METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XIX/3, 2018, s. 238 – 250

Received: 10.07.2018
Accepted: 05.10.2018

WYCENA ASYMETRYCZNYCH OPCJI LOGARYTMICZNYCH ZA POMOCĄ TRANSFORMATY FOURIERA

Arkadiusz Orzechowski https://orcid.org/0000-0003-2872-189X
Kolegium Ekonomiczno-Społeczne
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
e-mail: aorzec@sgh.waw.pl

Streszczenie: Celem artykułu jest wycena europejskich opcji logarytmicznych o asymetrycznym profilu wypłaty. W ramach podejmowanej problematyki zaproponowane zostały trzy podejścia pozwalające określić wartość modelową analizowanych instrumentów pochodnych przy utrzymaniu założeń właściwych modelowi F. Blacka i M. Scholesa, tj. podejście martyngałowe, F. Blacka i M. Scholesa oraz bazujące na transformacie Fouriera. Ponadto, dokonano analizy szybkości i dokładności obliczeniowej uwzględnionych podejść do wyceny analizowanych derywatów.

Słowa kluczowe: model F. Blacka i M. Scholesa, transformata Fouriera, asymetryczne opcje logarytmiczne

JEL classification: C58, C63

WSTĘP

Asymetryczne opcje logarytmiczne są instrumentami pochodnymi, których profil wypłaty zależy do różnicy pomiędzy logarytmami (naturalnymi) cen aktywa bazowego i rozliczenia. Tego typu kontrakty dają możliwość osiągnięcia korzyści lub narażają na ryzyko poniesienia strat zbliżonych pod względem wartości odpowiednio do zysków lub strat generowanych przez opcje waniliowe ale tylko w przypadku niewielkich różnic pomiędzy notowaniami rynkowymi aktywów podstawowych i kursów rozliczenia (przy założeniu jednakowych pozostałych czynników wpływających na wycenę rozpatrywanych derywatów). Jednocześnie, im bardziej asymetryczne opcje logarytmiczne pozostają w cenie lub poza ceną, tym bardziej różnice pomiędzy oboma rodzajami kontraktów są widoczne.

https://doi.org/10.22630/MIBE.2018.19.3.22

Jednym z modeli najczęściej wykorzystywanych do wyceny opcji europejskich, w tym także asymetrycznych opcji logarytmicznych, jest model F. Blacka i M. Scholesa [Black, Scholes 1973]. Model ten utożsamiany jest ze stosunkowo prostą formułą analityczną umożliwiającą szybkie określanie wartości teoretycznych instrumentów bazujących na prawach pochodnych. Prostota podejścia F. Blacka i M. Scholesa okupiona jest jednak jego ogólnością skutkującą pominięciem empirycznie obserwowanych zjawisk o charakterze rynkowym [Cont, Tankov 2004].

Warto zauważyć, iż opracowanie podstaw teoretycznych wyceny opcji z jednej strony wpłynęło na rozwój światowego rynku derywatów, z drugiej zaś przyczyniło się do powstania wielu koncepcji wykorzystywanych do modelowania poszczególnych segmentów rynku finansowego. Nie sposób również pominąć tego, iż począwszy od lat 80-tych XX w. można zaobserwować tendencję do poszukiwania alternatywnych sposobów wyznaczania wartości modelowych derywatów. Za główną tego przyczynę należy uznać wzrost ryzyka rynkowego objawiającego się podwyższoną zmiennością cen aktywów finansowych, często o charakterze stochastycznym, oraz zwiększoną skłonnością kursów akcji, obligacji, itd. do zmian o charakterze nieciągłym, tzw. skoków. Zjawiska te widoczne były w szczególności podczas kryzysów finansowych i gospodarczych, w tym m.in. kryzysu meksykańskiego peso w 1994 r., rosyjskiego kryzysu finansowego w 1998 r., argentyńskiego kryzysu gospodarczego w 1999 r, czy też kryzysu z 2007 r. Inną cechą współczesnych rynków finansowych jest dokonywanie transakcji w ramach tzw. handlu wysokich częstotliwości, który pośrednio odpowiada za istnienie leptokurtycznych i asymetrycznych rozkładów stóp zwrotu z poszczególnych klas aktywów oraz tzw. uśmiech zmienności.

Występowanie powyższych nieprawidłowości narzuca z jednej strony konieczność opracowywania alternatywnych modeli wyceny poszczególnych instrumentów finansowych, w tym także opcji, z drugiej zaś jest przyczyną poszukiwania coraz bardziej zindywidualizowanych sposobów wystawiania się na ryzyko lub zabezpieczania się przed nim.

W niniejszym artykule analizie poddawane są dwa zagadnienia. Pierwszym z nich jest porównanie trzech sposobów określania wartości teoretycznych pewnego szczególnego rodzaju opcji egzotycznych, tj. asymetrycznych opcji logarytmicznych. W tym celu zestawiane są ze sobą podejścia martyngałowe, F. Blacka i M. Scholesa oraz bazujące na transformacie Fouriera. W ramach przeprowadzanej analizy, dla zachowania prostoty prezentowanego wywodu, utrzymywane są w mocy założenia właściwe modelowi dyfuzyjnemu. Drugie z rozpatrywanych zagadnień dotyczy sprawdzenia szybkości i dokładności obliczeniowej metody bazującej na transformacie Fouriera w odniesieniu do pozostałych podejść.

PRZEGLĄD LITERATURY

Modele wyceny opcji

Jednym z najwcześniej opracowanych i jednocześnie najczęściej wykorzystywanych modeli wyceny opcji jest model F. Blacka i M. Scholesa [Black, Scholes 1973]. Pozwala on na określenie wartości teoretycznych derywatów przy założeniu, że ceny instrumentów podstawowych kształtują się zgodnie z geometrycznym ruchem Browna. Uproszczenie takie implikuje prawdziwość twierdzenia dotyczącego normalności rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu z aktywów będących podstawą wystawienia kontraktów bazujących na prawach pochodnych. Jednocześnie przeczy ono niektórym empirycznie potwierdzonym zjawiskom, które często nazywane są faktami stylizowanymi [Cont 2004], do których zalicza się m.in. skośność rozkładów stóp zwrotu z akcji, obligacji, itd. oraz tzw. uśmiech zmienności.

Próba uwzględniania powyższych nieprawidłowości w kształtowaniu dochodowości aktywów podstawowych przypisywana jest E. Dermanowi i T. Kani [Derman, Kani 1998] oraz B. Dupiremu [Dupire 1994], którzy jako pierwsi dostrzegli zależność pomiędzy zmiennością wyceny waloru bazowego a poziomem jego notowań. Ze względu na wbudowany w opcje mechanizm dźwigni miało to istotny wpływ na handel tego typu kontraktami.

Odmienny sposób poradzenia sobie z empirycznie obserwowanymi zjawiskami, które pozostają w sprzeczności z modelem F. Blacka i M. Scholesa, polega na modyfikacji procesu opisującego fluktuacje notowań instrumentów bazowych. Wprowadzone zmiany sprowadzają się do dodania zmiennych odpowiedzialnych za występowanie skoków cenowych do równania opisującego ścieżkę kursową walorów ryzykownych. W konsekwencji, nieciągłości kursowe znajdują odzwierciedlenie w wycenie modelowej derywatów [Bates 1996; Kou 2002; Merton 1976].

Uwzględnienie rzeczywistych właściwości szeregów czasowych, w tym w szczególności dopuszczenie występowania zmian kursowych o charakterze dyskretnym, należy uznać za podstawową przyczynę budowy wykładniczych modeli Lévyego [Cont i in. 2004; Jackson i in. 2008], w tym m.in. modeli Variance Gamma [Madan i in. 1998], Normal Inverse Gaussian [Rydberg 1997], CGMY [Carr i in. 2002].

Pewną szczególną kategorię podejść do wyceny opcji stanowią modele zmienności stochastycznej, w których zakłada się, iż odchylenie standardowe ceny aktywa bazowego stanowiącego podstawę wystawienia instrumentów finansowych bazujących na prawach pochodnych zmienia się w sposób losowy [Heston 1993, Naik 2000, Stein, Stein 1991].

Interesujące wydaje się również łączenie modeli stochastycznej zmienności z modelami skokowymi [Scott 1997], a także rozwijane modeli stochastycznej zmienności do postaci np. modelu SABR [Hagan i in. 2003].

Schematy transformaty Fouriera

Istnieje wiele sposobów wykorzystania transformaty Fouriera do wyceny opcji [Schmelzle 2001]. Prekursorami badań z tym związanych są P. Carr i D. B. Madan [Carr, Madan 1999] - autorzy podejścia, w którym po raz pierwszy podejmowana jest próba nadania sensu ekonomicznego funkcjom charakterystycznym wykorzystywanym w procesie określania wartości teoretycznych instrumentów finansowych bazujących na prawach pochodnych.

Za kontynuatorów ich poglądów uważa się G. Bakshi i D. B. Madana [Bakshi, Madan 2000], którzy, w opracowanym modelu, sprowadzają problem wyceny opcji do oszacowania wartości aktywów bazowych w sensie Arrowa-Debreau względem dwóch miar prawdopodobieństwa (martyngałowych).

Odmienne podejście w tej kwestii przypisywane jest M. Attari'emu [Attari 2004], który modyfikuje formułę wyceny instrumentów pochodnych opracowaną przez F. Blacka i M. Scholesa w taki sposób, aby ostatecznie wyznaczyć jedną funkcję charakterystyczną logarytmu naturalnego ceny aktywa bazowego i w konsekwencji jednokrotnie przeprowadzić procedurę numerycznego odwracania obliczonej transformaty Fouriera.

Jeszcze inny sposób wyceny derywatów proponuje D. S. Bates [Bates 2006], który wykorzystuje podejście martyngałowe do tego, aby zastąpić funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej utożsamianej z wartością instrumentu podstawowego odwrotną transformatą Fouriera.

Warto zauważyć, iż wykorzystaniem transformaty Fouriera do wyceny opcji, poza wyżej wymienionymi badaczami, zajmuje się również wielu innych autorów [Lee 2004; Lewis 200; Lipton 200; Wu 2008].

Nie sposób również pominąć faktu, iż poczynione odkrycia znajdują zastosowanie w wycenie wielu rodzajów derywatów, nie tylko o charakterze waniliowym, ale również egzotycznym. Na szczególną uwagę w tej kwestii zasługują K. Borovkov i A. Novikov [Borovkov, Novikov 2002] zajmujący się wyceną opcji barierowych i wstecznych, a także F. Hubalek i J. Kallsen [Hubalek, Kallsen 2005], F. Biagini, Y. Bregman i T. Meyer-Brandis [Biagini i in. 2008] oraz T. R. Hurd i Z. Zhou [Hurd, Zhou 2010] rozszerzający stan wiedzy w kwestii określania wartości teoretycznych instrumentów bazujących na prawach pochodnych opiewających na więcej niż jedno aktywo, w tym m.in. opcji koszykowych i spreadowych, a także katastroficznych.

Dalsza część artykułu zawiera:

1. opis wykorzystywanych danych
2. prezentację trzech sposobów ustalania ile warte są asymetryczne opcje logarytmiczne,
3. porównanie szybkości i dokładności obliczeniowej procesu wyceny analizowanych kontraktów przy wykorzystaniu podejść: martyngałowego, F. Blacka i M. Scholesa oraz bazującego na transformacie Fouriera.

WYKORZYSTANE DANE

Podstawowe informacje

Dane wykorzystywane w badaniach przeprowadzonych na potrzeby niniejszego artykułu mają charakter przykładowy. Oznacza to, że szybkość oraz dokładność wyceny analizowanych instrumentów finansowych rozpatrywane są dla hipotetycznych wartości notowań aktywów bazowych, stopy zwrotu wolnej od ryzyka, okresu pozostającego do wygaśnięcia kontraktów oraz zmienności notowań walorów podstawowych. Podstawowym powodem wyboru takiego sposobu dokonywania obliczeń jest specyfika analizowanych derywatów, które, według najlepszej wiedzy autora, nie są przedmiotem zorganizowanego obrotu na żadnym z rynków regulowanych. Powoduje to, że dostęp do danych empirycznych, na podstawie których można przeprowadzać wnioskowanie statystyczne, jest ograniczony.

Pomimo tego, warto zauważyć, iż rozpoznane prawidłowości nie umiejszają znaczenie otrzymanych wyników. Potrzeby uczestników rynków finansowych w sferze zabezpieczenia się przed ryzykiem lub wystawiania się na nie są tak zróżnicowane, że opcje logarytmiczne mogą stanowić podstawę lub istotne uzupełnienie stosowanych strategii.

METODA BADAWCZA

Pierwsza z rozpatrywanych metod wyceny opcji europejskich określana jest mianem martyngałowej. Bazuje ona na założeniu istnienia procesu stochastycznego o charakterze ciągłym opisującego zmiany cen aktywa bazowego, na które opiewa kontrakt, tj.:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}} \tag{1}$$

gdzie: dS_t to przyrost wartości instrumentu podstawowego, μ jest dryfem kursowym, σ oznacza odchylenie standardowe stopy zwrotu z akcji, obligacji, itd. stanowiących podstawę wystawienia opcji a $W_t^{\mathbb{P}}$ jest procesem Wienera w mierze prawdopodobieństwa $\mathbb{P}$.

W ramach prezentowanego podejścia przyjmuje się, iż opcja warta jest tyle ile wynoszą korzyści zdyskontowane względem skorygowanej miary martyngałowej $\mathbb{Q}$ na moment wyceny, tj.:

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[C(S_T, T)|\Omega_t] \tag{2}$$

gdzie: e to liczba Nepera, $T - t$ to okres pozostający do wygaśnięcia opcji, $E^{\mathbb{Q}}$ to wartość oczekiwana względem miary martyngałowej $\mathbb{Q}$ a Ω_t to filtracja rozumiana jako historia notowań aktywa podstawowego, na które opiewa instrument pochodny (do momentu t).

Warto zauważyć, iż wprowadzenie miary prawdopodobieństwa $\mathbb{Q}$ powoduje, iż $e^{-r(T-t)} S_T$ jest martyngałem.

Biorąc pod uwagę powyższe stwierdzenia łatwo jest określić profil wypłaty asymetrycznych opcji logarytmicznych *call* typu europejskiego jako:

$$C^l(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[lnS_T - lnX|\Omega_t] \tag{3}$$

gdzie: X to cena rozliczenia kontraktów a wszystkie pozostałe oznaczenia są takie same jak poprzednio.

Wzór (3) można przekształcić do postaci, która pozwala w sposób bezpośredni wyznaczyć wartość rozpatrywanych derywatów, tj.:

$$C^l(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_X^{\infty} (lnS_T - lnX) \mathbb{Q}(S_T|\Omega_t) dS_T \tag{4}$$

gdzie: $\mathbb{Q}(S_T|\Omega_t)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennej S_T.

Wiedząc, że S_T posiada rozkład logarytmiczno - normalny opisany wzorem:

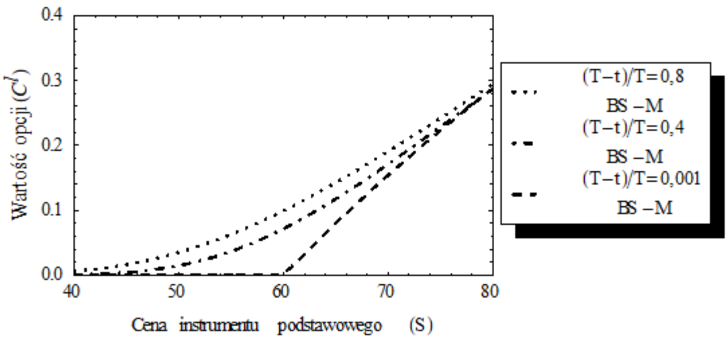
$$\mathbb{Q}(S_T|\Omega_t) = \frac{e^{-\frac{\left[lnS_T - \left(lnS_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}}{S_T \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \tag{5}$$

można stwierdzić, że wartość asymetrycznych opcji logarytmicznych może być opisana następującą formułą (metoda określana dalej jako BS-M):

$$C^l(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_X^{\infty} (lnS_T - lnX) \frac{e^{-\frac{\left[lnS_T - \left(lnS_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}}}{S_T \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} dS_T \,. \tag{6}$$

Rysunek 1 przedstawia funkcje wypłat asymetrycznych opcji logarytmicznych wyznaczone metodą martngałową przy założeniu, że stopa procentowa wolna od ryzyka wynosi 4%, odchylenie standardowe stóp zwrotu z aktywa bazowego kształtuje się na poziomie 29% a cena rozliczenia przyjmuje wartość 60.

Rysunek 1. Funkcje wypłat asymetrycznych opcji logarytmicznych wyznaczone metodą BS-M



Źródło: opracowanie własne

Druga metoda obliczania wartości teoretycznych asymetrycznych opcji logarytmicznych bazuje na podejściu F. Blacka i M. Scholesa. Warto w tym momencie zauważyć, iż nie jest jednak z nim tożsama (gdyż nie opiera się na rozwiązaniu równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu). Prawdziwość takiego sformułowania znajduje uzasadnienie w metodologii proponowanego podejścia, w którym zakłada się, iż punktem wyjścia jest formuła (3), która po odpowiednim przekształceniu pozwala otrzymać wynik odnoszący się bezpośrednio do dystrybuanty wystandaryzowanego rozkładu normalnego. W konsekwencji, wartość będących przedmiotem zainteresowania derywatów można określić wykorzystując następujący wzór (metoda określana dalej jako BS):

$$C^{l}(S_t, t) = e^{-r(T-t)}\left[\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d^2} + \left(ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)\mathcal{N}(d)\right] \quad (7)$$

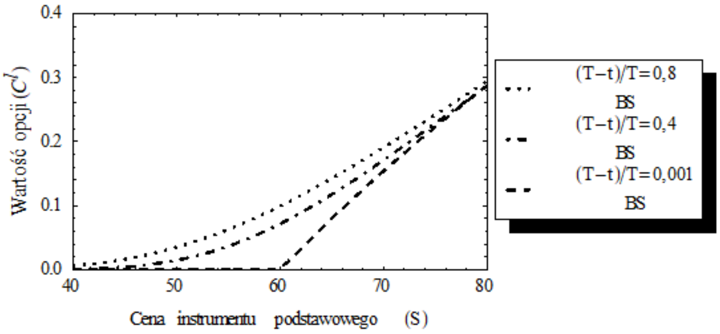
gdzie: $\mathcal{N}(.)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego, d to parametr opisany wzorem:

$$d = \frac{ln\left(\frac{S_t}{X}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (8)$$

zaś pozostałe wielkości są zgodne z wcześniej zdefiniowanymi.

Rysunek 2 przedstawia funkcje wypłat asymetrycznych opcji logarytmicznych wyznaczone metodą F. Blacka i M. Scholesa przy założeniu wykorzystania danych zgodnych z tymi, które posłużyły do wygenerowania rysunku 1.

Rysunek 2. Funkcje wypłat asymetrycznych opcji logarytmicznych wyznaczone metodą BS



Źródło: opracowanie własne

Trzecia metoda wyceny asymetrycznych opcji logarytmicznych opiera się na transformacie Fouriera. Związane z tym podejście jest jednak o wiele trudniejsze do praktycznego zastosowania niż dwa poprzednie. Wynika to nie tylko z większej złożoności matematycznej prezentowanej koncepcji ale przede wszystkim stąd, że żaden z wcześniej wymienionych schematów transformaty Fouriera nie może być w łatwy sposób zastosowany do wyceny analizowanych instrumentów finansowych. Podstawowy problem jaki pojawia się przy tej okazji związany jest z wyrażeniem całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{Q}(s_T|\Omega_t) s_T \frac{e^{-\mathbb{I}\xi s_T}\phi(\xi)}{\mathbb{I}\xi} d\xi \tag{9}$$

gdzie: $s_T = lnS_T$, $\mathbb{I}$ to część urojona liczby zespolonej a ξ to stała (pozostałe oznaczenia jak wcześniej), jako funkcji charakterystycznej zmiennej s_T, która to funkcja defniowana jest w następujący sposób:

$$\phi(\xi) = e^{\mathbb{I}\xi\left(lnS_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2(T-t)} \tag{10}$$

Według najlepszej wiedzy autora niniejszego opracowania jedyny sposób określenia wartości modelowych analizowanych derywatów przy pomocy transformaty Fouriera zgodny jest z podejściem J. Zhu [Zhu 2000]. Zaproponowana przez niego metodologia sprowadza się do policzenia odwrotnej transformaty Fouriera (przy założeniu znajomości $\phi(\xi)$) w następujący sposób:

$$\chi' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Re\left[\frac{e^{-\mathbb{I}\xi ln(X)}\phi(\xi)}{\mathbb{I}\xi}\right] d\xi \tag{11}$$

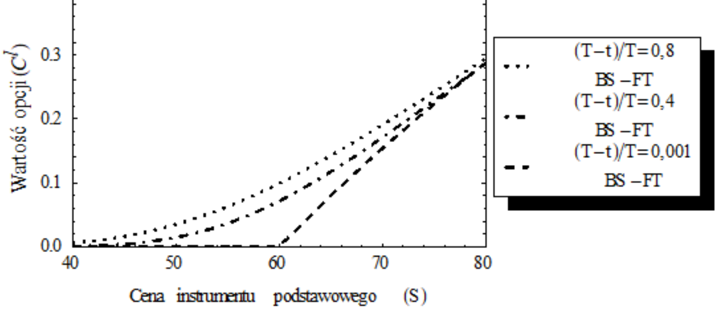
a następnie podstawienie jej do wzoru (7) zamiast $\mathcal{N}(d)$. W rezultacie wykonanych czynności otrzymywana jest formuła, która może być wykorzystana do określenia wartości sprawiedliwych asymetrycznych opcji logarytmicznych (metoda oznaczana dalej jako BS-FT), tj.:

$$C^l(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2} + e^{-r(T-t)} \left(ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)$$
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Re\left[\frac{e^{-\mathbb{I}\xi ln(X)}\phi(\xi)}{\mathbb{I}\xi}\right] d\xi\right) \tag{12}$$

gdzie: $\Re[.]$ to część rzeczywista funkcji podcałkowej.

Zgodność formuły (12) ze wzorami (7) i (6) potwierdza rysunek 3, który został opracowany przy założeniu identycznych danych wejściowych, jak w przypadku rysunków 1 i 2.

Rysunek 3. Funkcje wypłat asymetrycznych opcji logarytmicznych wyznaczone metodą BS-FT



Źródło: opracowanie własne

W dalszym etapie przeprowadzanych badań analizie poddawana jest szybkość i dokładność obliczeniowa wyceny będących przedmiotem zainteresowania instrumentów finansowych o charakterze pochodnym. Do tego celu wykorzystywany jest pakiet Mathematica 8.0, który jest uruchamiany na komputerze z procesorem Intel i5-4210U CPU @ 1,70 GHz posiadającym pamięć RAM równą 6 GB. Dane wejściowe są zgodne z tymi, które zostały wcześniej wykorzystane do wyznaczenia funkcji wypłat rozpatrywanych kontraktów. Warto zwrócić uwagę na to, że pamięć podręczna *cache* jest za każdym razem kasowana po to, aby wymusić ponowne przetwarzanie kodów.

WYNIKI BADAŃ

Szybkość wyceny asymetrycznych opcji logarytmicznych w zależności od *moneyness* rozpatrywanych kontraktów oraz czasu pozostającego do ich wygaśnięcia zawierają tabele 1 - 3.

Tabela 1. Szybkość wyceny asymetrycznych opcji logarytmicznych (w sekundach) przy (T-t)/T = 0,8

	OTM (S_T=50)	ATM (S_T=60)	ITM (S_T=70)
BS - M	0,437	0,468	0,469
BS	≈ 0	≈ 0	≈ 0
BS-FT	0,032	0,016	0,015

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2. Szybkość wyceny asymetrycznych opcji logarytmicznych (w sekundach) przy (T-t)/T = 0,4

	OTM (S_T=50)	ATM (S_T=60)	ITM (S_T=70)
BS - M	0,453	0,469	0,484
BS	≈ 0	≈ 0	≈ 0
BS-FT	0,016	0,016	0,016

Źródło: opracowanie własne

Tabela 3. Szybkość wyceny asymetrycznych opcji logarytmicznych (w sekundach) przy (T-t)/T = 0,001

	OTM (S_T=50)	ATM (S_T=60)	ITM (S_T=70)
BS - M	0,485	0,485	0,469
BS	≈ 0	≈ 0	≈ 0
BS-FT	0,015	0,015	0,015

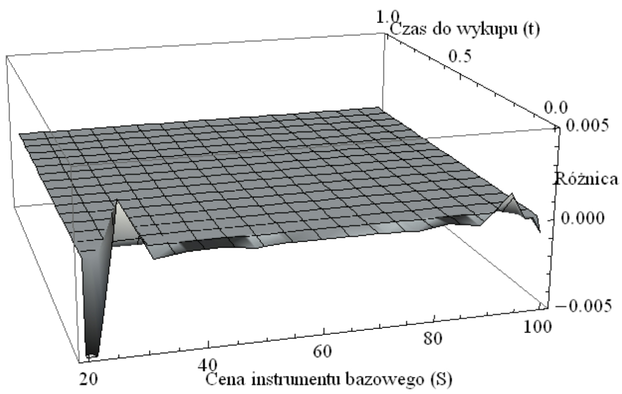
Źródło: opracowanie własne

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, iż asymetryczne opcje logarytmiczne można najszybciej wycenić implementując metodę BS. Proces wyceny będących przedmiotem zainteresowania instrumentów finansowych jest natomiast najwolniejszy przy wykorzystaniu podejścia BS-M. Metoda BS-FT pozwala natomiast określić wartość opcji wolniej niż BS ale szybciej niż BS-M.

Rozpoznana tym sposobem prawidłowość jest niezależna zarówno od tego, czy opcje są poza ceną, przy cenie, czy w cenie, jak i czasu pozostającego do ich wygaśnięcia.

Ze względu na to, że koncepcja wyceny bazująca na transformacie Fouriera jako jedyna ma charakter numeryczny, istotnym wydaje się sprawdzenie dokładności obliczeniowej wyceny instrumentów bazujących na prawach pochodnych w relacji do wyceny opcji w sposób analityczny. W tym celu, jako podstawę do porównań, wybrano metodę BS. Różnice w wycenie będących przedmiotem zainteresowania kontraktów przedstawione są na rysunku 4. Warto zaznaczyć, iż do wyznaczania odwrotnej transformaty Fouriera wybrane zostało podejść polegające na numerycznym całkowaniu metodą trapezów.

Rysunek 4. Różnice w wycenie asymetrycznych opcji logarytmicznych metodami BS i BS-FT



Źródło: opracowanie własne

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, iż w okresach bliskich momentowi wygaśnięcia opcji metoda BS-FT obarczona jest największym błędem. Warto też zauważyć, iż w celu poprawy dokładności obliczeń trudno jest znaleźć alternatywną metodę bazującą na transformacie Fouriera pozwalającą na wycenę asymetrycznych opcji logarytmicznych. Istnieje jednak możliwość poszukiwania odmiennych schematów numerycznych, które usprawniają proces wyznaczania wartości modelowej kontraktów bazujących na prawach pochodnych zarówno jeśli chodzi o dokładność, jak i szybkość obliczeniową. Poza metodami bazującymi na numerycznym obliczaniu całek, szczególna uwaga powinna być zwrócona na dysktreną oraz szybką transformatę Fouriera.

PODSUMOWANIE

Niniejsze opracowanie dotyczy wyceny asymetyrcznych opcji logarytmicznych za pomocą trzech metod, z których pierwsza odwołuje się do teorii martyngałów, druga bazuje na modelu F. Blacka i M. Scholesa a trzecia wykorzystuje transformatę Fouriera. Powyższych metod nie można uznać za równoważne. Wartości teoretyczne będących przedmiotem zainteresowania instrumentów finansowych najszybciej można wygenerować stosując metodę BS, najwolniej zaś podejście BS-M. Jeśli wziąć pod uwagę dokładność obliczeniową, to najgorsza pod tym względem jest koncepcja, w której wykorzystywana jest transformata Fouriera.

BS-FT nie może być jednak jednoznacznie odrzucona. Warto pamiętać, iż w przypadku modeli stochastycznej zmienności [Heston 1993; Stein, Stein 1991] metody BS-M i BS nie są możliwe do zastosowania. W rezultacie pojawia się konieczność wykorzystania transformaty Fouriera do wyceny derywatów. W przypadku tego typu podejść znaczenia nabierają takie kwestie jak wybór odpowiedniego schematu transformaty Fouriera oraz określenie najlepszej metody numerycznej wykorzystywanej do obliczenia jej odwróconej postaci.

BIBLIOGRAFIA

Attari M. (2004) Option Pricing Using Fourier Transform: A Numerically Efficient Simplification. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=520042 [dostęp: 1.07.2018].

Bakshi G., Madan D. (2000) Spanning and Derivative-Security Valuation. Journal of Financial Economics, 2(55), 205-238.

Bates D. S. (2006) Maximum Likelihood Estimation of Latent Affine Processes. Review of Financial Studies, 19(3), 909-965.

Bates D. S. (1996) Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. The Review of Financial Studies, 9(1), 69-107.

Biagini F., Bregman Y., Meyer-Brandis T. (2008) Pricing of Catastrophe Insurance Options Written on a Loss Index with Reestimation. Insurance: Mathematics and Economics, 43 (2), 214-222.

Black F., Scholes M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81(3), 637-654.

Borovkov K., Novikov A. (2002) On a New Approach to Calculating Expectations for Option Pricing. Journal of Applied Probability, 39(4), 889-895.

Carr P., Geman H., Madan D. B., Yor M. (2002) The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation. Journal of Business, 75(2), 305-332.

Carr P., Madan D. B. (1999) Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. Journal of Computational Finance, 2(4), 61-73.

Cont R., Tankov P. (2004) Financial Modeling with Jump Processes. Boca Raton: Chapman and Hall.

Derman E., Kani, T. (1998) Stochastic Implied Trees: Arbitrage Pricing with Stochastic Term and Strike Structure of Volatility. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1, 61-110.

Dupire B. (1994) Pricing with Smile. Risk, 7(1), 18-20.

Hagan P. S., Kumar D., Lesniewski A., Woodward D. E (2003) Managing Smile Risk. Wilmott Magazine, 3, 84-108.
Heston S. (1993) A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. The Review of Financial Studies, 6(2), 327-343.
Hubalek F., Kallsen J. (2005) Variance-Optimal Hedging and Markowitz-Efficient Portfolios for Multivariate Processes with Stationary Independent Increments with and Without Constraints. Working paper, TU München.
Hurd T. R., Zhou Z. (2010) A Fourier Transform Method for Spread Option Pricing. SIAM Journal on Financial Mathematics, 1(1), 142-157.
Jackson K. R., Jaimungal S., Surkov V. (2008) Fourier Space Time-Stepping for Option Pricing with Levy Models. Journal of Computational Finance, 12(2), 1-29.
Kou S. (2002) Jump-Diffusion Model for Option Pricing. Management Science, 48(8), 1086-1101.
Lee R. W. (2004) Option Pricing by Transform Methods: Extensions, Unification, and Error Control. Journal of Computational Finance, 7(3), 50-86.
Lewis A. (2001) A Simple Option Formula for General Jump-Diffusion and other Exponential Levy Processes. SSRN Electronic Journal, 1-25.
Lipton A. (2002) The Vol Smile Problem. http://www.math.ku.dk/~rolf/Lipton_VolSmileProblem.pdf, [dostęp: 8.12.2017].
Madan D., Carr P., Chang E. (1998) The Variance Gamma Process and Option Pricing. European Finance Review, 1, 79-105.
Merton R. C. (1976) Option Pricing when Underlying Stock Returns Are Discontinuous. Journal of Financial Economics, 3(1-2), 125-144.
Naik V. (2000) Option Pricing with Stochastic Volatility Models. Decisions in Economics and Finance, 23(2), 75-99.
Rydberg T. H. (1997) The Normal Inverse Gaussian Levy Process: Simulation and Approximation. Communication in Statistics Stochastic Models, 13(4), 887-910.
Schmelzle M. (2010) Option Pricing Formulae Using Fourier Transform: Theory and Application. http://pfadintegral.com [dostęp: 1.07.2018]
Scott L. (1997) Pricing Stock Options in a Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier inversion methods. Mathematical Finance, 7(4), 413-424.
Stein E. M., Stein J. C. (1991) Stock Price Distribution with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. The Review of Financial Studies, 4(4), 727-752.
Wu L. (2008) Modeling Financial Security Returns using Lévy Processes. [in:] Handbooks in Operations Research and Management Science: Financial Engineering, 15, Elsevier, North-Holland, 117-162.
Zhu J. (2000) Modular Pricing of Options: An Application of Fourier Analysis. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 493, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

PRICING ASYMMETRIC LOGARITHMIC OPTIONS VIA FOURIER TRANSFORM

Abstract: The aim of the article is to price European logarithmic options via Fourier transform. As a part of the subject metter, three approaches were proposed to determine theoretical value of the analyzed derivatives in the F. Black and M. Scholes setting, i.e. the martingale approach, F. Black and M. Scholes approach and the approach based on the Fourier transform. In addition, an analysis of the computational speed and accuracy of the valuations was carried out.

Keywords: Black-Scholes model, Fourier transform, asymmetric logarithmic options