POLSKA AKADEMIA UMIEJĘTNOŚCI
Tom IX PRACE KOMISJI HISTORII NAUKI 2009

Roman DUDA

OSIĄGNIĘCIA I ZNACZENIE LWOWSKIEJ SZKOŁY MATEMATYCZNEJ

Lwowska szkoła matematyczna była drugą, po warszawskiej, wybitną gałęzią polskiej matematyki lat 1919–1939. Były to szkoły odmienne (inna tematyka, inni ludzie), ale obie opierały się na tych samych zasadach, inspirowanych artykułem programowym Zygmunta Janiszewskiego[1]: skupienie młodych, twórczych matematyków na jednej, nowej dziedzinie matematyki; stworzenie w tej grupie atmosfery życzliwej współpracy; założenie czasopisma publikującego wyłącznie w językach kongresowych, a poświęconego tej wybranej dziedzinie. Zaczątkiem takiej grupy mogli być młodzi matematycy, których Wacław Sierpiński skupił wokół siebie podczas swego pobytu we Lwowie w latach 1908–1914. Byli to Zygmunt Janiszewski, Stefan Mazurkiewicz, Stanisław Ruziewicz i inni. Czterej wymienieni z powodzeniem zajmowali się rodzącą się wtedy teorią mnogości i dyscyplinami pokrewnymi, jak topologia i teoria funkcji, a swoje wyniki publikowali w czasopismach rodzimych i zagranicznych; własnego czasopisma nie mieli i o takim nie myśleli. Wybuch I wojny światowej grupę tę jednak rozproszył (W. Sierpiński został internowany w Rosji, Z. Janiszewski poszedł do Legionów, a S. Mazurkiewicz przeniósł się do Warszawy), ale ziarno zostało posiane, a z tego ziarna wyrósł wspomniany wyżej program Janiszewskiego (najbardziej oryginalną jego myślą było powołanie wyspecjalizowanego czasopisma, działo się to bowiem w czasie, kiedy takich czasopism matematycznych jeszcze na świecie nie było) i warszawska szkoła matematyczna, której pierwszymi liderami byli W. Sierpiński, Z. Janiszewski i S. Mazurkiewicz. Cza-

[1] Z. Janiszewski, *Stan i potrzeby nauki w Polsce*, [w:] *Nauka polska, jej potrzeby, organizacja i rozwój*, Warszawa 1917, s. 11–18; przedruk: „Wiadom. Mat". 1963, nr 7, s. 3–8.

sopismem szkoły warszawskiej były „Fundamenta Mathematicae", poświęcone (jak głosił napis na okładce) „teorii mnogości i jej zastosowaniom", przedtem obszarowi zainteresowań grupy lwowskiej, a teraz szkoły warszawskiej[2].

We Lwowie sytuacja rozwinęła się inaczej. Na długo przed W. Sierpińskim profesorem matematyki na uniwersytecie lwowskim był Józef Puzyna, najbardziej może znany jako autor bardzo na owe czasy nowoczesnej monografii o funkcjach analitycznych[3]. Otóż Puzyna wypatrzył w Krakowie „prywatnego uczonego" Hugona Steinhausa, który jeszcze w 1911 r. ukończył studia matematyczne w Getyndze, wieńcząc je stopniem doktorskim *summa cum laude*, i od tego czasu błąkał się między rodzinnym Jasłem a Krakowem, w chwilach wolnych pisując prace z teorii szeregów trygonometrycznych i teorii operatorów[4]. Za namową Puzyny Steinhaus habilitował się w 1917 r. na uniwersytecie lwowskim, a uzyskawszy tam przeniesienie z urzędu, w którym w czasie wojny pracował – rozpoczął wykłady. Steinhaus z kolei jeszcze w 1916 r. odkrył na krakowskich Plantach Stefana Banacha (po latach lubił mawiać, że było to jego „największe odkrycie naukowe"), pomógł mu zatrudnić się na Politechnice Lwowskiej i wkrótce wokół obu (Puzyna zmarł w 1919 r.) skupiła się nowa grupa ambitnej, utalentowanej młodzieży, zainteresowana innym niż warszawiacy obszarem matematyki. Był to obszar znacznie bliższy klasycznej analizie matematycznej.

W analizie przedmiotem badań są funkcje liczbowe określane na liczbach (rzeczywistych lub zespolonych) lub na układach liczb (traktowanych wówczas jako punkty przestrzeni R^n lub C^n) i przyjmujące wartości liczbowe. W drugiej połowie XIX wieku pojawił się jednak nurt nowy, a mianowicie tendencja do badania „operatorów" rozumianych jako funkcje określane na obiektach innej natury, takich jak granica ciągów liczbowych (obiektami są ciągi zbieżne, operatorem granica), suma szeregu, pochodna funkcji, całka oznaczona itp. Te inne obiekty były specyficznymi funkcjami (np. ciąg liczbowy jest funkcją określoną na zbiorze N liczb naturalnych), operatory były więc funkcjami określonymi na funkcjach należących do pewnych „przestrzeni funkcyjnych", jak się zbiory tych funkcji przyjęło nazywać. Zwolennicy tej tendencji mieli nadzieję, że taka ogól-

---

2 Por. R. Duda, *„Fundamenta Mathematicae" and the Warsaw School of Mathematics*, [w:] C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter (red.), *L'Europe mathématique – Mythes, histoires, identities. Mathematical Europe – Myth, History, Identity*, Paris 1996, s. 479–498.

3 J. Puzyna, *Teorya funkcyj analitycznych*, t. 1–2, Lwów 1898, 1900. Por.: A. Płoski, *O dziele Józefa Puzyny „Teorya funkcyj analitycznych"*, [w:] S. Fudala (red.), *Matematyka XIX wieku*, Materiały z II Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Uniwersytet Szczeciński, Materiały-Konferencje, Szczecin 1988, s. 237–244.

4 H. Steinhaus, *Additive und stetige Funktionaloperationen*, „Math. Z" 1919, nr 5, s. 186–221. Była to pierwsza praca polskiego matematyka z dziedziny, która później została nazwana analizą funkcjonalną.

niejsza analiza połączy w jedną całość różne gałęzie analizy klasycznej, nada im przejrzystą prostotę i większą ogólność. Przed rokiem 1920 brakowało jednak – mimo wielu ciekawych i głębokich wyników uzyskanych w tej dziedzinie przez takich wybitnych matematyków, jak V. Volterra, I. Fredholm, D. Hilbert, E. Schmidt, M. Fréchet, F. Riesz i inni – dostatecznie ogólnych i ścisłych określeń, choć w obiegu było już kilkanaście „przestrzeni funkcyjnych", tj. różnych zbiorów funkcji z wyróżnionymi w nich strukturami metrycznymi, analitycznymi czy algebraicznymi, oraz różnych operatorów na tych „przestrzeniach".

Przełomem była rozprawa doktorska S. Banacha z 1920 r., która drukiem wyszła jednak dopiero dwa lata później[5]. Jej największym osiągnięciem była definicja ogólnej przestrzeni abstrakcyjnej, na której można było rozwijać analizę matematyczną. Jak takiego uogólnienia szukać? Powinno ono obejmować wszystkie dotychczas znane „przestrzenie funkcyjne", a jednocześnie umożliwiać określenie podstawowych pojęć analizy (granica, ciągłość, pochodna itp.), by móc tę analizę tam rozwijać. Banach był motywowany geometrycznie i szukał definicji stosownej przestrzeni abstrakcyjnej w postaci uogólnienia przestrzeni euklidesowej. Jego geniusz pozwolił mu dostrzec w znanych już wówczas „przestrzeniach funkcyjnych" takie własności przestrzeni euklidesowych, jak liniowość, mierzenie odległości i zupełność. Liniowość jest własnością a l g e b r a i c z n ą, odległość można uznać za własność a n a l i t y c z n ą, pozwala ona bowiem na określanie bliskości punktów, a w konsekwencji na definiowanie podstawowego dla analizy pojęcia granicy; zupełność jest własnością t o p o l o g i c z n ą, orzeka ona bowiem, że rozważana przestrzeń metryczna nie ma „luk". Własności te musiały być ze sobą ściśle powiązane (co też wymagało iskry geniuszu) i w ten sposób w koncepcji Banacha zespoliły się algebra, analiza i topologia, a kierunek tego zespolenia wskazywała geometria.

Definicja Banacha była aksjomatyczna, swoje zaś aksjomaty podzielił on na trzy grupy. Pierwsza grupa stwierdzała, że definiowana przestrzeń X jest p r z e s t r z e n i ą w e k t o r o w ą n a d R, tzn. że na elementach przestrzeni X, zwanych odtąd w e k t o r a m i, jest określone d o d a w a n i e w e k t o r ó w, względem którego X jest grupą abelową, oraz m n o ż e n i e w e k t o r ó w p r z e z l i c z b y r z e c z y w i s t e, spełniające warunki łączności i rozdzielności względem dodawania liczb rzeczywistych i dodawania wektorów. Druga grupa mówiła, że na wektorach określona jest n o r m a, tj. że każdemu wektorowi x można przypisać liczbę rzeczywistą $\|x\| \geq 0$, jakby jego wielkość, spełniającą pewne naturalne warunki wielkości. Trzecia grupa składała się z jednego tylko aksjomatu z u p e ł n o ś c i, który stwierdzał, że jeśli $\{x_n\}$ jest ciągiem wektorów speł-

---

[5] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals*, „Fund. Math.' 1922, nr 3, s. 133–181. Trzeba pamiętać, że druk wtedy trwał dłużej, a nadto w roku 1920 trwała wojna polsko-bolszewicka i Lwów był na linii frontu.

niającym warunek Cauchy'ego lim $\|x_n - x_m\| = 0$, to istnieje granica tego ciągu, tj. element $x \in X$ taki, że $\lim\|x_n - x\| = 0$. Zauważmy przy okazji, że dla geometrii bardzo ważne jest pojęcie k ą t a, co algebraicznie wyraża się w postaci iloczynu skalarnego wektorów. Wielkość Banacha widać i w tym, że nie uległ on pokusie dołączenia iloczynu skalarnego do swojej koncepcji przestrzeni, co oczywiście zubożało jej geometrię, ale dawało pojęcie ogólniejsze. Przyszłość pokazała, że była to decyzja trafna.

Ogólną przestrzeń abstrakcyjną, spełniającą te trzy grupy aksjomatów, nazwał Banach p r z e s t r z e n i ą t y p u (*B*), ale po kilku latach została ona nazwana p r z e s t r z e n i ą B a n a c h a[6] i pod tą nazwą jest dziś powszechnie znana. Krótko mówiąc, przestrzeń Banacha jest to przestrzeń wektorowa, która ma normę i względem tej normy jest zupełna. Jeszcze krócej, jest to przestrzeń wektorowa unormowana i zupełna. Przestrzenie Banacha objęły wszystkie znane wówczas „przestrzenie funkcyjne" (później doszło wiele innych), dostarczając dla nich ogólnej metodologii i przynosząc ogólnie ważne twierdzenia. Był to prawdziwy początek nowej dziedziny matematyki, której Paul Lévy nadał w tymże 1922 r. nazwę a n a l i z a f u n k c j o n a l n a.

> Powstanie analizy funkcjonalnej, tak jak powstanie każdej nowej dyscypliny naukowej, było końcowym etapem długiego historycznego procesu. Obszerna jest lista matematyków, których badania przyczyniły się do powstania analizy funkcjonalnej; obejmuje takie sławne nazwiska jak Vito Volterra, Dawid Hilbert, Jacques Hadamard, Maurice Fréchet i Fryderyk Riesz. Ale rok 1922, w którym Stefan Banach w polskim czasopiśmie „Fundamenta Mathematicae" ogłosił swą rozprawę doktorską [...], jest datą przełomową w historii matematyki XX wieku. Ta kilkudziesięciostronicowa rozprawa ugruntowała bowiem ostatecznie podstawy analizy funkcjonalnej [...].
>
> Analiza funkcjonalna zastąpiła podstawowe dla analizy matematycznej pojęcie liczby przez ogólniejsze pojęcie, które dziś w tysiącach rozpraw matematycznych określane jest nazwą „punkt przestrzeni Banacha". Uzyskane w ten sposób uogólnienie analizy matematycznej, nazwane analizą funkcjonalną, pozwoliło traktować w sposób prosty i jednolity pozornie różne zagadnienia analizy matematycznej i rozwiązywać spośród nich wiele takich, z którymi poprzednio matematycy borykali się bezskutecznie[7].

Rozprawa Banacha nie ograniczyła się oczywiście do podania samej tylko definicji przestrzeni typu (*B*), ale poszła znacznie dalej, pokazując, że jest to wartościowy i ciekawy obiekt badań matematycznych[8]. Co więcej, Banach

---

[6] Nazwę wprowadził Hugo Steinhaus w 1929 r.

[7] S. Mazur, *Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha*, „Wiadom. Mat." 1961, nr 4.3, s. 249–250.

[8] Jak to czasem w historii matematyki bywa, w tymże 1922 r. pojawiły się podobne, ale inaczej motywowane i mniej przejrzyste koncepcje Norberta Wienera i Hansa Hahna. Nie było jednak sporów o priorytet, Wiener sam się bowiem wycofał, a historia przy-

potrafił zainteresować nową problematyką młodych adeptów matematyki we Lwowie i taki był początek lwowskiej szkoły matematycznej. Rozwinęła się ona szybko, sam Banach publikował bowiem co roku, a nadto miał wartościowych współpracowników i utalentowanych studentów. Z wczesnych wyników szkoły przytoczmy „twierdzenie o zagęszczaniu osobliwości" podające pewien ogólny sposób konstruowania obiektu mającego nieskończenie wiele osobliwości z nieskończenie wielu obiektów, z których każdy miał co najwyżej jedną osobliwość[9]. Konstrukcje takie były stosowane już wcześniej, ale procedury były uciążliwe i nie było w tym „nowych myśli aż do roku 1927, kiedy Banach i Steinhaus (przy częściowej współpracy Stanisława Saksa) stwierdzili związek tych zjawisk z pojęciem zbioru szczupłego i z twierdzeniem Baire'a w przestrzeniach metrycznych zupełnych"[10]. Wspomniane twierdzenie Baire'a o kategorii stało się szybko, we Lwowie i Warszawie, chętnie i często stosowaną metodą dowodzenia istnienia różnych ciekawych obiektów matematycznych.

> Gra Polaków polegała na odpowiednim dobieraniu przestrzeni topologicznych i opisywaniu sytuacji generycznych, co pozwalało im zastępować uciążliwe konstrukcje przez twierdzenia egzystencjalne, oparte na twierdzeniu Baire'a. Przestrzenie topologiczne, które nadają się do takiej gry, słusznie zostały nazwane przez Bourbakiego „przestrzeniami polskimi"[11].

Duży wpływ na rozwój szkoły lwowskiej miało założenie przez Steinhausa i Banacha czasopisma „Studia Mathematica", którego pierwszy tom wyszedł w 1929 r. (ostatni lwowski, dziewiąty, w 1940 r.). Było to drugie polskie czasopismo matematyczne (po warszawskich „Fundamentach"), które oparło się na ideach Janiszewskiego, tzn. ograniczyło się do wybranego obszaru matematyki (we Lwowie była to „teoria operacyj") i publikowało wyłącznie w językach kongresowych. W dziewięciu jego tomach z lat 1929–1940 ukazało się 169 prac, z czego 111, tj. około 69%, stanowiły prace, których autorem lub współautorem był matematyk lwowski. Publikowali mistrzowie: S. Banach (16 prac) i H. Steinhaus (9), oraz ich uczniowie: H. Auerbach (9), M. Eidelheit (7), S. Kaczmarz (12), M. Kac (9), S. Mazur (17), W. Orlicz (21), J. Schauder (7), J. Schreier (6) i inni[12].

---

znała wyższość przejrzystym koncepcjom Banacha. Por. R. Duda, *The Discovery of Banach Spaces*, [w:] W. Więsław (red.), *European Mathematics in the Last Centuries*, Conference held at Będlewo 26–30 April 2004, Stefan Banach International Mathematical Center and Institute of Mathematics of Wrocław University, 2005, s. 37–46.

[9] S. Banach, H. Steinhaus, *Sur le principe de la condensation de singularités*, „Fund. Math." 1927, nr 9, s. 50–61.

[10] N. Bourbaki, *Elementy historii matematyki*, tłum. S. Dobrzycki, Warszawa 1980, s. 272.

[11] J.-P. Kahane, *Próba oceny wpływu polskiej szkoły matematycznej lat 1918–1939*, „Wiadom. Mat." 1995, nr 31, s. 163–175.

[12] Por. R. Duda, *„Fundamenta Mathematicae", „Studia Mathematica" i „Acta Aritmetica"*

Jeśli rozprawę doktorską Banacha przyrównać do perły, to jej oprawą była monografia, którą poprzedził wydany rok wcześniej podręcznik[13]. Stanowiła ona podsumowanie dotychczasowych badań nad przestrzeniami Banacha, a że były one prowadzone przede wszystkim we Lwowie – ugruntowała znaczenie lwowskiej szkoły, ponadto wydatnie przyczyniła się do rozwoju analizy funkcjonalnej na świecie.

> Pojawienie się traktatu Banacha o „operacjach liniowych" oznacza, że tak powiemy, początek wieku dojrzałego dla teorii przestrzeni unormowanych. Wszystkie rezultaty [...] są opatrzone wieloma trafnymi przykładami, wziętymi z rozmaitych dziedzin analizy, co zdawało się wróżyć teorii wspaniałą przyszłość. Dzieło cieszyło się istotnie ogromnym powodzeniem, a jednym z najbardziej bezpośrednich jego skutków było niemal powszechne przyjęcie nomenklatury i oznaczeń przyjętych przez Banacha[14].

> Książka została szybko przyjęta jako kulminacja długiego szeregu prac zainicjowanych przez Volterrę, Hadamarda, Frécheta i F. Riesza. Zwolennikom ogólności można powiedzieć, że [...] stała się imponującą i ogólną teorią. Poszła daleko w kierunku ustalenia analizy funkcjonalnej jako szerokiego i niezależnego pola badań[15].

> Jest to bez wątpienia jedna z książek, które wywarły największy wpływ na rozwój matematyki współczesnej. [...] F. Riesz wyrażał się zawsze o wartości tej książki z najwyższym szacunkiem[16].

> Swoje idee Banach przedstawił w sposób dojrzały i zwarty w słynnej monografii, z nadzwyczajną jasnością podkreślając subtelną współzależność rozważań algebraicznych i topologicznych w czynieniu naprawdę owocnymi pojęć abstrakcyjnych i ogólnych, z którymi miała do czynienia współczesna analiza funkcjonalna. Tym, co uczyniło wpływ dzieła Banacha tak silnym, jest dokonanie zjednoczenia szeregu różnych, znalezionych poprzednio wyników z dziedziny analizy, wyrywkowych i niezupełnych[17].

W latach 30. Banach i Steinhaus nadal byli aktywni (ich drogi naukowe już się jednak rozchodziły), ale do głosu coraz silniej dochodzili młodsi adepci szkoły, uzupełniając dokonania mistrzów, tworząc nowe idee i rozwijając teorię w nowych kierunkach. Wymieńmy niektóre z tych osiągnięć. Władysław Orlicz (po-

---

– pierwsze trzy specjalistyczne czasopisma matematyczne, „Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Matematyka–Fizyka" 1995, nr 76, s. 47–80.

[13] S. Banach, *Teorya operacyj liniowych*, Warszawa 1931; tenże, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne 1, Warszawa 1932.

[14] N. Bourbaki, *Elementy historii...* , s. 272.

[15] G. Birkhoff, E. Kreyszig, *The Establishment of Functional Analysis*, „Hist. Math." 1984, nr 11, s. 258–321, s. 315.

[16] B. Szökelfalvi-Nagy, *Przemówienie na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha*, „Wiadom. Mat." 1961, nr 4.3, s. 265–268.

[17] M.H. Stone, *Nasz dług wobec Stefana Banacha*, „Wiadom. Mat." 4.3 (1961), s. 252–259.

czątkowo we współpracy z Zygmuntem Wilhelmem Birnbaumem) zdefiniował nową klasę przestrzeni Banacha, którą oznaczył L^{Φ}, jako rozszerzenie przestrzeni Lebesgue'a L^p na przypadek, kiedy całkowalność p-tej potęgi funkcji zostaje zastąpiona przez całkowalność superpozycji funkcji z dowolną funkcją wypukłą[18]. Później dla przestrzeni L^{Φ} przyjęła się nazwa przestrzenie Orlicza, a ich teoria rozwinęła się po 1945 r. w Poznaniu.

Stanisław Mazur, który swoją pracę naukową rozpoczął, pod wpływem H. Steinhausa, od teorii sumowalności, wpadł na świetną, jak się okazało, ideę zastosowania do tej teorii metod i pojęć teorii przestrzeni Banacha. Idea ta, rozwinięta przez Mazura i innych, zmieniła całkowicie obraz teorii sumowalności, czyniąc z niej część analizy funkcjonalnej.

Zainteresowanie teorią sumowalności doprowadziło Mazura i Orlicza do pewnego uogólnienia przestrzeni Banacha w postaci przestrzeni typu B_0[19]. Najpierw zdefiniowali oni przestrzenie typu B_0^* (w terminologii Bourbakiego, później powszechnie przyjętej, są to liniowe przestrzenie topologiczne, metryzowalne i lokalnie wypukłe), a jeśli taka przestrzeń jest nadto zupełna, to nazwali ją przestrzenią typu B_0 (w terminologii Bourbakiego jest to przestrzeń Frécheta). W rozwijaniu ważnej teorii tych przestrzeni zaszli daleko i można by ich uznać za jej twórców, jednakże swoje wyniki w tym zakresie opublikowali dopiero po wojnie[20].

S. Mazur wprowadził do teorii przestrzeni Banacha silny wątek geometryczny, definiując pojęcia takie jak hiperpłaszczyzna, rozmaitość liniowa, ciało wypukłe itp. Dowiódł m.in., że jeżeli C jest ciałem wypukłym w przestrzeni unormowanej E, a M jest rozmaitością liniową, nie zawierającą żadnego punktu wewnętrznego C, to istnieje w E hiperpłaszczyzna domknięta H, zawierająca M i taka, że C leży po jednej stronie H. Obie prace Mazura na ten temat[21] zapoczątkowały intensywne badania nieskończenie wymiarowych zbiorów wypukłych i geometrii kuli jednostkowej w przestrzeniach Banacha. Wątek wypukłości podejmie m.in. Meier Eidelheit.

Aczkolwiek dominująca, analiza funkcjonalna nie była jedynym nurtem lwowskiej szkoły matematycznej. Historycznie ważne były np. dwie prace ma-

---

[18] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B*, Bull. Intern. Acad. Polon. Sci., Sér. A, s. 207–222.

[19] S. Mazur, W. Orlicz, *Über Folgen linearen Operationen*, „Studia Math." 1933, nr 4, s. 152–157.

[20] S. Mazur, W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires I*, „Studia Math." 1948, nr 10, s. 184–208; S. Mazur, W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires II*, „Studia Math." 1953, nr 13, s. 137–179.

[21] S. Mazur, *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, „Studia Math." 1933, nr 4, s. 70–84; S. Mazur, *Über schwache Konvergenz in den Räumen*, „Studia Math." 1933, nr 4, s. 128–133.

tematyków lwowskich, A. Łomnickiego i H. Steinhausa z 1923 r., obie odnoszące się do rachunku prawdopodobieństwa[22]. Rachunek ten rozwijał się od XVII wieku, jednakże do początku lat 20. ograniczał się on do badania przypadku nazwanego później klasycznym (skończenie wiele zdarzeń elementarnych i wszystkie jednakowo możliwe) i brak mu było solidnych podstaw matematycznych. D. Hilbert uważał go za część fizyki i postulował (VI Problem Hilberta, rok 1900) jego aksjomatyzację. Znaczenie prac Łomnickiego i Steinhausa polegało na tym, że prawdopodobieństwo było w nich traktowane w języku teorii miary, a ściślej jako miara zdarzeń losowych. Co więcej, Steinhaus dokonał matematyzacji pierwszego przypadku nieklasycznego: gry w orła i reszkę. Nieskończone ciągi rzutów monetą opisywał jako ciągi zero-jedynkowe, identyfikując je (w zapisie dwójkowym) z punktami odcinka [0,1]; zdarzeniami losowymi były podzbiory mierzalne tego odcinka, a ich prawdopodobieństwem – miara Lebesgue'a. Mówiąc językiem współczesnym, Steinhaus skonstruował dla gry w orła i reszkę przestrzeń probabilistyczną ([0,1], L, λ), gdzie odcinek [0,1] jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, L jest rodziną podzbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a tego odcinka, a λ – miarą Lebesgue'a. Próby uogólnienia wyniku Steinhausa trwały 10 lat i dopiero Andriej Kołmogorow rozwiązał problem Hilberta, przechodząc od ciągów rzutów monetą do dowolnych zdarzeń losowych, a miarę Lebesgue'a zastąpił miarą unormowaną[23]. Od tej pory trójka (Ω, F, μ), gdzie Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, F jest σ-ciałem zdarzeń losowych, a μ jest miarą unormowaną, określoną na σ-ciele F – stała się ogólnie przyjętym układem matematycznym układów losowych. „Stosując terminologię sportową, należałoby powiedzieć, że finał należał do Kołmogorowa, ale dwóch matematyków polskich, Hugo Steinhaus i Antoni Łomnicki, doszło do półfinału"[24].

Wskazany przez Łomnickiego i Steinhausa kierunek matematyzacji prawdopodobieństwa stał się wkrótce dominujący (upowszechnił go, nie znając prac matematyków lwowskich, W. Feller), ale – rzecz ciekawa – Steinhaus nie był usatysfakcjonowany aksjomatyzacją Kołmogorowa. Uważał, że zacierała ona intuicje związane z pojęciem zdarzenia losowego, i rozwijał, we współpracy z najwybitniejszym swoim wychowankiem tego okresu, Markiem Kacem, inne podejście[25]. Do napisania planowanej przez nich monografii jednak nie doszło:

---

22 A. Łomnicki, *Nouveaux fondements du calcul des probabilités*, „Fund. Math." 1923, nr 4, s. 34–71; H. Steinhaus, *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de mesure*, „Fund. Math." 1923, nr 4, s. 286–310.

23 A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1933.

24 K. Urbanik, *Idee Hugona Steinhausa w teorii prawdopodobieństwa*, „Wiadom. Mat." 1973, nr 17, s. 39–50.

25 W latach 1936–1953 ukazała się seria dziesięciu prac pod wspólnym tytułem *Sur les fonctions indépendantes*, których autorami byli bądź Kac, bądź Steinhaus, bądź obaj.

Kac emigrował do Stanów Zjednoczonych, a Steinhaus po wojnie znalazł się we Wrocławiu i zajął zastosowaniami.

Od początku XX wieku żywy był w matematyce problem miary: skonstruować funkcję m, która każdemu podzbiorowi A przestrzeni R^n przypisze wartość $m(A)$, przy czym spełnione mają być warunki nietrywialności, niezmienniczości względem ruchów i addytywności. Wiadomo było, że jeśli addytywność ma być przeliczalna, to problem miary nie ma rozwiązania dla żadnego n (istnieją zbiory niemierzalne, np. zbiór Vitaliego), a w 1914 r. Hausdorff pokazał, że nawet przy słabszym warunku skończonej addytywności nie ma on rozwiązania dla $n > 2$. Oczekiwano, że dla $n = 1, 2$ odpowiedź będzie taka sama, ale S. Banach pokazał, że jest inaczej: istnieje miara skończenie addytywna dla wszystkich podzbiorów prostej i płaszczyzny[26]. Odpowiedź Banacha zyskała spory rozgłos, a on sam badania w tym zakresie kontynuował. Już rok później opublikował (wspólnie z Alfredem Tarskim) słynny paradoks Banacha-Tarskiego[27]: kula o promieniu r daje się rozłożyć na skończenie wiele części, z których można złożyć dwie kule o promieniu r. Później pojawiły się dalsze prace Banacha, Kuratowskiego, Ulama na temat teorii miary[28], a w nich ogólniejsze sformułowanie problemu miary. Doprowadziło to do odkrycia alefów niemierzalnych, co miało duże znaczenie dla teorii mnogości, ale ten poziom abstrakcji Banacha już nie interesował.

Matematycy lwowscy chętnie pisywali podręczniki szkolne (sam A. Łomnicki napisał ich 18, W. Nikliborc i W. Stożek 7, S. Banach z W. Sierpińskim i W. Stożkiem 6, a nadto pisywali S. Ruziewicz z E. Żylińskim, W. Orlicz, sam S. Banach i S. Banach z W. Stożkiem). Było tych podręczników około 40, a nadto pisywali oni także podręczniki akademickie (H. Steinhaus, S. Banach, A. Łomnicki, W. Nikliborc, S. Ruziewicz, E. Żyliński) i monografie[29].

W latach 30. nadal byli czynni mistrzowie S. Banach i H. Steinhaus, ale rozkwitały już wielkie talenty Władysława Orlicza, Stanisława Mazura, Juliusza Schaudera, Stanisława Ulama , Marka Kaca i kilkunastu innych (każdy z wymienionych zostawił wybitny ślad w matematyce). Szkoła lwowska przyciągała zarówno swoich – na dłuższe pobyty przyjeżdżali tu M. Krzyżański

---

[26] S. Banach, *Sur le problème de mesure*, „Fund. Math." 1923, nr 4, s. 7–33.

[27] S. Banach. A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. 6 (1924), s. 244–277. Por. S. Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press 1985.

[28] S. Banach, K. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de mesure*, „Fund. Math." 1929, nr 14, s. 127–131; S. Banach, *Über additive Massfunktionen in abstrakten Mengen*, „Fund. Math." 1930, nr 15, s. 97–101; S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, „Fund. Math." 1930, nr 16, s. 140–150.

[29] W serii Monografie Matematyczne, założonej w 1932 r., znajdujemy przed rokiem 1939 dwie pozycje lwowskie: S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, MM 1, Warszawa 1932; S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, MM 6, Warszawa 1936.

i J. Marcinkiewicz z Wilna, K. Borsuk z Warszawy, a częstymi gośćmi byli K. Kuratowski (w latach 1927–1933 był nawet profesorem Wydziału Ogólnego Politechniki Lwowskiej), W. Sierpiński (ten przebywał we Lwowie w okresie 1908–1914, a w latach międzywojennych był nader częstym gościem), A. Tarski, A. Zygmund i inni, jak i obcych – Lwów odwiedzili m.in. H. Lebesgue, J. von Neumann, E. Zermelo.

Malowniczości lwowskiej szkole matematycznej dodawało bogate życie towarzyskie, w tym bardzo aktywny Oddział Lwowski PTM, na posiedzeniach którego prezentowano co roku po kilkadziesiąt doniesień naukowych. Posiedzenia te tradycyjnie odbywały się w soboty, a po nich równie tradycyjnie szło się do kawiarni na dalsze i swobodniejsze dyskusje. Ulubioną kawiarnią matematyków była „Szkocka", gdzie sesje były niemal codzienne: grano w szachy i rozmawiano, ale przede wszystkim uprawiano matematykę. Jedna z sesji trwała podobno 17 godzin i skończyła się udanym dowodem trudnego twierdzenia. W czasie takich sesji pisano na marmurowych stolikach kawiarnianych, co potem obsługa ścierała. Chcąc uratować stoliki i zapewnić trwałość wynikom pani Łucja Banachowa (żona prof. Banacha) kupiła w 1935 r. gruby zeszyt i tak powstała słynna potem „Książka Szkocka". Przechowywano ją w kawiarni, a stałym bywalcom udostępniano na życzenie. Na stronach nieparzystych „Książki" wpisywano problemy, na sąsiednich parzystych było miejsce na komentarze i rozwiązania. Ogółem w okresie funkcjonowania „Książki", tj. w latach 1935–1941 (podczas wojny życia kawiarnianego już nie było, ale „Książka" istniała, a wpisywali się do niej przybysze z Warszawy i goście ze Związku Sowieckiego), wpisano 193 problemy numerowane oraz kilka nienumerowanych. Niektóre rozwiązywano potem przez lata i także w ten sposób „Książka" wpłynęła na światową matematykę[30].

Prócz uprawiania matematyki samej, Steinhaus chętnie także pisywał o matematyce, a w 1938 r. wyszła, jednocześnie po polsku i po angielsku, jego książka *Kalejdoskop matematyczny*. Zyskała natychmiastową poczytność i od tej pory była wielokrotnie wznawiana oraz tłumaczona na inne obce języki[31]. Dziś jest to niewątpliwie najbardziej znana książka matematyczna polskiego autora.

Nadciągająca wojna i zagęszczająca się atmosfera, wyjazdy niektórych i obawy pozostałych sprawiły, że niektóre ważne potem wątki z lat 30., zainicjowane we Lwowie, nie znalazły tam rozwinięcia i później podejmowali je inni badacze w innych miejscach. Wymieńmy najważniejsze:

1. Nieliniowa analiza funkcjonalna. Analiza funkcjonalna zaczęła się od rozważania operatorów liniowych (funkcjonałów), które do dziś pozostały jej głów-

---

[30] R.D. Mauldin, *Mathematics from the Scottish Café*, Boston–Basel–Stuttgartt 1981.

[31] Ostatnie wydanie polskie, IV zmienione, ukazało się w 1989 r. Były trzy dalsze wydania w języku angielskim, a także rosyjskie, francuskie, czeskie, japońskie, rumuńskie, bułgarskie, węgierskie i inne.

ną domeną. Niemniej od J. Schaudera, który udowodnił twierdzenie Brouwera o punkcie stałym w przestrzeniach Banacha dla operatorów niekoniecznie liniowych[32] – zaczął się nurt nieliniowej analizy funkcjonalnej. Kontynuował go sam Schauder, a doceniał S. Banach, którego monografia z 1932 r. poświęcona była wprawdzie operatorom liniowym, ale w przedmowie do niej autor zapowiadał, że jej drugi tom będzie traktował o operatorach nieliniowych. Niestety, tomu tego nigdy nie napisał.

2. Teoria równań różniczkowych cząstkowych. Znaczenie swego twierdzenia o punkcie stałym w przestrzeniach Banacha zademonstrował Schauder na równaniach różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu typu eliptycznego, a rozwinął we współpracy z matematykiem francuskim J. Lerayem[33]. Później rozszerzył je także na równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu typu hiperbolicznego[34]. We Lwowie badania te naśladowców jednak nie znalazły i były później rozwijane gdzie indziej (Paryż, Moskwa, Stany Zjednoczone).

3. Teoria przestrzeni liniowo topologicznych. Pojęcie przestrzeni liniowo topologicznej i lokalnie wypukłej przypisuje się J. von Neumannowi i A. Kołmogorowowi, jednakże w tym samym 1936 r. definiował je także, na posiedzeniu Oddziału Lwowskiego PTM, S. Mazur, podając szereg rezultatów, niektóre bez dowodów. Później te dowody uzupełniali inni.

4. Teoria funkcji rekursywnych. Niemal jednocześnie z fundamentalną pracą Turinga z 1936 r. koncepcja obliczalności pojawiła się we Lwowie.

> Ale to było w Polsce przed wojną światową, [gdzie] Banach i Mazur[35] rozwijali tę ideę w sposób najbardziej konsekwentny. Druga wojna światowa przeszkodziła opublikowaniu ich prac z tej epoki, pozostawiając tylko streszczenie[36].

5. Algebra. Wątki algebraiczne w teorii przestrzeni Banacha pojawiały się w pracach S. Banacha, M. Eidelheita, S. Mazura i innych, ale dopiero S. Mazur docenił znaczenie algebry, w tym także dla teorii przestrzeni Banacha. Twierdzenie anonsowane w pracy[37] okazało się później, po udowodnieniu go w 1941 r.

---

[32] J. Schauder, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, „Math. Z.“ 1927, nr 26, s. 47–65.

[33] J. Leray, J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*, „Ann. de l'Ecole Norm. Sup.“ 1934, nr 51, s. 45–78.

[34] Wyniki kilku prac Schaudera w tym zakresie streszcza: J. Schauder, *Nichtlineare partielle Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus*, Congrès Intern. Math. Oslo, (1936), s. 60–61.

[35] S. Banach, S. Mazur, *Sur les fonctions calculables*, „Ann. de la Soc. Polon. de Math.“ 1937, nr 16, s. 223.

[36] M. Guillaume, *La logique mathématique dans sa jeunesse*, [w:] J.-P. Pier (red.), *Development of Mathematics 1900–1950*, Basel–Boston–Berlin 1994, s. 185–367.

[37] S. Mazur, *Sur les anneaux linéaires*, CR Paris 207 (1938), s. 1025–1027.

przez I. Gelfanda, pierwszym twierdzeniem ogólnej teorii algebr Banacha[38]. Mazura cechowała niechęć do publikowania, ale cena za to była czasem wysoka. Kiedy A. Turowicz podjął w 1938 r. pracę we Lwowie, Mazur zaproponował mu zajęcie się teorią pierścieni. Pracę, zawierającą dwadzieścia kilka twierdzeń, ukończyli do kwietnia 1939 r., ale Mazur nie chciał jej publikować. Odmawiał i potem, choć jeszcze w 1940 r. istniała taka możliwość (w SM 9). Praca nigdy się nie ukazała, a wśród zawartych tam twierdzeń było znakomite „twierdzenie Weierstrassa-Stone'a" o aproksymacji funkcji ciągłych wielomianami, udowodnione przez M.H. Stone'a niezależnie w latach 40.

6. Teoria gier. Pojawiła się ona epizodycznie w niewielkiej pracy[39], której znaczenia zapewne sam autor nie doceniał.

> Jest to niewielka praca, niemająca charakteru publikacji matematycznej; właściwie jest to parę uwag, ale uwag, które na owe czasy były rewelacją, uwag, które legły u podstaw współczesnej teorii gier. Po pierwsze – zostało tam wprowadzone w sposób ścisły pojęcie s t r a t e g i i (co prawda pod inną nazwą – sposobu gry, ale nie o nazwę tu chodzi). Drugim istotnym elementem jest tzw. n o r m a l i z a c j a g i e r, i wreszcie: pojęcie f u n k c j i w y p ł a t y, która charakteryzuje każdą grę, oraz zasada wyboru s t r a t e g i i m i n i m a k s o w e j[40].

Rozważał też autor pościg (np. okrętu za okrętem) jako przykład nowego rodzaju gry, mianowicie g r y c i ą g ł e j (w odróżnieniu od dotychczas rozważanych gier dyskretnych, gdzie gracze wykonują ruchy na przemian). Praca była rewelacyjna, ale teoria gier we Lwowie się nie rozwinęła, a sama praca poszła w zapomnienie.

Wielką zasługą Banacha i lwowskiej szkoły było wprowadzenie pojęcia przestrzeni Banacha i rozwinięcie teorii tych przestrzeni. Biorąc pod uwagę sytuację, w jakiej matematycy lwowscy pracowali (brakowało etatów dla twórczych matematyków, czasy były niespokojne, zbliżała się straszna wojna), należy ich podziwiać, że uzyskali tak wiele i odcisnęli swój ślad w światowej matematyce. Nie można jednak pominąć faktu, że prócz wielu błyskotliwych osiągnięć miała szkoła lwowska i swojej słabe strony[41]. Można jej wytknąć, że zajmowano się

---

[38] Rękopis Mazura zawierał dowód tego twierdzenia, jednakże dla CR praca była za długa, więc Mazur po prostu dowód wyciął i przestał się nim interesować. Dowód ten przypomniał 30 lat później w swojej monografii W. Żelazko, *Algebry Banacha*, Biblioteka Matematyczna 32, Warszawa 1968.

[39] H. Steinhaus, *Definicje potrzebne do teorii gier i pościgu*, „Myśl Akademicka" 1925, nr 1, s. 13–14 (jednodniówka); przedruk angielski w „Naval Res. Logistic Quarterly" 1960, nr 7, s. 105–107.

[40] C. Ryll-Nardzewski, *Prace Hugona Steinhausa o sytuacjach konfliktowych*, „Wiadom. Mat." 1973, nr 17, s. 29–38.

[41] Por. A. Pełczyński, Z. Semadeni, *Rozwój analizy funkcjonalnej w Polsce*, „Wiadom. Mat." 1969, nr 12.1, s. 83–108.

niemal wyłącznie rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, zostawiając w cieniu przestrzenie zespolone i pomijając teorię funkcji analitycznych; zajmowano się za mało lub nie zajmowano się wcale niektórymi nowymi kierunkami analizy funkcjonalnej, jak przestrzenie Hilberta, reprezentacje grup Liego, teoria ergodyczna, funkcje prawie okresowe; przywiązanie zaś do operowania metryką (charakterystyczne także dla warszawskiej topologii) utrudniało tworzenie uogólnień i kontakt z ogólniejszym punktem widzenia innych ośrodków. Nie doceniono wreszcie (zabrakło sił?) nowych wątków, o których była mowa wyżej. Niemniej była to szkoła wielka, a jej znaczenie zostało w świecie należycie docenione.

> W każdej dziedzinie matematyki szkoła polska odcisnęła swój styl i ślad. [...] przez swobodne posługiwanie się aksjomatem wyboru [...] przez inne metody, [...] oparte na teorii Baire'a czy na prawdopodobieństwie [...] i wreszcie, przez stworzenie analizy funkcjonalnej i to zarówno w jej aspekcie liniowym (Banach), jak i nieliniowym (Schauder). [...]
>
> Jest matematyka polska z okresu międzywojennego pomnikiem o ogromnej doniosłości i wiekuistym pięknie[42].

Lwowska szkoła matematyczna przestała istnieć w dramatycznych okolicznościach II wojny światowej. Jeszcze przed wybuchem tej wojny udało się kilku matematykom wyjechać z kraju (Zygmunt Wilhelm Birnbaum, Mark Kac, Stanisław Ulam). W okresie 1939–1941 Lwów znalazł się pod okupacją sowiecką, a środowisko zasiliło kilku matematyków warszawskich (Bronisław Knaster, Edward Marczewski, Stanisław Saks, Menachem Wojdysławski). Sowieci zamknęli polskie uczelnie, ale w ich miejsce uruchomili ukraińskie i wielu matematyków polskich przyjęto do pracy. Na uniwersytecie Stefan Banach został dziekanem, a kierownikami katedr: Banach, Hugo Steinhaus, Stanisław Mazur, Eustachy Żyliński i Juliusz Schauder. Na politechnice pozostali Kazimierz Bartel, Antoni Łomnicki i Włodzimierz Stożek. W instytucie sowieckiej ekonomii znalazł pracę Stanisław Ruziewicz. Czasy nie były jednak normalne, plagą były nieustanne mityngi, nocne aresztowania i wywózki. W łagrze zmarł Władysław Hetper, w Charkowie zginął Stefan Kaczmarz, który po kampanii wrześniowej dostał się do sowieckiej niewoli jako porucznik Wojska Polskiego. Jeszcze bardziej tragiczna była okupacja niemiecka, zaczęła się bowiem od wymordowania 25 profesorów lwowskich uczelni oraz 15 członków ich rodzin. W lipcu 1941 r. na Wzgórzach Wuleckich z matematyków zostali rozstrzelani: Kazimierz Bartel, Antoni Łomnicki, Stanisław Ruziewicz i Włodzimierz Stożek z dwoma synami. Jednocześnie zaczęły się prześladowania osób pochodzenia żydowskiego. Uratował się Hugo Steinhaus, który natychmiast po wkroczeniu Niemców spalił

---

[42] J.-P. Kahane, *Próba oceny wpływu...*

wszystkie osobiste dokumenty i opuścił wraz z żoną mieszkanie – na zawsze. Jakiś czas tułali się po znajomych we Lwowie, wynajmowali pokój pod Lwowem, a ostatnie trzy lata tej okupacji Steinhaus przeżył jako Grzegorz Krochmalny na wsi koło Gorlic[43]. Prześladowań niemieckich nie przeżyli: Herman Auerbach, Meier Eidelheit, Marian Jacob, Juliusz Schauder, Ludwik Sternbach, Menachem Wojdysławski. Z tych, którzy nie musieli się ukrywać, jedni wykładali matematykę na oficjalnych i tajnych kursach (Władysław Nikliborc, Władysław Orlicz, Eustachy Żyliński), inni zajmowali się czym się dało (Stanisław Mazur był sprzedawcą sklepowym) lub karmili wszy w Instytucie prof. Weigla, który produkował szczepionki przeciw tyfusowi dla Wehrmachtu (Stefan Banach, Bronisław Knaster). Powrót Sowietów w 1944 r. nie był wybawieniem, od samego bowiem początku była wywierana bardzo silna presja na polską ludność Lwowa, by opuściła miasto przyznane Sowietom w Jałcie, co potwierdziła konferencja w Poczdamie. Pierwsze transporty Polaków wyruszyły jeszcze w trakcie trwania wojny, ostatnie – w 1946 r. Wyjechały wtedy niedobitki: Bronisław Knaster, Stanisław Mazur, Władysław Orlicz, Eustachy Żyliński, a także ostatni polscy studenci: Andrzej Alexiewicz, Stanisław Hartman, Roman Stanisław Ingarden, Maria Nosarzewska i inni. Stefan Banach, który zachorował na nowotwór, zmarł w sierpniu 1945 r. i został pochowany na Cmentarzu Łyczakowskim.

Lwowska szkoła matematyczna przestała istnieć.

Dyskusja po referacie Romana Dudy: *Osiągnięcia i znaczenie lwowskiej szkoły matematycznej*

Andrzej Budzanowski:

Decyzja o rozstrzelaniu profesorów Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie w nocy z 3 na 4 lipca 1941 r., w cztery dni po wkroczeniu Niemców do Lwowa po wybuchu wojny niemiecko-sowieckiej, była podjęta dużo wcześniej. Zgodnie z instrukcją gubernatora Hansa Franka z roku 1940, wyrażoną w przemówieniu do oddziałów specjalnych SS (*Einsatzkommando*) uznano, że tyle było kłopotów z aresztowaniem i odesłaniem do obozów profesorów Uniwersytetu Jagiellońskiego oraz związanych z tym interwencjami międzynarodowymi, że należy natychmiast po zatrzymaniu dokonywać fizycznej likwidacji uczonych oraz towarzyszących im zatrzymanych osób.

W owych czasach zaprzyjaźniłem się ze Stasiem Grzędzielskim, synem Jerzego Grzędzielskiego, który właśnie objął kierownictwo kliniki okulistycznej

[43] H. Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*, Wrocław 2002.