Włodzimierz Szkutnik
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

STATYSTYCZNA NIEOKREŚLONOŚĆ W WYCENIE CHARAKTERYSTYK RYNKÓW FINANSOWYCH

Wprowadzenie

Tematem rozważań będą modele charakterystyczne dla finansowego rynku w sytuacjach statystycznie nieokreślonych, finansowe kalkulacje w takich warunkach i zarządzanie portfelem pochodnych finansowych instrumentów. Ponadto odchodząc od typowego założenia dotyczącego stochastycznej struktury cen akcji przy modelowaniu stóp zwrotu (ich logarytmów) rozpatrzony zostanie wariantowy przypadek, w którym nie czyni się takich założeń. Rozważany też będzie „prosty" jednoetapowy model (B, S)-rynku, składający się z bankowego konta (pozbawiony ryzyka papier wartościowy) $B = (B_n)$ i jednej akcji $S = (S_n)$ z $n = 0, 1$. Oceniona zostanie górna i dolna gwarantowana cena w tym jednokrotnym modelu rynku.

Rozpatrzona w opracowaniu egzemplifikacja modelu finansowego rynku w warunkach statystycznej nieokreśloności została ujęta na przykładzie zadania modelowania racjonalnego zachowania inwestora. Pokazano sposób stwierdzenia istnienia dopuszczalnego rozwiązania zadania poszukiwania strategii zarządzania portfelem papierów wartościowych, zabezpieczającej zadany poziom dochodowości i ryzyka. Omówiono algorytm skonstruowania optymalnego zarządzania portfelem pochodnych instrumentów finansowych w warunkach nieokreśloności w określeniu dochodowości tego lub innego finansowego instrumentu.

1. Model finansowego rynku dla sytuacji stochastycznie nieokreślonych

W klasycznym sformułowaniu zadania wyboru struktury portfela ryzykownych inwestycji zakłada się istnienie N ryzykownych papierów wartościowych (lokat) z zadanymi dochodami (zyskiem) r_i, $i = 1, ..., N$, które są traktowane jako zmienne losowe. Przyjmujemy następujące oznaczenia:
x_i – wartość oczekiwana i-tego papieru wartościowego,
$V = \{\sigma_{ij}\}$ – macierz kowariancji między i-tym a j-tym papierem wartościowym.

Założymy także, że istnieje możliwość lokowania pozbawionego ryzyka i odpowiednią zyskowność oznaczymy przez x_0.

Portfel określony jest formalnie przez wektor:

$$(y_o, y)^T = (y_o, y_1, ..., y_n) \in R^{N+1}$$

którego każda współrzędna odpowiada części kapitału zainwestowanego w odpowiedni finansowy instrument.

$y_o = 1 - (e, y)$, gdzie symbol $(\cdot, \cdot\cdot)$ oznacza iloczyn skalarny; o wartości akcji y_i nie dopuszcza się ujemności, co stwarza możliwość otrzymania kredytu na nieryzykowny procent przy niedopuszczalnej krótkiej sprzedaży, co znaczy, że nie jest to możliwe w obecności instrumentów *short selking* (krótka sprzedaż).

Dochodowość portfela określa równość:

$$\mu(\hat{x}, \hat{y}) = y_o \cdot x_o + (y, x)$$

a odpowiadające tej dochodowości ryzyko:

$$\sigma(y) = (y^T \cdot V \cdot y)^{\frac{1}{2}}$$

gdzie:

$$\hat{x} = (x_o \cdot x)^T, \ \hat{y} = (y_o, y)^T$$

Charakterystyki:

$$\mu = \mu(\hat{x}, \hat{y}) \text{ i } \sigma = \sigma(y)$$

efektywnych (niedominujących) portfeli określone są w relacji (macierz V z założenia jest dodatnio określona):

$$\mu = x_o + g \cdot \sigma, \quad g = \sqrt{(x - x_0 \cdot e)^T V^{-1} (x - x_0 e)}, \ \mu \geq x_0$$

W tej relacji wartość x_i i σ_{ij} są z założenia z góry zadane i stałe.

Struktura efektywnego portfela

Przy zadanej, odpowiadającej zadanej dochodowości μ, poziomowi ryzyka ryzyka σ, struktura efektywnego portfela może być wyrażona następująco:

$$y = \frac{\mathrm{V}^{-1}(x - x_o \cdot e)}{(x - x_0)^T V^{-1}(x - x_0 e)}(\mu - r_0)$$

lub odpowiednio:

$$y = \frac{V^{-1}(x - x_0 \cdot e)}{\sqrt{x - x_0 e)^T V^{-1}(x - x_0 e)}} \cdot \sigma$$

1.1. Wariant zadania zachowania efektywności portfela w warunkach zmieniających się oczekiwanych dochodowości aktywów

Przy zmieniającej się oczekiwanej dochodowości aktywów, co jest oczywiste w warunkach rynkowych, założymy, że wielkość x_i reprezentująca ryzykowne papiery wartościowe (lokaty) jest zmienna w czasie i jej dynamikę opisuje równanie różniczkowe:

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + q(t), \;\; q(t) \in Q(t), \;\; t_0 \leq T \leq \theta \tag{1}$$

$$x(t_0) = x^0 \tag{2}$$

Wieloznaczna funkcja *Q(t)* (zbiór) wyraża nieokreśloność w zmianach dochodowości. Będziemy zakładać, że zobrazowanie funkcji *Q(t)* jest kawałkami ciągłe względem *t* i przy każdym ustalonym *t* zbiory *Q(t)* są wypukłe i zwarte, przy czym $0 \in Q(t)$.

Zakłada się, że można zmieniać strukturę portfela w każdym momencie $t \in [t_0, \theta]$ z ograniczoną dynamiką (tempem, prędkością). Dynamika zmienności portfela w tym przypadku jest opisana w równaniu:

$$\frac{dy}{dt} = u, \qquad y_0 = 1 - (e, y)$$

gdzie *u* oznacza działanie zarządcze, ograniczające wpływ efektywnościowy wyrażone w relacji $u \in P(t)$; zakłada się, że *P(t)* ma własności analogiczne do własności zobrazowania *Q(t)*.

1.2. Cel inwestycyjnej korekty działań efektywnościowych – – zachowania efektywności

Oczywiste jest, żeby wymagać od oddziaływania efektywnościowego u zachowania efektywności portfela i zabezpieczenia jego charakterystyk: ryzyko-dochodowość. Merytoryczne sformułowanie zadania zakłada wybór strategii zarządczej realizującej się w postaci zarządczego wpływu efektywnościowego działania $u = u(t)$, które formułuje się według dostępnej w momencie t informacji i zabezpiecza wymagane własności portfela. Określona strategia wyraża regułę określającą dynamikę wektora Y rozkładu zainwestowanych środków w ryzykowne i wolne od ryzyka aktywa.

Formalnie dopuszczalną strategią regulującą skład portfela dla podtrzymywania jego efektywnościowych cech, określane jest wieloznaczne przekształcenie:

$$U(t, x, y)$$

mierzalne względem t, półciągłe z góry względem x, y oraz z wypukłymi zwartymi wartościami:

$$U(t, x, y) \subseteq P(t).$$

1.3. Dynamiczna restrukturyzacja portfela

Formalna procedura w dynamicznej restrukturyzacji portfela ma następujący przebieg:

Równanie (1) i równanie:

$$\frac{dy}{dt} = u, \quad u \in U(t, x, y) \tag{3}$$

przy uczynionych powyżej założeniach ma bezwzględnie ciągłe rozwiązanie:

$$x(t), y(t), \text{ gdzie } \; y_0(t) = 1 - (e - y(t)), \quad t_0 \le t \le \theta$$

dla dowolnych początkowych warunków (2) oraz:

$$y(t_o) = y_0, \; y_0^0 = 1 - (e, y^0) \tag{4}$$

przy czym rozwiązanie przedłużone jest na cały odcinek czasu $[t_o, \theta]$.

Dla każdego rozwiązania wartości $x(t)$ i udziałów $y(t)$:

$$x(t) = (x_0(t), x(t))^T, \quad y(t) = (y_0(t), y(t))^T$$

można rozpatrzyć ewolucję charakterystyk portfela, wyrażających dochodowość i ryzyko:

$$\mu(t) = y_0(t) \cdot x_0(t) + (y(t), x(t))$$

$$\sigma(t) = (y^T(t) \cdot V^{-1} \cdot y(t))^{\frac{1}{2}}$$

Zbiorowi efektywnych portfeli na płaszczyźnie μ, σ odpowiada prosta zmieniająca się w czasie. Dla efektywności portfela wystarcza, aby $\mu(t)$ i $\sigma(t)$ były ze sobą w analogicznej relacji, jak wcześniej charakterystyki efektywnych (niedominujących) portfeli, tzn.

$$\mu(t) = x_0(t) + g(t) \cdot \sigma(t)$$

gdzie:

$$g(t) = \sqrt{(x(t) - x_0(t) \cdot e)^T V^{-1}(x(t) - x_0(t) \cdot e)} = \| x(t) - x_0(t) \cdot e \| \cdot V^{-1}$$

2. Finansowe oceny (kalkulacje) na rynku dla sytuacji nieokreślonych statystycznie

Stawiamy następujący cel regulacyjnych działań efektywnościowych – – zachowanie efektywności portfela w rozpatrywanym przedziale czasu:

Załóżmy, że stopa wolna od ryzyka jest stała:

$$x_0(t) = r_0, \text{ tj. } \frac{dx_0}{dt} = 0, \text{ oprócz tego } A(t) \equiv 0$$

Wtedy dochodowość portfela wynosi:

$$\mu(x(t), y(t)) = y_0(t) \cdot r_0 + (x(t), y(t))$$

a odpowiednie ryzyko:

$$\sigma(y(t)) = \sqrt{(y^T(t) \cdot V \cdot y(t)} = y(t)_V$$

Dynamiczną efektywność portfela zabezpiecza się według formuły wyrażonej we wzorze:

$$\mu(x(t), y(t)) = r_0 + g(t) \cdot \sigma(T)$$

Można także wskazać postać działania efektywnościowego wyrażonego przez $u(t)$, istnienie dopuszczalnej strategii-działania efektywnościowego przy zarządzaniu portfelem papierów wartościowych, która zabezpiecza zadany poziom dochodowości i ryzyka. Ponadto można wskazać model zachowania inwestora na rynku instrumentów finansowych oraz optymalną strategię zarządzania i kryterium optymalności.

Przyjmiemy, że y^0 – efektywny portfel dla $\widehat{x}^0$ z oczekiwaną wartością dochodowości:

$$\mu^0 = \mu^0(x^0, y^0) \quad \text{i} \quad \sigma^0 = \sigma^0(y^0)$$

2.1. Dopuszczalna strategia zarządzania

Problem, jaki się pojawia w zaprezentowanym wyżej ujęciu efektywności portfela wiąże się ze wskazaniem strategii zarządzania-działania efektywnościowego $U = U(t, x, y)$, będącej „gwarantem" efektywności portfela $y(t)$ dla $x(t)$ ($t_0 \leq t \leq \theta$), jakie by nie były rozwiązania $x(t)$, $y(t)$ równań różniczkowych (1), (2) i (3), (4).

Dopuszczalna strategia zachowania efektywności portfela

W pierwszej kolejności skupimy uwagę na wskazaniu dopuszczalnego działania efektywnościowego, będącego rozwiązaniem powyższego problemu i zabezpieczającego nałożony poziom ryzyka:

$$\sigma(y(t)) \leq \sigma^0$$

Ponadto wskazana zostanie strategia-działanie efektywnościowe, będące rozwiązaniem sformułowanego problemu i zabezpieczającego wymagany poziom dochodowości:

$$\mu(x(t), y(t)) \geq \mu^0$$

W dalszej części będziemy zakładać spełnienie następującego warunku regularności:

$$\| x^0 - e \cdot r_{-0} \|_{V^{-1}} - \max_{\|l\|_{V^{-1}}=1} \int_{t_0}^{\theta} \rho(l / Q(t))dt = d > 0 \tag{5}$$

gdzie:

ρ $(l/Q(t))$ – funkcja oporowa zbioru $Q(t)$,

$\rho \ (l / z) = \max\{(l, z) : z \in Z\}.$

W kontekście omawianego tu istnienia działania efektywnościowego ważne jest to, że spełnienie warunku regularności (5) jest istotne dla rozwiązania sformułowanego problemu, a ponadto uwzględnia występowanie na rynku pożądanych sytuacji. Mamy bowiem własność:

1. Warunek regularności zabezpiecza relacje:

$$\| x(t) - r_0 \cdot e \|_{V^{-1}} \geq d \tag{6}$$

dla każdego $t \in [t_0, \theta]$, co oznacza, że niemożliwa jest sytuacja, kiedy dochodowości wszystkich ryzykownych aktywów są jednocześnie bliskie stopie wolnej od ryzyka.

Główny problem rozpatrywany w tym rozdziale dotyczący wskazania dopuszczalnej strategii-działania efektywnościowego portfela i jednocześnie zapewniającej narzucony poziom dochodowości μ^0 jest rozwiązany poprzez wskazanie relacji zachodzącej między wieloznacznymi przekształceniami $Q(t)$ i $P(t)$. Warunek ten, który jest wystarczający, jest wyrażony następująco:

$$d^2 \cdot \rho(l / P(t)) - (\mu^0 - r_0) \cdot \rho(l / V^{-1} / Q(t)) \geq (\mu^0 - r_0) \max_{q=1} \rho(q / Q(t))$$
$$\forall_l \, l_{V^{-1}} = 1, \ \forall_t \, t \in [t_0, \theta] \tag{7}$$

Natomiast wskazanie dopuszczalnej strategii-działania efektywnościowego zapewniającego nieprzekroczenie poziomu ryzyka σ^0 wymaga spełnienia relacji:

$$d \cdot \rho(l / P(t)) - \sigma^0 \cdot \rho(l / v^{-1} Q(t)) \geq \sigma^0 \cdot \max_{q=1} \rho(q / Q(t)) \tag{8}$$

W dalszej kolejności rozważania prowadzą do określenia zbioru wszystkich możliwych wartości określających dynamikę struktury efektywnego portfela.

2.2. Krańcowa struktura efektywności portfela jako element działań efektywnościowych

Okazuje się, czego nie będziemy tu wykazywać, że przy spełnieniu warunku regularności (5) i dostatecznego warunku regularności (8) zapewniającego zadany poziom dochodowości μ^0, a także wtedy, gdy spełnione są warunki (5) oraz (7) zachodzi inkluzja:

$$R(t) \subseteq P(t)$$

dla prawie wszystkich $t \in [t_0, \theta]$.

Zbiór $R(t)$ dla każdego t wyraża możliwe wartości krańcowej struktury efektywności portfela, co jest tożsame z wyrażeniem dynamiki struktury efektywnego portfela:

$$\frac{dz(t)}{dt}$$

Wartości te odpowiadają możliwym realizacjom $z(t)$ określającym strukturę efektywnego portfela, odpowiadającego zadanej dochodowości lub zadanemu poziomowi ryzyka σ. Realizacje $z(t)$ określone są bowiem następująco:

$$z(t) = \frac{V^{-1}(x(t) - r_0 \cdot e)}{\| x(t) - r_0 \cdot e \|_{V^{-1}}}$$

Jeśli wprowadzimy oznaczenia $\tilde{x}(t) = x(t) - r_0$, to $z(t) = \dfrac{V^{-1} \cdot \tilde{x}(t)}{\| \tilde{x}(t) \|_{V^{-1}}} \cdot \sigma^0$.

Istnienie dopuszczalnej strategii

Jeżeli spełniony jest warunek regularności (5) i warunek dostateczny (8), to istnieje dopuszczalna strategia-dopuszczalne działanie efektywnościowe będące rozwiązaniem problemu istnienia dopuszczalnej strategii gwarantującego efektywność portfela $y(t)$ dla $x(t)$ $t_0 \le t \le \theta$ przy dowolnych rozwiązaniach $x(t)$, $y(t)$ równań (1), (2) i (3), (4).

Prześledzenie istnienia takiej sytuacji jest bardzo przydatne dla wniknięcia w istotę omawianego ujęcia zagadnienia korygowania portfela akcji dla zapewnienia jego wymaganej efektywności.

Określimy wektor S_0, w postaci znormalizowanej:

$$S_0 = \begin{cases} \dfrac{z-y}{\| z-y \|}, & z \neq y \\ 0 & z = y \end{cases}$$

Wtedy np. dla $(z-y) = (0{,}1;\ 0{,}9)$, $\| z-y \| = \sqrt{0{,}01+0{,}81} = \sqrt{0{,}81}$

i $S_0 = (\dfrac{0{,}1}{\sqrt{0{,}82}}; \dfrac{0{,}9}{\sqrt{0{,}82}})$ i $\| S_0 \| = \sqrt{\dfrac{0{,}01}{82} + \dfrac{0{,}81}{82}} = 1.$

Wieloznaczną funkcję można określić w postaci:

$$u^e(t,x,y) = \{u^e \in U(t) : (S_0, U^e) = \max_{u \in P}(S_0, u)\}$$

Funkcja ta jest półciągła z góry i zależy od *z* i *y*, które z kolei jako ciągłe (w sposób ciągły) zależą od *x* i *y* w obszarze:

$$\| \tilde{x} \|^2_{V^{-1}} > 0$$

gdyż:

$$z = \frac{V^{-1} \cdot \tilde{x}}{\| \tilde{x} \|_{V^{-1}}} \quad \text{lub} \quad z = \frac{V^{-1}\tilde{x}}{\| \tilde{x} \|^2_{V^{-1}}}(\mu^0 - r_0)$$

gdzie:

$\tilde{x} = x - r_0 \cdot e$ – wektor wartości akcji w portfelu bez papierów wartościowych wolnych od ryzyka.

Z określenia U^e i własności przekształcenia *P*(*t*) wynika mierzalność względem *t* strategii i tym sposobem określona wyżej strategia jest dopuszczalna. Należy tu w sposób zasadniczy zaakcentować, że z formalnego punktu widzenia dopuszczalną strategią jest wieloznaczne przekształcenie $\mu = u(t,x,y)$ mierzalne względem *t* itd. Można w tym kontekście wykazać, że strategia ta realizuje postulat dochodowości μ^0. W tym celu przyjmuje się, że *x*(*t*), *y*(*t*) – rozwiązania równań (1), (2) i (3), (4), gdzie w warunku (3) $U(t,x,y) = U^e(t,x,y)$.

Dla prawie wszystkich $t \in [t_0, \theta]$ mamy oszacowanie:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}((z(t) - y(t))^2) = 2 \cdot ((z(t) - y(t), (z'(t) - u^e(t)) = \\
&= 2[(z(t) - y(t), z'(t)) - \max_{u \in P(t)}(z(t) - y(t), u] \leq \\
&\leq 2[\max_{z' \in R(t)}(z(t) - y(t), z'(t)) - \max_{u \in P(t)}(z(t) - y(t), u(t))] = \\
&= 2[\rho(l(t)/R(t)) - \rho(l(t)/P(t))],
\end{aligned}$$

gdzie:

$l(t) = z(t) - y(t)$.

Wystarczy jeszcze zauważyć, że jeśli:

$$z = \frac{V^{-1}\tilde{x}(t)}{\| \tilde{x}(t) \|_{V^{-1}}} \sigma^0$$

to z (6) i (8) otrzymujemy $\frac{d}{dt}((z(t) - y(t))^2 \leq 0$. Wynika to także stąd, że $R(t) \subseteq P(t)$. Stąd i z równości $z(t_o) = y(t_o)$ wynika, że:

$$y(t) \equiv z(t)$$

Portfel jest zatem efektywny i zabezpiecza zadany poziom ryzyka σ^0.
Jeśli:

$$z = \frac{V^{-1}(\tilde{x}(t))}{\| \tilde{x}(t) \|^2_{V^{-1}}} (\mu^0 - r_0)$$

to z równań (6) i (7) znowu otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}(z(t) - y(t))^2 \leq 0$$

Portfel jest zatem efektywny i zabezpiecza zadany poziom dochodowości μ^0. Dzieje się to w czasie $t_0 \leq t \leq \theta$; portfel $y(t)$ dla $x(t)$ jest efektywny, co gwarantuje dopuszczalna strategia $U = U(t, x, y)$.

3. Dynamika cen aktywów w systemie zabezpieczeń w warunkach nieokreśloności

Stosując terminologię teorii systemów sformułujemy problem oceny fazowego wektora liniowego systemu, funkcjonującego w obecności wymuszeń (sterowań) i błędów (pomiarów). Terminologia ta i sam problem zostaną zaadaptowane na oceny dynamiki cen aktywów.

3.1. Specyfika zadań oceny

Powszechnie wiadomo, zarówno z literatury fizycznej (technicznej), jak i dotyczącej ocen dokonywanych dla wielkości rynku finansowego, że specyfika zadań oceniania ściśle łączy się z charakterem informacyjnych założeń, przy których są one rozwiązywane. Różnorodność problemów i ich sformalizowania prowadzi do wielu ujęć w ich rozwiązywaniu. W tej części rozdziału głównym założeniem będzie przyjęcie, że w ocenie dynamiki cen aktywów rozpatrywanej w układzie zabezpieczeń możliwe jest określenie problemu i jego rozwiązanie z różnych punktów widzenia odnośnie do warunków nieokreśloności.

Istnieją różne aspekty tych warunków:

1. Warunki stochastyczne określone.

Jeśli istnieje pełny statystyczny opis nieznanych zakłóceń i początkowych danych, to rozwiązanie osiąga się w ramach stochastycznej teorii obserwacji lub filtracji.

2. Statystyczne warunki nieokreśloności.

Z warunkami nieokreśloności łączą się zadania, w których statystyczny opis wskazanych apriorycznych danych w ogóle nie występuje. Wiadomości o nich ograniczają się jedynie do zadania dopuszczalnych obszarów zmian nieznanych wielkości. W tym przypadku na podstawie teorii obserwacji w warunkach nieokreśloności możliwe jest osiągnięcie rozwiązania z wykorzystaniem teorii gier.

3. Warunki mieszane

Z takim zespołem warunków spotykamy się najczęściej np. przy tytułowym problemie oceny dynamiki cen aktywów. W takim przypadku informacja apriori o wymuszeniach i błędach ma mieszany charakter. A właściwie, w takich przypadkach rozpatrywane są zadania oceniania, kiedy w systemie i także w kanale pomiaru wespół ze stochastycznymi istnieją wymuszenia, błędy, o których w ogóle brakuje jakiejkolwiek statystycznej informacji, a informacja o nich ogranicza się tylko do opisu pewnych dopuszczalnych obszarów ich zmian. Tak jest w układzie warunków np. w wypadku cen akcji. Ponieważ zmieniają się one z reguły skokowo, a nie ciągle, uzasadnione jest ustalenie ich dopuszczalnego poziomu zmian. Takie sytuacje, gdy jednocześnie występują wymuszenia jako stochastyczne ze znanymi charakterystykami statystycznymi, jak i wymuszenia, informacje o których ogranicza się do zadania obszaru ich zmian nazywa się statystycznie nieokreślonymi.

W dalszej części przedmiotem rozważań będą zagadnienia, w których rozpatrywane będą zadania oceny w warunkach nieokreśloności i statystycznie nieokreślonych. Podstawą przyjętego w rozdziale podejścia do statystycznej nieokreśloności zadań oceniania były teoriogrowe metody rozwiązywania zadań sterowania i obserwacji, rozwinięte przez N.N. Krasowskiego [3]. Konkretne sformułowania zadań są związane z koncepcją aposteriori obserwacji. Niektóre z nich przytoczone zostały w modelowych przykładach.

3.2. Model dynamiki zmienności cen w warunkach statystycznie nieokreślonych

Niech w liniowym przybliżeniu dynamika zmiany cen opisana jest różnicowym układem równań:

$$x_{K+1} = A_K \cdot x_K + B_K \cdot W_K + C_K \cdot \xi_K\,,\ k = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Zakłada się, że w momencie czasu $k = 1, \ldots$ jest znana informacja w postaci wektora $y_K \in R^n$ odpowiadającego wektorowi fazowych współrzędnych $x_K \in R^n$ w liniowej równości:

$$y_K = G_K \cdot x_K + H_K \cdot V_K + \eta_K\,,\ k = 0,1,\ldots \tag{10}$$

Tutaj w (9) i (10) ξ_K, η_K są odpowiednio wymuszeniami i błędami obserwacji (błędy informacyjne) – niezależne gaussowskie ciągi, przy czym przyjmujemy tu, że:

$$E\xi_K = 0,\ \ E\eta_K = 0,\ \ \operatorname{cov}\{\xi_K\} = Q_K\,,\ \ \operatorname{cov}\{\eta_K\} = R_K$$

gdzie $Q_K \in R^{mm}$, $R_K \in R^{rr}$ są dodatnio określonymi macierzami kowariancji.

O deterministycznych oddziaływaniach $w_K \in W_K \subset R^m$ i błędach obserwacji $v_K \in V_K \subset R^P$ wcześniej nie czyni się żądnych założeń. Natomiast macierze A_K, B_K, C_K, G_K, H_K o odpowiednich wymiarach i wypukłe zbiory W_K, V_K traktuje się jako znane.

Początkowy stan:

$$x_o = x_{co} + x_{no}$$

układu (9) jest traktowany jako *n*-wymiarowy wektor gaussowski, niezależny od ξ_K, η_K, o znanej dodatnio określonej macierzy kowariancji $\mathrm{cov}(x_{co}) = P_o$, ale z nieznaną wcześniej średnią wartością $x_{no} = Ex_o = \widetilde{x}_o \in \overline{X}_o$ – znany wypukły zbiór zwarty.

Podsumowując, w równaniach dynamiki zmian cen i obserwacji występują jako losowe wektory:

$$x_{co}, \xi_K, \eta_K$$

których charakterystyki statystyczne są w pełni znane, jak i nieokreślone wektory:

$$x_{no}, V_K, W_K,$$

o których informacja ogranicza się tylko do ich przynależności do obszarów zmian, odpowiednio:

$$x_{no} \in \overline{X},\ \ w_K \in W_K,\ \ v_K \in V_K \tag{11}$$

Ograniczenia typu (11) nazywane są chwilowymi lub nagłymi, a jeszcze inaczej geometrycznymi ograniczeniami.

Zadania oceny

W dalszej części będą rozpatrywane tylko zadania oceny, dlatego w układzie (9) nie występuje sterowanie, więc $u_K = 0.$ Dla każdej ustalonej pary ciągów:

$$w_{N-1}(\cdot) = \{w_o, ..., w_{N-1}\},\ \ v_N(\cdot) = \{v_1, ..., v_N\}$$

wielkości:

$$\overline{\xi}_K = B_K \cdot w_K,\ \ \overline{\eta}_{K+1} = H_K \cdot v_{K+1}$$

są w istocie średnimi wartościami gaussowskich ciągów:

$$\xi_K^{\ *} = B_K \cdot w_k + C_K \cdot \xi_K,\ \ \mu_{K+1}^{\ *} = H_{K+1} v_{K+1} + \eta_{K+1}, \qquad k = 0, ...,\ N-1$$

Statystyczna nieokreśloność modelu

Z powyższego wynika, że równania (9), (10) mogą być rozpatrywane jako równania z gaussowskimi wejściowymi oddziaływaniami $\xi_K^{\ *}, \eta_K^{\ *}$ i gaussowskim wektorem początkowym x_0. Statystyczna nieokreśloność wynika z tego, że o średnich wartościach wiadomo tylko tyle, ile wynika z (11). Jest tak dlatego, że zbiór apriorycznych rozkładów z niezależnych wzajemnie gaussowskich rozkładów o znanych wcześniej macierzach kowariancji $P_0, Q_k, R_{k+1},\ k = 0,..., N-1$, ale nieznanych średnich wartościach, informacja o których ogranicza się poprzez zadane warunki (11).

Aprioryczne rozkłady są w pełni określone poprzez wybór wielkości:

$$\xi_N(\cdot) = \{x_o, w_{N-1}(\cdot), v_N(\cdot)\}$$

rozpatrywanej jako element przestrzeni $R^n \times R^{mN} \times R^{PN}$.

Można tu zauważyć, że jeśli zaobserwowany byłby ciąg obserwacji:

$$y_N(\cdot) = \{y_1,..., y_N\}$$

oraz dana byłaby wielkość $\xi_N(\cdot)$, to najlepszą oceną dla parametrów rozkładu wektora byłaby warunkowa wartość oczekiwana:

$$E[x_N / y_{N(\cdot)}] = x_N^{\ *}$$

Ponadto dla aposteriori macierzy kowariancji:

$$P_N = E[(x_N - x_N^{\ *})(x_N - x_N^{\ *})' / y_{N(\cdot)}]$$

można sformułować stosowne równanie Riccatiego.

Dokonując przeglądu wszystkich możliwych wielkości $\xi_N(\cdot)$ można otrzymać zbiór ocen $x_N^{\ *}$, które razem z macierzą P_N stanowią najlepszą informację o wektorze x_N, którą tylko można wyciągnąć na podstawie opracowania bieżącego poziomu cen $y_{N(\cdot)}$ na dany konkretny moment czasu.

Uzyskanie punktowej oceny oznacza teraz wybór punktu ze wskazanego zbioru, będącej najlepszą w sensie pewnego kryterium.

Wybór punktowej oceny metodą minimaksowo-stochastycznej filtracji

Rozpatrzmy w przestrzeni $R^n \times R^{mN} \times R^{PN}$ następujący zbiór:

$$D_K = \{\xi_K(\cdot) : \bar{x}_o \in \bar{x}_o, w_K \in W_K, v_{K+1} \in V_{K+1}, k = 0,..., N-1\}$$

Wtedy przyjmując jako funkcję strat:

$$r(x) = x^T x = \| x \|^2$$

dochodzimy do następującego zadania minimaksowo-stochastycznej filtracji:

Względem znanej realizacji obserwacji $y_K(\cdot)$ ocenę $x_N{}^* = x_N{}^*(y_N(\cdot))$ można wyznaczyć z warunku:

$$\max_{\xi_N(\cdot)\in D_N} E\{\| x_N - x_N{}^* \|^2 / y_N(\cdot), \xi_N(\cdot)\} =$$
$$= \min_{C\in R^n} \max_{\xi_N(\cdot)\in D_N} E\{\| x_N - c \|^2 / y_N(\cdot), \xi_N(\cdot)\} = \varepsilon_N^2$$

Symbol $E\{\cdot / y_N(\cdot), \xi_N(\cdot)\}$ oznacza warunkową wartość oczekiwaną przy ustalonej wartości $\xi_N(\cdot)$.

3.3. Minimaksowo-stochastyczna ocena opcji w statystycznym układzie

Śledząc minimaksowo-stochastyczne podejście reprezentowane w poprzednim podrozdziale przy ocenie opcji przyjmiemy obecnie, że x jest gaussowską skalarną wielkością, tj. $x \sim N(\bar{x}, \sigma_x^2)$, przy czym σ_x^2 – średni kwadrat odchylenia (wariancji) zysku jest znany, a $\bar{x}$ nieznany. Wiadomo tylko, że zadany jest przedział:

$$|\bar{x}| \le \alpha$$

gdzie α – znana stała.

Obserwowana jest skalarna wielkość:

$$z = n + \eta + v$$

gdzie $\eta \sim N(0, \sigma_\eta^2)$, przy czym $\sigma_\eta > 0$ jest znaną wielkością nazywaną wskaźnikiem niestabilności ceny akcji, a $|v| \le \beta$ (β – znana stała).

Przypadek stałego $\xi(\cdot)$

Ustalając pewną wartość $\xi(\cdot)=(\bar{x},v)$ można stwierdzić, że aposteriori rozkład wielkości *x* przy uwzględnieniu realizowanego wyniku pomiaru *z* jest gaussowskim rozkładem:

$$x \sim N(\bar{x},\sigma^2_{x/z})$$

przy czym:

$$y=\bar{x}+\sigma^2_{x/z}\cdot\sigma_\eta^{-2}\cdot(z-\bar{x}-\bar{y})$$
$$\sigma^2_{x/z}=\sigma_x^{-2}+\sigma_\eta^{-2} \tag{12}$$

Jeśli przyjmiemy, że $\sigma_x=\sigma_y=1$, wtedy $\sigma^2_{x/z}=0{,}5$ i $x^*=0{,}5\cdot\bar{x}+0{,}5(z-v)$. Będzie to jednocześnie najlepsza ocena przy znanym wektorze $\xi(\cdot)=(\bar{x},v)$.

Przy takich ustaleniach, jak wyżej przyjęto, że straty (średniokwadratowy błąd) wynoszą:

$$E=\{(x-y)^2/z,\xi(\cdot)\}=0{,}5$$

Przypadek nieznanego $\xi(\cdot)$

W przypadku, gdy $\xi(\cdot)$ jest nieznany, tzn. nieznana jest średnia cena $\bar{x}$ i błąd obserwacji v, to przyjmując jako ocenę liczbę C ryzykujemy, że straty mogą osiągnąć wielkość:

$$\varphi(c)=\max_{\xi(\cdot)} E\{(x-c)^2/z,\xi(\cdot)\}=$$
$$=\max_{\substack{|\bar{x}|\le\alpha\\|v|\le\beta}} E\{(x-y+y-c)^2/z,\xi(\cdot)\}=\max_{\substack{|\bar{x}|\le\alpha\\|v|\le\beta}}[\sigma^2_{x/z}+(x-c)^2]$$

Podstawiając tutaj wyrażenie z (4) i wyznaczając maksimum otrzymujemy:

$$\varphi(c)=\begin{cases}\frac{1}{2}+(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{2}z-c)^2 & \text{przy c} \le \frac{1}{2}z\\ \frac{1}{2}+(-\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1}{2}-c)^2 & \text{przy c} > \frac{1}{2}z\end{cases}$$

Zatem minimum z (4) przyjmie postać:

$$\min_{c \in R^n} \varphi(c) = \max_{\substack{|\bar{x}| \le \alpha \\ |v| \le \beta}} E\{(x-c)^2 / z, \bar{x}, v\} = \frac{1}{2} + (\frac{\alpha+\beta}{2})^2$$

i to minimum osiąga się przy $c = x_0 = 0{,}5z$.

Podsumowanie

Rozpatrzone wybrane modele finansowego rynku w warunkach statystycznej nieokreśloności na przykładzie modelowania racjonalnego zachowania inwestora wykazały, że istnieje dopuszczalne rozwiązanie zadania o znajdowaniu strategii efektywnego zarządzania portfelem akcji i innych instrumentów finansowych, zabezpieczające zadany poziom dochodowości i ryzyka. W innych badaniach można spróbować stwierdzić istnienie algorytmicznego sposobu strategicznego zarządzania portfelem pochodnych instrumentów finansowych w warunkach nieokreśloności przy określonej dochodowości wybranego instrumentu finansowego. Należy tu zauważyć, że zasygnalizowane tematy są rzadko podejmowane w pracach polskich badaczy i warto je szerzej propagować.

Literatura

1. Dothan M.V., *Prices in Financial Markets*, Oksford Univ. Press, Oxford 1990.
2. Gołębiowski D.J., Dołmatow A.S., *Sterowanie portfelem pochodnych instrumentów finansowych*. RAN. „Teoria i Systemy Sterowania”, nr 4, Moskwa 2000.
3. Krasowski N.N., *Sterowanie i stabilizacja przy deficycie informacji*, RAN, „Techniczna Cybernetyka“, No. 1, Moskwa 1993.
4. *Podstawy stochastycznej finansowej matematyki*, FAZIS, T. 1, *Fakty. Modele*, T. 2, Moskwa 1998.

THE STATISTICAL UNCERTAINTY IN THE MEASUREMENT OF THE CHARACTERISTICS OF FINANCIAL MARKETS

Summary

Considered in developing the financial model exemplification of the market in terms of statistical uncertainty was recognized as an example the task of modeling rational investor behavior. Shows how to determine the existence of an acceptable solution of the problem search strategy portfolio management, hedging given level of profitability and risk. Discusses the algorithm to construct the optimal portfolio management, derivative financial instruments under conditions of uncertainty in determining the profitability of this or any other financial instrument.