Ewa Michalska
Renata Dudzińska-Baryła

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

ZASTOSOWANIE PRAWIE DOMINACJI STOCHASTYCZNYCH W PRESELEKCJI AKCJI

Wprowadzenie

Dla inwestora instytucjonalnego, podobnie jak dla drobnego inwestora indywidualnego, istotna jest liczba akcji tworzących portfel (stopień dywersyfikacji) oraz liczba akcji rozpatrywanych jako zbiór potencjalnych składników portfela. Mniejsza liczba akcji oznacza mniejsze koszty transakcji, łatwiej też zarządzać portfelem złożonym z mniejszej ilości walorów. Ograniczenie populacji dostępnych walorów odbywa się przez wstępną selekcję (preselekcję), najczęściej ustala się ranking spółek zgodnie z przyjętą przez inwestora zasadą [Kopańska-Bródka, 1999].

Wyłonienie najlepszych potencjalnych składników portfela poprzez zastosowanie zasady dominacji stochastycznych (w ich tradycyjnym rozumieniu) nie zawsze jest możliwe ze względu na nieporównywalność części akcji. Sytuacje, w których zasady dominacji stochastycznych nie rozstrzygają wielu wydawałoby się oczywistych wyborów wymusiły złagodzenie tych zasad przez sformułowanie zasad prawie dominacji stochastycznych [Levy, 1992]. Wskazane przez autorki pracy własności prawie dominacji stochastycznych umożliwiają porównywanie wszystkich elementów zbioru losowych wariantów decyzyjnych i tworzenie ich rankingu. W pracy przedstawiono propozycję sposobu wykorzystania prawie dominacji stochastycznych w procesie preselekcji akcji do portfela inwestycyjnego.

1. Prawie dominacje stochastyczne

Powszechnie akceptowanymi i obiektywnymi, nieparametrycznymi zasadami wyboru są dominacje stochastyczne. Symbolami F_{L1} i F_{L2} oznaczmy dystrybuanty odpowiadające losowym wariantom decyzyjnym L1 i L2, a symbolem S zbiór stanowiący łączny zbiór relatywnych wyników L1 i L2. Zasady dominacji pierwszego (FSD) oraz drugiego rzędu (SSD) formułuje się w następujący sposób [Hanoch, Levy 1969]:

FSD: L1 dominuje L2 w sensie dominacji stochastycznych pierwszego stopnia, co zapiszemy L1 $\succ_{FSD}$ L2, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in S$ zachodzi nierówność $F_{L1}(r) - F_{L2}(r) \leq 0$ oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in S$ zachodzi $F_{L1}(r) - F_{L2}(r) < 0$.

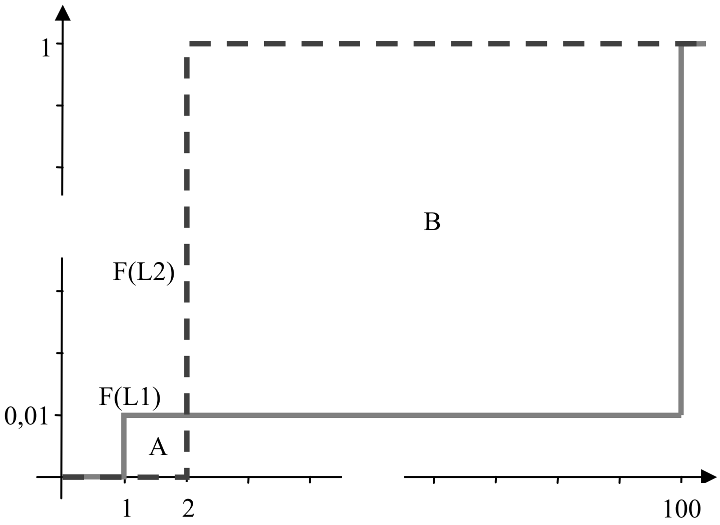
SSD: L1 dominuje L2 w sensie dominacji stochastycznych drugiego stopnia, co zapiszemy L1 $\succ_{SSD}$ L2, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in S$ zachodzi nierówność $F_{L1}^{(2)}(r) - F_{L2}^{(2)}(r) \leq 0$ oraz przynajmniej dla jednej wartości $r \in S$ zachodzi $F_{L1}^{(2)}(r) - F_{L2}^{(2)}(r) < 0$, gdzie $F_{L1}^{(2)}(r) = \int_{-\infty}^{r} F_{L1}(t)\,dt$, $F_{L2}^{(2)}(r) = \int_{-\infty}^{r} F_{L2}(t)\,dt$.

Zasady dominacji stochastycznych często jednak nie prowadzą do rozstrzygnięcia, który z rozważanych losowych wariantów decyzyjnych jest lepszy (choć wybór wydaje się oczywisty), co pokazuje prosty przykład.

Przykład 1

Wariant decyzyjny L1 to zysk 1 zł z prawdopodobieństwem 0,01 i 100 zł z prawdopodobieństwem 0,99, zaś wariant L2 to pewny zysk wynoszący 2 zł, co zapisujemy L1 = ((1;0,01);(100;0,99)) oraz L2 = ((2;1)).

W rozważanym przykładzie wariant decyzyjny L1 nie dominuje wariantu L2 w sensie dominacji stochastycznych pierwszego i drugiego stopnia, choć większość „rozsądnych" decydentów (jeśli nie wszyscy) będzie preferować L1 nad L2. Ponadto, analizując wykresy odpowiednich prawdopodobieństw skumulowanych przedstawionych na rys. 1, stwierdzamy, że obszar A odpowiadający przedziałowi, w którym L2 dominuje L1 jest bardzo mały w stosunku do obszaru B odpowiadającemu przedziałowi, w którym L1 dominuje L2 w sensie dominacji stopnia pierwszego. Można więc powiedzieć, że L1 „prawie" dominuje L2 w sensie dominacji stochastycznych stopnia pierwszego.



Rys. 1. Wykresy dystrybuant dla wariantów losowych L1 i L2

Rozważając podobne przykłady Leshno i Levy zaproponowali w 2002 r. pewne „złagodzenie" warunków dominacji stochastycznych w postaci koncepcji prawie dominacji stochastycznych (ASD, *almost stochastic dominance*) − [Leshno, Levy, 2002]. Odpowiednie warunki dla prawie dominacji stochastycznych pierwszego i drugiego rzędu mają postać:

AFSD: L1 dominuje L2 w sensie prawie dominacji stochastycznych stopnia pierwszego, co zapiszemy $L1 \succ_{AFSD} L2$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ε, $0 \le \varepsilon < \varepsilon^*$, taki że:

$$\int_{S_1} (F_{L1}(r) - F_{L2}(r))\, dr \le \varepsilon \int_{S} | F_{L1}(r) - F_{L2}(r) |\, dr\,,$$

gdzie S jest łącznym zbiorem wyników wariantów losowych L1 i L2 oraz

$$S_1 = \{r \in S\colon F_{L2}(r) < F_{L1}(r)\}.$$

ASSD: L1 dominuje L2 w sensie prawie dominacji stochastycznych stopnia drugiego ASSD, co zapiszemy $L1 \succ_{ASSD} L2$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ε, $0 \le \varepsilon < \varepsilon^*$, taki że:

$$\int_{S_2} (F_{L1}(r) - F_{L2}(r))\, dr \le \varepsilon \int_{S} | F_{L1}(r) - F_{L2}(r) |\, dr\,,$$

oraz

$$E(L1) \ge E(L2),$$

gdzie S jest łącznym zbiorem wyników wariantów losowych L1 i L2 oraz $S_2 = \{r \in S_1 : F_{L2}^{(2)}(r) < F_{L1}^{(2)}(r)\}$. E(L1), E(L2) oznaczają wartości oczekiwane rozważanych losowych wariantów decyzyjnych L1, L2.

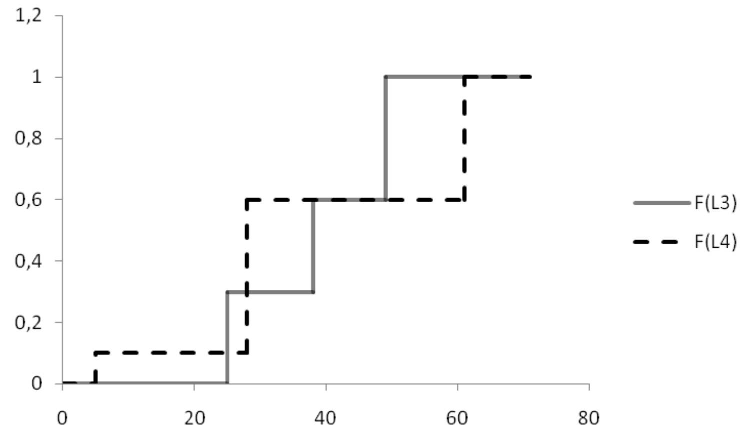
Zarówno dla prawie dominacji stochastycznych rzędu pierwszego, jak i drugiego przyjmuje się, że wartość parametru ε związanego z obserwowanym obszarem niezgodności powinna być mniejsza niż ε* = 0,5[1].

W analizowanym wcześniej Przykładzie 1, losowy wariant decyzyjny L1 nie dominuje L2 w sensie dominacji pierwszego ani drugiego stopnia, jednak dominuje L2 w sensie AFSD dla ε = 0,000103[2]. Podstawową korzyścią jaką daje stosowanie kryteriów prawie dominacji stochastycznych jest możliwość ograniczenia zbioru nieporównywalnych (ze względu na inne kryteria) losowych wariantów decyzyjnych. Ponadto prawie dominacje stochastyczne ujawniają preferencje zgodne z intuicją, podczas gdy warunki dominacji stochastycznych (w tradycyjnym rozumieniu) mogą nie potwierdzać intuicyjnych wyborów decydenta.

Przykład 2

Rozpatrzmy następujące losowe warianty decyzyjne L3 = ((25;0,3);(38;0,3);(49;0,4)) oraz L4 = ((5;0,1);(28;0,5);(61;0,4)).

Dla pary wariantów L3 i L4 nie zachodzi dominacja w sensie kryteriów FSD (co ilustruje rys. 2) oraz SSD (tab. 1-2).



Rys. 2. Wykresy dystrybuant dla wariantów losowych L3 i L4

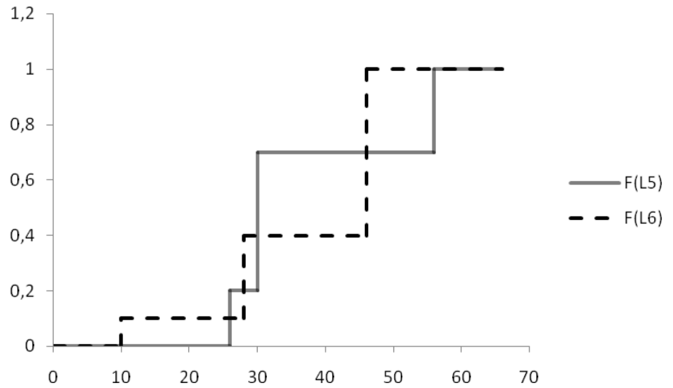
[1] W literaturze definiuje się także ε* − AFSD oraz ε* − ASSD, gdzie ε* oznacza wskaźnik dopuszczalnej niezgodności (ang. *„allowed" area violation*), przy czym 0 ≤ ε < ε* ≤ 0,5 [Levy, Leshno, Leibowitch, 2010].

[2] Dla AFSD wartość parametru ε wyznacza się obliczając iloraz pola obszaru A i sumy pól obszarów A i B.

Według kryterium AFSD podobnie jak według kryterium ASSD wariantem dominującym jest L4 (tab. 1-2).

Przykład 3

Rozważmy losowe warianty decyzyjne L5 = ((26;0,2);(30;0,5);(56;0,3)) oraz L6 = ((10;0,1);(28;0,3);(46;0,6)).



Rys. 3. Wykresy dystrybuant dla wariantów losowych L5 i L6

Dla pary L5, L6 brak dominacji w sensie kryteriów FSD, SSD oraz AFSD (tab. 1-2). Według kryterium ASSD wariantem dominującym jest L6. Dla kryterium ASSD obie wartości parametru ε są mniejsze od 0,5, ponadto E(L5) = E(L6) o dominacji decyduje wówczas mniejsza wartość parametru ε, zatem L6 dominuje L5.

Tabela 1

Wartości parametrów dla wariantów decyzyjnych L1-L6

Parametr	Warianty decyzyjne					
	L1	L2	L3	L4	L5	L6
E(L)	99,01	2,00	38,50	38,90	37,00	37,00
ε_{AFSD}	0,000103 dla (L1, L2)		0,519231 dla (L3, L4)		0,5 dla (L5, L6)	
	0,999897 dla (L2, L1)		0,480769 dla (L4, L3)		0,5 dla (L6, L5)	
ε_{ASSD}	0,000103 dla (L1, L2)		0,038462 dla (L3, L4)		0,3 dla (L5, L6)	
	0,999794 dla (L2, L1)		0,480769 dla (L4, L3)		0,2 dla (L6, L5)	

Tabela 2

Dominacje dla wariantów decyzyjnych L1-L6

Kryterium decyzyjne	Przykład 1	Przykład 2	Przykład 3
FSD	-	-	-
SSD	-	-	-
AFSD	L1 $\succ$ L2	L4 $\succ$ L3	-
ASSD	L1 $\succ$ L2	L4 $\succ$ L3	L6 $\succ$ L5

Wzajemne zależności pomiędzy kryteriami FSD, SSD, AFSD i ASSD ilustruje diagram na rys. 4.

$$\begin{array}{ccc} \textbf{FSD} & \Rightarrow & \textbf{SSD} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \textbf{AFSD} & \Rightarrow & \textbf{ASSD} \end{array}$$

Rys. 4. Zależności pomiędzy kryteriami decyzyjnymi FSD, SSD, AFSD i ASSD

Zależności te znajdują potwierdzenie w literaturze [Leshno, Levy, 2002; Levy, 1992].

3. Kryterium prawie dominacji stochastycznych w tworzeniu rankingu akcji

Relacje dominacji stochastycznych pierwszego, drugiego i wyższych rzędów są porządkiem częściowym [Dentcheva, Ruszczyński, 2003]. W zbiorze losowych wariantów decyzyjnych mogą więc wystąpić elementy nieporównywalne (ze względu na kryterium decyzyjne w postaci dominacji stochastycznych określonego stopnia), co uniemożliwia utworzenie ich rankingu. Relacja prawie dominacji stochastycznych stopnia drugiego dla ($\varepsilon^* = 0{,}5$) jest również porządkiem częściowym. Co więcej, badając relacje prawie dominacji stochastycznych pierwszego i drugiego stopnia na zbiorze (różnych) losowych wariantów decyzyjnych zauważono pewne ciekawe własności dotyczące wartości parametrów ε. Dla dowolnych (różnych) wariantów decyzyjnych Li oraz Lj zachodzi:

(1) $\varepsilon_{AFSD}(Li, Lj) + \varepsilon_{AFSD}(Lj, Li) = 1$,

(2) $\varepsilon_{ASSD}(Li, Lj) + \varepsilon_{ASSD}(Lj, Li) = \max\{\varepsilon_{AFSD}(Li, Lj), \varepsilon_{AFSD}(Lj, Li)\}$,

gdzie $\varepsilon_{AFSD}(Li, Lj)$ oznacza udział obszaru niezgodności z dominacją pierwszego stopnia Li nad Lj, w obszarze zawartym pomiędzy dystrybuantami F_{Li} i F_{Lj}, natomiast $\varepsilon_{AFSD}(Lj, Li)$ oznacza udział obszaru niezgodności z dominacją pierwszego stopnia Lj nad Li, w obszarze zawartym pomiędzy dystrybuantami F_{Li} i F_{Lj}, zaś parametry $\varepsilon_{ASSD}(Li, Lj)$ oraz $\varepsilon_{ASSD}(Lj, Li)$ oznaczają odpowiednie udziały obszarów niezgodności dla dominacji stopnia drugiego w obszarze zawartym pomiędzy dystrybuantami F_{Li} i F_{Lj}. Dla dowolnych dwóch różnych wariantów decyzyjnych Li oraz Lj mamy więc Li $\succ_{ASSD}$ Lj lub Lj $\succ_{ASSD}$ Li lub Li$\sim_{ASSD}$ Lj. Przy czym Li$\sim_{ASSD}$ Lj oznacza, że warianty losowe Li oraz Lj są indyferentne, tzn. E(Li)=E(Lj) oraz $\varepsilon_{ASSD}(Li, Lj) = \varepsilon_{ASSD}(Lj, Li) = 0{,}25$. Wskazane własności oznaczają, że relacja prawie dominacji stochastycznych stopnia drugiego (dla $\varepsilon^* = 0{,}5$) pozwala na porównanie wszystkich elementów zbioru losowych wariantów decyzyjnych i utworzenie ich rankingu.

W tworzeniu rankingu losowych wariantów decyzyjnych wykorzystamy zaproponowaną przez Frencha reprezentację funkcyjną relacji preferencji (ang. *agreeing ordinal value function*) − [French, 1993, s. 61-101]. Niech **L** oznacza zbiór rozważanych (różnych) losowych wariantów decyzyjnych, reprezentacją funkcyjną relacji preferencji jest funkcja h: $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$, definiowana następująco:

h(Li)={ilość losowych wariatów Lj $\in$ L takich, że Li $\succ$ Lj lub Li $\sim$ Lj}.

Funkcja ta pozwala na przyporządkowanie danemu losowemu wariantowi decyzyjnemu liczby oznaczającej ilość zdominowanych i indyferentnych wariantów losowych ze zbioru **L**. Otrzymane wartości określają miejsca w rankingu odpowiednich klas obojętności (tworzonych z wariantów losowych o takiej samej wartości funkcji h). Pierwsze miejsce w rankingu zajmuje klasa obojętności, której odpowiada największa z otrzymanych wartość funkcji h(Li), zaś ostatnie miejsce w rankingu zajmuje klasa obojętności z najmniejszą wartością h(Li).

Proponowaną w pracy metodykę tworzenia rankingu akcji na podstawie kryterium prawie dominacji stochastycznych zastosowano dla danych rzeczywistych. Przeanalizowano relacje prawie dominacji stochastycznych AFSD i ASSD (dla $\varepsilon^* = 0{,}5$) na zbiorze **A**={A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9} zawierającym dziewięć różnych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Wśród wybranych znalazły się spółki należące do trzech sektorów, których indeksy miały najwyższe stopy zwrotu od stycznia do października 2012 r. Były to sektory: chemia, paliwo oraz surowce. Z każdego z rozważanych sektorów wybrano po trzy spółki:
A={A1-PUŁAWY, A2-SYNTHOS, A3-AZOTYTARNOW, A4-PKNORLEN, A5-LOTOS, A6-PGNIG, A7-KGHM, A8-JSW, A9-BOGDANKA}.

Zestawienie wartości parametrów ε dla prawie dominacji stochastycznych pierwszego i drugiego stopnia przedstawiono w tab. 3-4. Dla dowolnych (różnych) akcji Ai, Aj$\in$**A** zachodzi:

(1) ε_{AFSD} (Ai, Aj) + ε_{AFSD} (Aj, Ai) = 1,

(2) ε_{ASSD} (Ai, Aj) + ε_{ASSD} (Aj, Ai) = max{ε_{AFSD} (Ai, Aj), ε_{AFSD} (Aj, Ai)}.

Oznacza to, że w rozważanym zbiorze **A** nie ma elementów nieporównywalnych ze względu na badaną relację ASSD. Co więcej, w badanym zbiorze **A** wszystkie elementy są porównywalne już ze względu na kryterium AFSD (tab. 3).

Tabela 3

Wartości parametrów $\varepsilon_{AFSD}(Ai,Aj)$ dla akcji A1-A9

$\varepsilon_{AFSD}(Ai,Aj)$	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
A1		0,37269	0,60325	0,41137	0,42851	0,54046	0,34908	0,26255	0,30723
A2	0,62731		0,65070	0,54582	0,56109	0,61315	0,47310	0,51499	0,47202
A3	0,39675	0,34930		0,32771	0,35056	0,46174	0,30433	0,29619	0,26190
A4	0,58863	0,45418	0,67229		0,52051	0,59607	0,34085	0,45885	0,40138
A5	0,57149	0,43891	0,64944	0,47949		0,59981	0,36717	0,45105	0,36640
A6	0,45954	0,38685	0,53826	0,40393	0,40019		0,36495	0,37965	0,35330
A7	0,65092	0,52690	0,69567	0,65915	0,63283	0,63505		0,54219	0,49127
A8	0,73745	0,48501	0,70381	0,54115	0,54895	0,62035	0,45781		0,42413
A9	0,69277	0,52798	0,73810	0,59862	0,63360	0,64670	0,50873	0,57587	

Tabela 4

Wartości parametrów $\varepsilon_{ASSD}(Ai,Aj)$ dla akcji A1-A9

$\varepsilon_{ASSD}(Ai,Aj)$	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
A1		0	0,36913	0,01637	0	0,09238	0	0,13318	0,05477
A2	0,62731		0,65070	0,54582	0,56109	0,45058	0,34233	0,51499	0,47202
A3	0,23412	0		0,03814	0	0,05510	0,00247	0,15044	0,13127
A4	0,57226	0	0,63415		0,11371	0,24710	0	0,44134	0,37199
A5	0,57149	0	0,64944	0,40679		0,26404	0,02972	0,44278	0,36640
A6	0,44808	0,16256	0,48316	0,34897	0,33577		0,22653	0,37965	0,35330
A7	0,65092	0,18457	0,69319	0,65915	0,60311	0,40852		0,54219	0,48974
A8	0,60427	0	0,55337	0,09981	0,10617	0,24070	0		0,04270
A9	0,63800	0,05597	0,60683	0,22663	0,26721	0,29340	0,01899	0,53317	

Ustalone relacje prawie dominacji stochastycznych stopnia pierwszego pokrywają się z relacjami prawie dominacji stochastycznych stopnia drugiego. Odpowiadające poszczególnym akcjom wartości funkcji h(Ai) zawiera tab. 5.

Tabela 5

Relacje prawie dominacji stochastycznych AFSD i ASSD
oraz wartości funkcji h(Ai) dla akcji A1-A9

ASSD	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	h(Ai)
A1		$\succ$	$\prec$	$\succ$	$\succ$	$\prec$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	6
A2	$\prec$		$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\succ$	$\prec$	$\succ$	2
A3	$\succ$	$\succ$		$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	8
A4	$\prec$	$\succ$	$\prec$		$\prec$	$\prec$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	4
A5	$\prec$	$\succ$	$\prec$	$\succ$		$\prec$	$\succ$	$\succ$	$\succ$	5
A6	$\succ$	$\succ$	$\prec$	$\succ$	$\succ$		$\succ$	$\succ$	$\succ$	7
A7	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$		$\prec$	$\succ$	1
A8	$\prec$	$\succ$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\succ$		$\succ$	3
A9	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$	$\prec$		0

Wyznaczone wartości funkcji h(Ai) stanowią podstawę do utworzenia rankingu rozważanych akcji. Otrzymane różne wartości funkcji h(Ai) dla akcji A1-A9 oznaczają, że każda z klas obojętności będzie zawierała tylko jeden element. Pierwsze miejsce w rankingu zajmie zatem akcja, której odpowiada największa z otrzymanych wartość funkcji h(Ai), zaś ostatnie miejsce w rankingu zajmuje walor z najmniejszą wartością h(Ai). Wyniki rankingu przedstawia tab. 6.

Tabela 6

Rankingi akcji A1-A9 według kryterium AFSD i ASSD

Ranking	AFSD (lub ASSD)
1	A3
2	A6
3	A1
4	A5
5	A4
6	A8
7	A2
8	A7
9	A9

Według kryterium prawie dominacji stochastycznych pięć najlepszych spółek w rozważanym zbiorze to: AZOTY TARNOW, PGNIG, PUŁAWY, LOTOS oraz PKNORLEN.

Podsumowanie

Przedstawiona w pracy propozycja tworzenia rankingu akcji na podstawie relacji prawie dominacji stochastycznych ASSD jest możliwa dzięki szczególnym własnościom tych relacji, których nie posiadają zwykłe dominacje stochastyczne. Często też w przypadku prawie dominacji stochastycznych rozstrzygającą jest już dominacja stopnia pierwszego, co zaprezentowano w przykładzie dotyczącym danych rzeczywistych pochodzących z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Dla danej listy rankingowej, preselekcja odbywa się ze względu na ograniczenie liczebności albo ze względu na wartość parametru, według którego został dokonany ranking.

Literatura

Dentcheva D., Ruszczyński A. (2003): *Optimization with Stochastic Dominance Constraints*. „SIAM Journal on Optimization", Vol. 14, No. 2.

French S. (1993): *Decision Theory. An Introduction to the Mathematics of Rationality*. Ellis Horwood Limited.

Hanoch G., Levy H. (1969): *The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk*. „Review of Economic Studies", Vol. 36, No. 3.

Kopańska-Bródka D. (1999): *Optymalne decyzje inwestycyjne*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.

Leshno M., Levy H. (2002): *Preferred by „All" and Preferred by „Most" Decision Makers: Almost Stochastic Dominance.* „Management Science", Vol. 48, Iss. 8.

Levy H. (1992): *Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis*. „Management Science", Vol. 38, No. 4.

Levy H., Leshno M., Leibovitch B. (2010): Economically Relevant Preferences for all Observed Epsilon. „Annals of Operations Research", Vol. 176.

ALMOST STOCHASTIC DOMINANCE IN STOCKS PRESELECTION

Summary

The stochastic dominance rules are a very popular tool in the support of decision making in various fields of economics and management. However the selection of the best alternative on the basis of stochastic dominance is sometimes impossible due to incomparability of alternatives. Some particular properties of almost second degree stochastic dominance (which stochastic dominance do not posses) allow to compare all elements of the set of random alternatives and to build a ranking of them.

The aim of the article is to propose a stocks preselection method based on almost stochastic dominance. Our method allow to determine the set of the best stocks and thereby to reduce the number of stocks as a potential elements of a portfolio. Such reduction is very important nowadays because with every year more and more stocks are quoted on Stock Exchange in Warsaw.