wartości zagrożonej

Weryfikację, czy prognozowany poziom tolerancji α (dla ustalonego poziomu wartości zagrożonej) jest zgodny z rzeczywistym prawdopodobieństwem, można oprzeć na szeregu przekroczeń *VaR*.

Niech I_t będzie zmienną zero-jedynkową, która przyjmuje wartość 1 z prawdopodobieństwem α_t ($P(I_t = 1) = \alpha_t$), jeżeli spadek wartości portfela jest równy lub większy od ustalonej wartości *VaR* w dniu *t* i 0 w przeciwnym przypadku ($P(I_t = 0) = 1 - \alpha_t$). Należy podkreślić, że dla ustalonej wartości *VaR* (jednakowej dla każdego *t*), prawdopodobieństwo α_t w każdym dniu może być i w praktyce jest różne. Konstrukcję testu weryfikującego, czy poziom tolerancji α_t (wartość teoretyczna obliczona na podstawie przyjętego w pracy modelu), jest zgodny z rzeczywistym prawdopodobieństwem przekroczeń ustalonej wartości *VaR*, oparto na porównaniu istotnych różnic pomiędzy oczekiwanym odsetkiem przekroczeń a średnim odsetkiem przekroczeń (policzonym z próby). Rozpatrując *N*-elementowy szereg (*N* dni), wartość oczekiwaną ilości przekroczeń ustalonej wartości *VaR* zapisuje się jako:

$$E[\sum_{t=1}^{N} I_t] = \sum_{t=1}^{N} \alpha_t \, , \tag{2}$$

natomiast:

$$E[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} I_t] = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \alpha_t \tag{3}$$

jest oczekiwanym odsetkiem ilości przekroczeń ustalonej wartości zagrożonej w ciągu *N* dni.

Przez I_t^* oznaczono funkcję przyjmującą wartość 1, jeżeli w dniu *t* zaobserwowano przekroczenie ustalonej wartości *VaR* (ex post), i zero w przeciwnym przypadku. Wówczas średnia wartość odsetka przekroczeń policzona z *N*-elemen-towej próby (*N* dni) jest opisana wzorem:

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} I_t^* \, . \tag{4}$$

Stąd też w przeprowadzonym teście hipoteza zerowa ma postać:

$$H_0 : \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} I_t^* = E[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} I_t] \, , \tag{5}$$

gdzie:
N – ilość próbek użytych w teście.

Opisana hipoteza zerowa zakłada, że rzeczywisty odsetek przekroczeń policzony z próby nie różni się istotnie od wartości teoretycznej. Statystyka użyta w opisywanym teście przyjmuje postać:

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} I_t^* - E[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} I_t]}{D[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} I_t]}, \tag{6}$$

gdzie:
$E(\bullet)$, $D(\bullet)$ – wartość oczekiwana i odchylenie standardowe.

Jeżeli przyjmie się, że suma zmiennych losowych (niezależnych) I_t ma asymptotyczny rozkład normalny, wówczas statystyka (6) opisywanego testu powinna pochodzić z zestandaryzowanego rozkładu normalnego $N(0,1)$.

2. Efekt pamięci modelowany procesem Markowa

W badaniach efekt pamięci modelowano procesem Markowa, w którym stan rynku był określony znakiem ostatniej logarytmicznej stopy zwrotu (badania oparto na jednodniowych logarytmicznych stopach zwrotu) [4; 5]. W zależności od stanu rynku (od znaku ostatniej logarytmicznej stopy zwrotu) kolejna stopa zwrotu pochodzi z innego rozkładu. Dla instrumentów finansowych notowanych na polskim rynku należy wyróżnić trzy stany [4; 5]:

- „minus” – gdy ostatnia odnotowana stopa zwrotu ma znak ujemny,
- „zero” – gdy ostatnia odnotowana stopa zwrotu jest równa zero,
- „plus” – gdy ostatnia odnotowana stopa zwrotu ma znak dodatni.

Wprowadzenie stanu „zero” jest uzasadnione ze względu na ilość wystąpień stopy zerowej w historycznych notowaniach instrumentów (na GPW w Warszawie), która jest statystycznie istotna. Zazwyczaj w 75% badanych spółek występuje co najmniej 8% stóp zerowych [4; 5].

Aby móc rozważać występowanie efektu pamięci w instrumentach finansowych, należy zdefiniować, jak jest rozumiane pojęcie pamięci [4; 5]: „Powiemy, że występuje efekt pamięci, jeżeli przynajmniej dwa rozkłady stóp zwrotu będą istotnie różne od siebie. Jeżeli rozkłady stóp zwrotu w każdym stanie nie są statystycznie istotnie różne od pozostałych rozkładów, wówczas powiemy, że nie występuje efekt pamięci”.

W opisywanym podejściu szereg logarytmicznych stóp zwrotu dzieli się na trzy rozkłady: „minus”, „zero” i „plus” (nazwy analogiczne do stanów). Każdy z tych trzech rozkładów składa się z części ciągłej i części dyskretnej w zerze (atom w zerze). W każdej parze rozkładów porównywano ze sobą części ciągłe i części dyskretne.

„Powiemy, że wystąpiła istotna różnica pomiędzy dwoma rozkładami stóp zwrotu w dwóch różnych stanach, jeżeli wystąpiła istotna różnica pomiędzy częściami ciągłymi lub pomiędzy częściami dyskretnymi tych rozkładów” [4; 5].

Występowanie opisanego powyżej efektu pamięci sprawdzono dla badanych instrumentów. Do symulacji wybrano instrumenty finansowe (akcje) notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w okresie od początku 2000 roku do końca 2011 roku, których średnia ilość notowań w badanym okresie wynosiła co najmniej 240 na rok. Do weryfikacji istotnych różnic pomiędzy ciągłymi częściami rozkładów użyto testu Kołmogorowa-Smirnowa [8] z poziomem istotności 0,05, pomiędzy dyskretnymi częściami rozkładów – testu wskaźnika struktury [8] również z poziomem istotności 0,05.

W tabeli 1 przedstawiono strukturę istotnych różnic pomiędzy poszczególnymi rozkładami. Można było zaobserwować brak istotnych różnic (brak pamięci) do 6 istotnych różnic (różnice w 3 parach części ciągłych i 3 parach części dyskretnych).

Tabela 1

Ilość istotnych różnic pomiędzy rozkładami

Ilość istotnych różnic	Ilość instrumentów	Odsetek instrumentów
0	2	2,44%
1	3	3,66%
2	20	24,39%
3	22	26,83%
4	24	29,27%
5	10	12,20%
6	1	1,22%

Z tabeli 1 wynika, iż efekt pamięci zaobserwowano w około 97% spółek; tylko w 2 instrumentach (z 82) pamięci nie zaobserwowano. Podobne wyniki były obserwowane we wcześniejszych badaniach. Zazwyczaj najwięcej obserwowano 2 lub 3 istotne różnice pomiędzy rozkładami, a także nieznacznie większą ilość różnic pomiędzy dyskretnymi częściami rozkładów niż ich częściami ciągłymi. Opisywany przypadek także nie odbiega od tego schematu.

Opisany model można zastosować również do portfela inwestycyjnego. W artykule w modelowaniu efektu pamięci portfela wyróżniono tylko dwa stany: „minus” i „plus”. W pojedynczej spółce występowało średnio około 13%

stóp zerowych w badanym okresie, co przekłada się w przypadku portfela dwuskładnikowego na średnio około 1,7% stóp zerowych. Skutkiem małej ilości danych w stanie „zero" są gorsze wyniki (badania empiryczne) niż w przypadku modelu z dwoma stanami: „minus" i „plus". Stąd też w artykule zrezygnowano ze stanu zerowego w przypadku portfela inwestycyjnego. Jeżeli jednak wystąpiła stopa zerowa, przydzielano ją losowo do jednego z rozkładów „minus" lub „plus" (obecnie oba rozkłady są ciągłe, nie ma w tym przypadku części dyskretnych w zerze).

Zważywszy na fakt, iż w portfelu inwestycyjnym występują tylko dwa stany: „minus" i „plus" i oba rozkłady w tych stanach są ciągłe, istnieje największa szansa wystąpienia efektu pamięci w portfelu, jeżeli występują istotne różnice pomiędzy ciągłymi częściami rozkładów „minus" i „plus" instrumentów wchodzących w jego skład. Badania wykazują, że pamięć instrumentów w tym przypadku przenosi się na portfel inwestycyjny (dwuskładnikowy) w około 50% symulacji. Jeżeli rozkłady wyznaczano w portfelach zawierających spółki bez pamięci, efekt pamięci występował bardzo rzadko lub wcale. W pozostałych przypadkach wyniki były pośrednie.

3. Efekt pamięci modelowany procesem Markowa – minimalizacja poziomu tolerancji dla ustalonej wartości *VaR*

Opisany model zostanie użyty do wyznaczania struktury portfela inwestycyjnego o minimalnej tolerancji α dla ustalonej jednodniowej wartości zagrożonej (dokładniej dla względnej wartości zagrożonej w stosunku do początkowej wartości portfela, która dalej będzie oznaczana jako *wzVaR*). Zostanie on porównany z typowym modelem, w którym rozkłady empiryczne wyznacza się na podstawie danych historycznych, nie uwzględniając efektu pamięci. Modele te w dalszej części będą krótko nazywane modelem z pamięcią i modelem bez pamięci.

Na potrzeby symulacji skonstruowano 50 portfeli o losowo dobranych dwóch spółkach. Dla każdego z 50 portfeli inwestycyjnych minimalizację poziomu tolerancji przeprowadzono dla wartości *wzVaR* ustalonej na poziomie 0,01, 0,03 oraz 0,05. Empiryczne rozkłady stóp zwrotu dla każdego możliwego składu portfela (w obu przypadkach, model z pamięcią i bez pamięci) wyznaczano na podstawie 250 oraz 500 notowań. W symulacjach dla każdego możliwego składu portfela wyznaczano rozkład logarytmicznych stóp zwrotu, następnie na jego podstawie poziom tolerancji dla ustalonej jednodniowej względnej wartości zagrożonej. Skład portfela zmieniano co 1%, czyli co 1 akcję, zakładając, że w portfelu jest w sumie 100 akcji. Utrzymując stały stosunek ilości akcji jednej spółki do ilości akcji drugiej spółki, można otrzymać portfel o dowolnej wartości początkowej i zawsze takich samych stopach zwrotu. Kolejnym etapem był wybór składu, dla którego poziom tolerancji α był minimalny. Jeżeli rozkład stóp zwrotu był wyznaczany np. z 250 danych, wówczas jego postać była utrzymywana przez kolejne 10 dni (z 500 danych przez 20 dni). Po ich upływie szereg notowań przesuwano o 10 dni (20 dni) i procedurę powtarzano od początku.

W modelu uwzględniającym pamięć procedura optymalizacji struktury portfela była analogiczna. Różnica tkwiła w wyznaczaniu dwóch rozkładów logarytmicznych stóp zwrotu portfela: „plus” i „minus”. Następnie sprawdzano, czy rozkłady te istotnie się różnią, tzn. czy występuje pamięć (za pomocą testu Kołmogorowa-Smirnowa z poziomem istotności 0,05). Jeżeli dla danej struktury portfela nie występowała pamięć, portfel o tej strukturze pomijano. Z wszystkich możliwych składów portfela, dla których zaobserwowano pamięć, wybierano portfel o minimalnym poziomie tolerancji α.

Do weryfikacji zgodności oszacowanego minimalnego poziomu tolerancji użyto testu opisanego w rozdziale 2 z poziomem istotności 0,05.

Z przeprowadzonych badań wynika, że najlepsze wyniki uzyskano odpowiednio w przypadku modelu z pamięcią konstruowanego na podstawie 250 logarytmicznych stóp zwrotu i dla modelu nieuwzględniającego pamięci na podstawie 500 logarytmicznych stóp zwrotu. Uzasadnione będzie zatem porównanie tych dwóch przypadków. W tabeli 2 przedstawiono syntetyczne wyniki, odsetek portfeli, w których minimalny poziom tolerancji α dla ustalonego *wzVaR* (*VaR* w stosunku do wartości początkowej portfela) był pozytywnie zweryfikowany z poziomem istotności 0,05 (za pomocą testu opisanego w rozdziale 2).

Tabela 2

Zgodność prognoz poziomu tolerancji. Porównanie

Odsetek portfeli, w których poziom tolerancji przeszedł pozytywnie test zgodności (*wzVaR* – względna wartość *VaR* do początkowej wartości portfela)	
Zgodność prognoz poziomu tolerancji (dla poziomu *wzVaR* = 0.01)	
MODEL BEZ PAMIĘCI (500 DANYCH)	MODEL Z PAMIĘCIĄ (250 DANYCH)
52%	**70%**
Zgodność prognoz poziomu tolerancji (dla poziomu *wzVaR* = 0.03)	
MODEL BEZ PAMIĘCI (500 DANYCH)	MODEL Z PAMIĘCIĄ (250 DANYCH)
58%	**86%**
Zgodność prognoz poziomu tolerancji (dla poziomu wzVaR = 0.05)	
MODEL BEZ PAMIĘCI (500 DANYCH)	MODEL Z PAMIĘCIĄ (250 DANYCH)
68%	**88%**

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że model uwzględniający pamięć zdecydowanie lepiej prognozuje (co do testu zgodności) poziom tolerancji wartości zagrożonej. Uzyskane wyniki to od 70% do 88% portfeli, których prognozy poziomu tolerancji były zgodne z rzeczywistym prawdopodobieństwem przekroczenia ustalonej wartości zagrożonej. W modelu bez pamięci odsetek portfeli o pozytywnie zweryfikowanym poziomie tolerancji wynosi od 52% do 68%. Model z pamięcią ma tę przewagę, iż wykorzystuje efekt pamięci, czyli różnicę pomiędzy rozkładami konstruowanymi na podstawie znaku ostatnio zaobserwowanej stopy zwrotu. Oba modele są nieparametryczne, co jest niewątpliwie zarówno ich zaletą (pomija się estymację parametrów), jak i wadą. Cała informacja o rozkładzie stóp zwrotu, która jest dostępna za pomocą empirycznej dystrybuanty, dotyczy danych zawartych pomiędzy minimalną i maksymalną stopą zwrotu zaobserwowaną w okresie, z którego wyznaczano rozkłady. Nie są uwzględniane potencjalne skrajne wartości, które teoretycznie mogą wystąpić, a których dotąd nie zaobserwowano.

W tabeli 3 przedstawiono wyniki kolejnych symulacji, w których część danych empirycznych (lewy ogon) był aproksymowany ogonem rozkładu normalnego. Podano najlepsze wyniki dla modelu z pamięcią i bez pamięci dla poszczególnych względnych wartości zagrożonych. Modelowanie przeprowadzano dla lewego ogona rozkładu empirycznego do kwantyla 25% w przypadku ustalonej wartości $wzVaR$ = 0,03 i $wzVaR$ = 0,05 oraz do kwantyla 50% w przypadku $wzVaR$ = 0,01 (w tym przypadku prawdopodobieństwo spadku wartości portfela większego od ustalonego 1% zazwyczaj było większe niż 0,25).

Parametry warunkowych rozkładów teoretycznych szacowano metodą największej wiarygodności, testując każdorazowo zgodność dopasowania rozkładu warunkowego do danych empirycznych. Testy oparto na statystyce Kołmogorowa-Smirnowa wyznaczanej metodą Monte-Carlo na podstawie 5000 symulacji.

Tabela 3

Zgodność prognoz poziomu tolerancji. Porównanie

<table>
<tr><td colspan="2">Model, w którym lewy ogon rozkładów empirycznych aproksymowano warunkowym rozkładem normalnym
Odsetek portfeli, w których poziom tolerancji przeszedł pozytywnie test zgodności
(wzVaR – względna wartość VaR do początkowej wartości portfela)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zgodność prognoz poziomu tolerancji (dla poziomu wzVaR = 0.01)</td></tr>
<tr><td>MODEL BEZ PAMIĘCI
(500 DANYCH)</td><td>MODEL Z PAMIĘCIĄ
(250 DANYCH)</td></tr>
<tr><td>78%</td><td>70%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zgodność prognoz poziomu tolerancji (dla poziomu wzVaR = 0.03)</td></tr>
</table>

cd. tabeli 3

MODEL BEZ PAMIĘCI (250 DANYCH)	MODEL Z PAMIĘCIĄ (250 DANYCH)
92%	**88%**
Zgodność prognoz poziomu tolerancji (dla poziomu wzVaR = 0.05)	
MODEL BEZ PAMIĘCI (250 DANYCH)	MODEL Z PAMIĘCIĄ (250 DANYCH)
58%	**72%**

Symulacje wykazały, że modelowanie ogona rozkładu empirycznego rozkładem normalnym w modelu z pamięcią nie wpłynęło pozytywnie na wyniki, wręcz nawet zostały one nieznacznie pogorszone. Zdecydowanie poprawiły się natomiast wyniki uzyskane z modelu bez pamięci. Jeżeli rozkłady empiryczne były wyznaczane na podstawie 250 stóp zwrotu, odsetek portfeli o pozytywnie zweryfikowanym poziomie tolerancji wzrósł do wartości od 66% do 92%.

Można stwierdzić, że model bez pamięci z ogonami modelowanymi rozkładem normalnym daje równie dobre rezultaty, jak model z pamięcią (nieparametryczny, bez modelowania ogona rozkładu). W obu modelach (nieparametrycznym z pamięcią i bez pamięci z ogonami normalnymi) do wyznaczania rozkładów empirycznych stóp zwrotu w prawie wszystkich przypadkach należało użyć 250 danych. Można porównać obie metody ze względu na odsetek czasu, w którym można było aplikować oba modele. Nieznaczna przewaga jest na korzyść modelu z pamięcią, w którym średnio w 80% dni badanego okresu można było go zastosować (w tylu przypadkach wystąpił efekt pamięci) w porównaniu do około 70% dla modelu bez pamięci (w tylu przypadkach można było użyć rozkładu normalnego do modelowania ogona rozkładu empirycznego, co do testów zgodności rozkładów).

Podsumowanie

Niniejszy artykuł koncentruje się na wykorzystaniu wartości zagrożonej w optymalizacji struktury portfela inwestycyjnego. Przedstawiono w nim strategię optymalizacji struktury portfela inwestycyjnego ze względu na minimalny poziom tolerancji ustalonej wartości zagrożonej. Do opisania rozkładów logarytmicznej stopy zwrotu z portfela zostały użyte rozkłady empiryczne szacowane metodą historyczną oraz jej rozszerzeniem uwzględniającym jednodniową pamięć. W przypadku wyznaczania minimalnej wartości zagrożonej na podstawie kwantyla rozkładu empirycznego w modelu z pamięcią, model ten wykazuje się dobrą skutecznością (pomiędzy 70% a 88%, zależy od ustalonego poziomu *wzVaR*). W modelu bez pamięci dopiero próba modelowania ogona rozkładu empirycznego rozkładem normalnym znacząco poprawiła prognostyczne własności modelu (skuteczność pomiędzy 66% a 90%).

Można także nadmienić, że nieparametryczny model z pamięcią przełącza się całkowicie losowo pomiędzy rozkładami „minus" i „plus".

Literatura

1. Alexander C., *Market Risk Analysis: Value at Risk Models*, Vol. IV, John Wiley & Sons, England 2008.
2. Gillespie D.T., *Markov Processes. An Introduction for Physical Scientists,* Academic Press INC., San Diego 1992.
3. Iosifescu M., *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1988.
4. Iskra D., Czernik T., *Wartość zagrożona instrumentu z uwzględnieniem efektu pamięci modelowanym wielostanowym procesem Markowa. Badania symulacyjne*, w: *Matematyczne aspekty ekonomii. Ryzyko – reasekuracja – równowaga*, red. W. Kulpa, Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego, Warszawa 2008.
5. Iskra D., Czernik T., *Jednookresowy efekt pamięci modelowany trzystanowym procesem Markowa. Analiza instrumentów notowanych na GPW w Warszawiei*, w: *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, red. W. Ronka-Chmielowiec, K. Jajuga, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław 2009.
6. Kowalenko I.N., Kuzniecow N.J., Szurienkow W.M., *Procesy stochastyczne*, PWN, Warszawa 1989,
7. Wilmot P., *Paul Wilmot On Quantitive Finance*, Vol. 1, John Wiley & Sons, England 2006.
8. Wywiał J., *Wprowadzenie do wnioskowania statystycznego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice 2004.

THE MINIMUM LEVEL OF SIGNIFICANCE FOR FIXED VaR – PORTFOLIO OPTIMIZATION

Summary

The paper presents the optimization of securities portfolio. Taking into account level of acceptance α for fixed Value at Risk the optimization concerns the portfolio structure.

The paper proposes a modeling of the memory effect using the multi-state Markov process where the state is determined by the sign of the last historical growth rate.