Piotr Zasępa
Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie

KONSTRUKCJA PŁASZCZYZNY UŚMIECHU ZMIENNOŚCI NA RYNKU WALUTOWYM

Wprowadzenie

Rynek walutowy (foreign exchange) jest największym rynkiem opcji na świecie. Podlega on dynamicznym zmianom, a modele wyceny finansowych opcji walutowych są oparte na wykorzystaniu zmienności. Obecnie można na nim zawierać różnego typu transakcje opcyjne od prostych opcji waniliowych do zaawansowanych opcji egzotycznych trzeciej generacji (produkty hybrydowe i strukturyzowane). Mimo szybkiego wzrostu popularności opcji egzotycznych, największy udział nadal mają opcje waniliowe oraz egzotyczne pierwszego rodzaju. W przypadku podstawowego modelu wyceny opcji – modelu Blacks Scholesa Mertona (BS) zmienność stosowana do wyceny opcji jest stała w czasie. Struktura terminowa zmienności tworzy tzw. płaszczyznę zmienności lub powierzchnie zmienności, dla których zmienność przybiera różne poziomy w zależności od terminu i ceny wykonania danego typu opcji. Celem artykułu jest przedstawienie konstrukcji płaszczyzny uśmiechu zmienności na rynku walutowym oraz omówienie i charakterystyka podstawowych pojęć związanych z interpolacją i ekstrapolacją notowań zmienności dla par określonych kursów walutowych.

1. Opis teoretyczny transakcji walutowych

Teoretycznie zakłada się, iż transakcją walutową jest transakcja otwierająca pozycję walutową lub mogąca wpłynąć w przyszłości na pozycję walutową inwestora. Pozycja walutowa to zobowiązanie (pozycja krótka) lub należność (pozycja długa) w walucie obcej. Biorąc pod uwagę transakcje walutowe należy wyróżnić: transakcję natychmiastową (kasową), która może odnosić się do trzech terminów rozliczenia zwanych datami waluty (value date): today, tomorrow i spot. Sama data spot obejmuje dwa dni robocze i jest standardową datą rozliczeniową; transakcje terminowe (forward, futures), które odnoszą się do dat późniejszych niż spot; transakcje opcyjnie, które też są określane jako transakcje terminowe, aczkolwiek w tym przypadku (inaczej niż w transakcji forward oraz futures) jedna ze stron posiada prawo, a druga obowiązek zrealizowania dostawy waluty. Wśród podstawowych transakcji opcyjnych należy wskazać: europejskie opcje waniliowe, amerykańskie opcje waniliowe oraz opcje egzotyczne pierwszej, drugiej oraz trzeciej generacji[1].

Kurs walutowy XXX/YYY pokazuje, ile warta jest waluta bazowa XXX w jednostkach waluty kwotowanej YYY. Miarą kursu jest więc stosunek YYY/XXX, który oznacza ilość waluty YYY płaconej za jednostkę waluty XXX. Bieżąca wartość kursu walutowego $S_t = FOR/DOM$ oznacza ilość jednostek waluty krajowej niezbędnej do zakupu określonych jednostek waluty obcej w chwili t. W takim przypadku, jeśli $S_t = 3{,}0912\, USD/PLN$, to jeden USD jest wart 3,0912 PLN, gdzie PLN jest walutą krajową (kwotowaną), a USD walutą obcą (bazową).

Kontraktem terminowym nazywamy zawarte w chwili t zobowiązanie do wymiany N jednostek waluty obcej na $Nf(t, T)$ jednostek waluty krajowej w chwili T po ustalonej na początku cenie wykonania $f(t, T)$, gdzie

$$f(t,T) = \frac{S_t DF_f(t,T)}{DF_d(t,T)}$$

gdzie: $DF_f(t,T)$ – czynnik dyskontowy dla waluty kwotowanej, $DF_d(t,T)$ – czynnik dyskontowy dla waluty bazowej.

Początkowa wartość takiego kontraktu zawartego w chwili t wynosi 0 dla ($t < T$), a wraz z upływem czasu zmienia się według następującej formuły

$$V_f(t,T) = DF_d(t,T)(f(t,T) - K) = S_t DF_f(t,T) - KDF_d(t,T)$$

gdzie K to cena wykonania kontraktu ustalona w chwili t, a wartość takiego kontraktu ustalona jest w jednostkach waluty kwotowanej.

[1] P. Mielus: Rynek opcji walutowych w Polsce. K.E. Liber, Warszawa 2002, s. 2.

Kontraktem opcyjnym typu waniliowego *call FOR* (*put DOM*) nazywamy nabycie w okresie *t* prawa do wymiany *N* jednostek waluty obcej po kursie *K* w z góry określonym terminie *T*. Wartość kontraktu opcyjnego wyliczana jest według formuły BS, dla którego dynamika kursu walutowego określona jest za pomocą stochastycznego równania różniczkowego z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} dS_t = (r_d - r_f)S_t dt + \sigma S_t dW_t \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

gdzie: *rd* – stopa procentowa (ciągła kapitalizacja) dla waluty kwotowanej, *rf* – stopa procentowa (ciągła kapitalizacja) dla waluty bazowej, σ jest zmiennością, *W*t – standardowy proces Browna, *S* jest procesem Ito postaci

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + dW(t) = \right.$$

$$= S(s)\exp\left(\left(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) + \sigma\big(W(t) - \sigma W(s)\big)\right) \text{ dla } 0 \le s \le t$$

gdzie S_0 interpretowane jest jako cena waloru w chwili *t = 0*.

Innymi słowy proces zmiany ceny waloru jest geometrycznym ruchem Browna. Rozkład *St* w czasie *T* ma rozkład log-normalny. *Ln St* ma rozkład normalny ze średnią $lnS_0 = \left(r_d - r_f\right) - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ i wariancją $\sigma^2 t$. Wycena walutowego kontraktu opcyjnego oparta jest na zmodyfikowanej formule BS nazywanej modelem Garmana-Kohlhagena[2] opublikowanym w 1982 roku

$$C = Sexp(-rt)N(d_+) - Kexp(-Rt)N(d_-)$$

$$P = Kexp(-Rt)N(-d_-) - Sexp(-rt)N(-d_+)$$

$$d_+ = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(R - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sqrt{T}\sigma}$$

$$d_- = d_+ - \sigma\sqrt{T}$$

gdzie *N* jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego

$$N(d_+) = \int_{-\infty}^{d1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - N(-d_+)$$

[2] M.B. Garman, S.W. Kohlhagen: Foreign Currency Option Values. „Journal of International Money and Finance" 1983, Vol. 2, s. 231-237.

C – cena opcji call (w walucie kwotowanej), P – cena opcji put (w walucie kwotowanej), S – kurs spot (w notacji waluta bazowa/waluta kwotowana), K – kurs realizacji (w notacji waluta bazowa/waluta kwotowana), σ – zmienność, R – oprocentowanie waluty kwotowanej (kapitalizacja ciągła), r – oprocentowanie waluty bazowej (kapitalizacja ciągła), t – czas swapowy, T – czas stochastyczny. W walucie bazowej wartość kontraktu może być wyrażona jako $\frac{C}{S_t}$. Waluta w której wyrażana jest premia kontraktu nazywana jest premium carrency. Opcja o kursie realizacji równym kursowi terminowemu o dacie rozliczenia tożsamej z datą dostawy kontraktu opcyjnego nazywana jest opcja ATM (at the money). Wartość wewnętrzna opcji (instrinct value) to różnica pomiędzy kursem terminowym a kursem realizacji w sytuacji, kiedy kurs realizacji jest korzystniejszy od kursu terminowego. Opcja posiadająca wartość wewnętrzna nazywana jest opcją ITM (in the money). Opcja o zerowej wartości wewnętrznej nazywana jest opcją OTM (out of the money). Należy stwierdzić, iż definicja walutowej opcji ATM nie jest jednoznaczna. Wśród konwencji w zależności od ceny wykonania K wyróżniamy następujące delty: *ATM spot*, dla K = S0, delta call = –delta put (delta parity), *ATM forward*, dla $K = f$, *ATM-value-neutral*, dla K, takiego że wartość V opcji call = V wartości opcji put (value parity), *ATM – Δ – neutral*, dla K, takiego, że Δ opcji call = Δ opcji put (delta parity).

Z parytetu opcji put-call wynika, że *ATM-value-neutral* jest równa *ATM forward.* Symetrię kurów walutowych w kontekście zmienności można określić następującą formułą: $\frac{1}{S}v(S, K, T, t, \sigma, r_{d,}r_f, \emptyset) = Kv\left(\frac{1}{S}, \frac{1}{K}, T, t, \sigma, r_{d,}r_f - \emptyset\right)$. Z równania wynika, iż wartość opcji może być obliczona w walucie bazowej lub kwotowanej. Można rozważyć opcję na EUR/USD. Na giełdzie w Nowym Jorku będzie ona kosztować $v(S, K, T, t, \sigma, r_{USD,}r_{EUR}, 1)$ USD i dlatego jej wartość w EUR wyniesie $v\left(\frac{1}{S}, \frac{1}{K}, T, t, \sigma, r_{EUR,}r_{USD}, -1\right)/S$. Ta opcja *EURcall* może być również rozważana jako opcja *USDput* w wypłatą $K(\frac{1}{K} - \frac{1}{S_T})^+$. Wartość tej opcji wynosi $Kv\left(\frac{1}{S}, \frac{1}{K}, T, t, \sigma, r_{EUR,}r_{USD}, -1\right)$ euro na giełdzie we Frankfurcie dlatego, iż S_t i mają taka samą zmienność. Wartość opcji na obu rynkach musi być taka sama i powinna być kwotowana przy tej samej zmienności. W przeciwnym wypadku istnieje możliwość przeprowadzenia arbitrażu.

2. Analiza zmienności kuru walutowego

Podmioty zaangażowane na rynku opcji walutowych podejmują decyzje inwestycyjne na podstawie oczekiwanego zakresu zmienności stóp zwrotu kursu walutowego. Zmienność (volatility) jest jedynym parametrem kształtowanym na rynku pochodnym, a nie na rynku instrumentu bazowego[3]. Prognozowanie i określenie poziomu zmienności implikowanej określonej przez rynek i jego uczestników jest podstawowym zadaniem dla uczestników rynku opcji walutowych. Wpływa ona bowiem na poziom i charakter zabezpieczeń przyszłych przepływów walutowych lub ich portfela. W inżynierii finansowej możemy wskazać następujące rodzaje zmienności: zmienność historyczną (historical volatility), zmienność implikowana lub rynkowa (implied volatility), zmienność lokalna (local volatility), zmienność stochastyczna (stochastic volatility).

Zmienność historyczna to zaanualizowane odchylenie standardowe logarytmicznej stopy zwrotu z ceny danego aktywa S. Z procesu stochastycznego wynika, że: $S_t = S_0 \exp\left(\left(r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right.$.

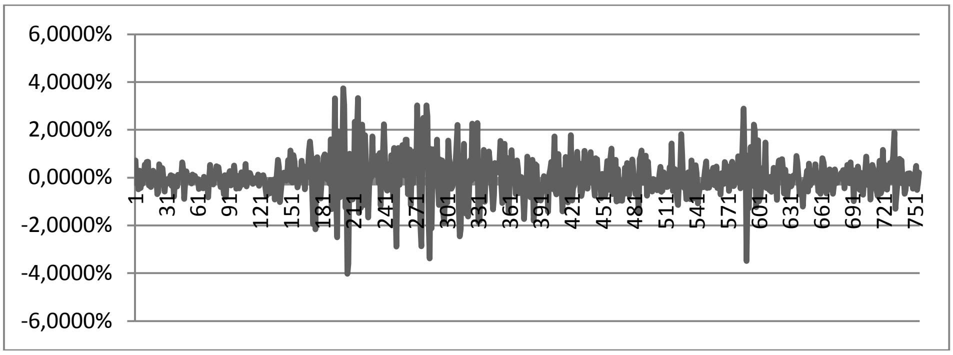
Z powyższego równania wynika, że $VAR(ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)) = \sigma^2 t$. Obliczenie zmienności rynkowej stosowanej do wyceny opcji w modelu Garmana-Kohlagena wymaga małej modyfikacji formuły. Oblicza się najczęściej zmienność w skali jednego dnia i następnie skaluje się ją do zmienności rocznej następującym wzorem: $\hat{\sigma} = \sqrt{252}\sigma_{1d}$. Liczba 252 wynika z tego, iż rok ma około 252 dni handlowych, która to liczba zależy od kraju waluty. W praktyce analizuje się szeregi czasowe niezawierające świąt i weekendów. Wyznaczenie zmienności historycznej jest jedynie podstawą do dalszego prognozowania zmienności. Ponadto, istnieje wiele modeli szacowania zmienności implikowanej. Wśród najpopularniejszych należy wymienić modele średniej ruchomej EWMA lub modele typu GARCH.

Zmienność implikowana to liczba, która spełnia równanie formuły BS dla określonej ceny opcji. Liczba ta kalibruje formułę BS dla opcji o czasie trwania *T* i cenie wykonania *K*. Analizując wykres 1 należy stwierdzić, iż w logarytmicznych stopach zwrotu występuje efekt skupienia danych, wysokie prawdopodobieństwo wystąpienia bardzo dużych odchyleń od średniej, skośność rozkładu oraz niestałość wariancji w czasie.

[3] Ibid., s. 79.

Wykres 1

Logarytmiczne stopy zwrotu pary walutowej EUR/PLN
dla okresu 01.01.2008-31.01.2010



Źródło: Dane kursu walutowego Narodowego Banku Centralnego.

Zmienność lokalna to detreministyczna (niestochastyczna) funkcja $\sigma = \sigma(s, t)$, która występuje w równaniu opisującym proces S_t cen instrumentu bazowego. $dS_t = r(S_t, t)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_t$. Zmienność stochastyczna (stochastic volatility) to model, w którym proces cen jest opisany równaniem: $dS_t = r(S_t, t)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_t$, gdzie tym razem $\sigma = \sigma(s, t)$, jest wielkością stochastyczną, taką że proces wariancji: $V = \sigma^2$, spełnia równanie: $dV_t = \mu(V_t, S_t, t)dt + v(V_t, S_t, t)d\widehat{W_t}$. Dla pewnych funkcji $\mu\ i\ v$. Zakłada się również, że procesy Wienera W_t i $\widehat{W_t}$ są skorelowane, w tym sensie, że $E\left(dW_t, \widehat{dW_t}\right) = \rho dt$. Pierwszymi modelami poruszającymi problematykę zmienności stochastycznej były: Model Hulla i White'a[4], Model Hestona[5].

3. Struktura czasowa zmienności

Analizując zmienność historyczną można stwierdzić, iż jej poziom ulega ciągłym wahaniom, co jest sprzeczne z założeniami modelu BS. Struktura czasowa zmienności to krzywa odnosząca się do poszczególnych przedziałów czasowych zmienności. Może ona być tożsama ze struktura terminową stóp

[4] J.C. Hull, A. White: The Pricing of Option on Assets with Stochastic Volatilities. „Journal of Finance" 1997, Vol. 42, s. 281-300.

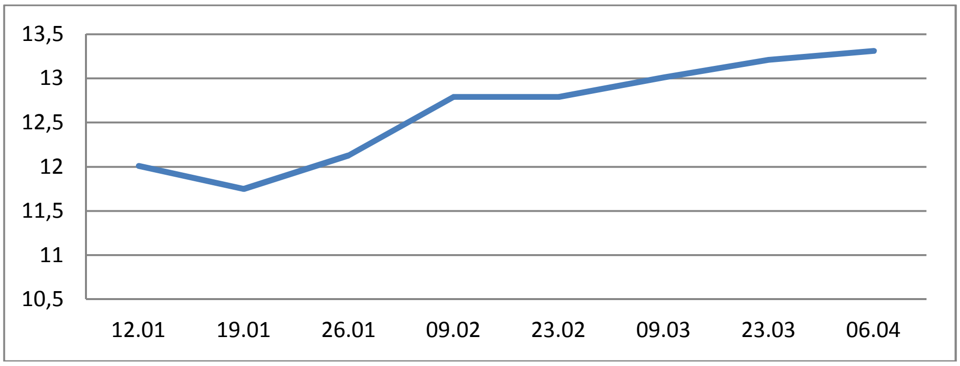
[5] S.L. Heston: A Closed form Solution for Option with Stochastic Volatility with Application for Bonds and Currency Options. „Review of Financial Studies" 1993, Vol. 6, s. 327-344.

zwrotu. Możemy wyróżnić następujące kształty omawianej krzywej: rosnący, stały, malejący oraz niemonotoniczny. Tylko ta druga struktura jest zgodna z założeniami BS, a pozostałe zakładają zmienność zmienności w czasie. Tak jak w przypadku stóp procentowych na normalnym rynku im dłuższy okres do zapadalności opcji, tym zmienność powinna być wyższa. Posiadając dane dotyczące struktury czasowej zmienności można dość szybko oszacować terminową zmienność za pomocą następującego wzoru

$$VOL_{1,2} = \sqrt{\frac{(VOL_{0,2})^2 * T_{0,2} - (VOL_{0,1})^2 * T_{0,1}}{T_{1,2}}}$$

Wykres 2

Terminowa struktura zmienności dla EUR/USD dla opcji ATM
01.01.2011



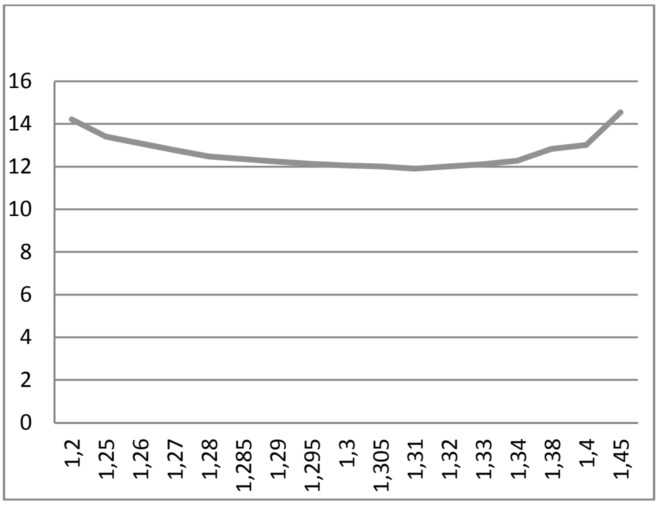
Źródło: Dane Domu Maklerskiego TMS Brokers.

4. Struktura kursowa zmienności

Struktura kursowa zmienności dla rynków kapitałowych jest wyrazem strachu związanego ze spadkiem notowań indeksów lub kursów akcji. Jest to raczej jednostronny wzrost zmienności. W przypadku kursów walutowych problem wzrostu zmienności może wystąpić symetrycznie po dwóch stronach kursu w stosunku do kursu ATM F. Dodatkowym problemem na rynku walutowym jest notowanie zmienności względem kursu delty. Niestety struktura kursowa zmienności (implied volatility strike curve) jest również sprzeczna z modelem BS. Wskazuje ona na różne poziomy zmienności dla rożnych kursów wykonania. Na rynku występuje tendencja do przeszacowywania opcji OTM w stosunku do ceny wynikającej z modelu BS. Jest to związane z dość niską vegą opcji i wysoką dźwignią finansową jaka występuje w przypadku transakcji opcyjnych. Krzywa wskazująca na zależność między kursem realizacji i poziomem zmienności implikowanej ma najczęściej kształt nazywany uśmiechem zmienności (volatility smile).

Wykres 3

Uśmiech zmienności dla opcji EUR/USD 01.01.2011 ATM = 1,3 EURUSD



Źródło: Ibid.

Nie jest to jedyny kształt jaki przyjmuje parametr zmienności w stosunku do kursu wykonania. Jest on związany z popytem na zabezpieczenie na dany instrument finansowy lub charakterystykę zmiany kursu walutowego. W przypadku większego popytu na opcje zabezpieczające, spadek kursu walutowego (opcje put) w stosunku do opcji zabezpieczających wzrost kursu walutowego zmienność rynkowa opcji OTM call może pozostawać na tym samym poziomie co opcje ATM. Natomiast w przypadku opcji OTM put, zmienność implikowana wzrasta. Taka krzywa posiada kształt półuśmiechu zmienności (volatility sneer, skew). W przypadku opcji walutowych rynków rozwijających się jak np. rynek PLN występuję specyficzna zależność między kursem a poziomem zmienności, dla której krzywa zmienności przybiera kształt zwany grymasem zmienności (volatility smirk). Oznacza to, iż opcje z kursem realizacji wskazującym na znaczną deprecjację są wyceniane znacznie powyżej zmienności ATM, co związane jest z popytem na opcje put OTM. Opcje call OTM wyceniane są ze zmiennością zbliżoną do zmienności dla opcji ATM. W przypadku walut rynków wschodzących, aprecjacja oznacza uspokojenie i stabilizację rynku, z kolei deprecjacja jest znacznie gwałtowniejsza (efekt dźwigni) i powoduje wzrost zmienności. Z kolei na rynkach z kursami regulowanymi administracyjnie można wskazać na kształt krzywej nazywany smutkiem zmienności (volatility frown). Dla takiej konstrukcji krzywej wszystkie opcje OTM (put i call) są wyceniane ze zmiennością niższą niż ATM. Taka zmienność w praktyce jest trudna do zaobserwowania, gdyż na takim rynku nie istnieje popyt na instrumenty zabezpieczające, a dewaluacja kursów jest skokowa i stosunkowo rzadko stosowana. Należy też w tym miejscu wskazać, iż dla danego kursu realizacji zmienność rynkowa jest określana bez względu na to, czy mamy do czynienia z opcją put czy opcją call. Wynika to z parytetu pomiędzy opcją kupna i sprzedaży i odnosi się to do opcji OTM call, jak i ITM put o tym samym kursie wykonania. Zmienność implikowana wykorzystywana do wyceny obu opcji powinna być identyczna, dlatego na rynku walutowym posługuje się również notacją delty opcji. Wśród sposobów prezentacji uśmiechu zmienności należy wskazać: w zależności od ceny wykonania K, w zależności od Δ, który jest szczególnie ważny dla opcji walutowych, w zależności od wielkości $x = \ln\left(\frac{K}{Se^{(r-rf)T}}\right)$, która to wielkość określa stopień odchylenia kursu wykonania od wartości spot (log-moneyness). Należy wskazać, iż dla: $x < 0$ opcja call (put) jest ITM (OTM), $x = 0$ opcja call (put) jest ATM-F, $x > 0$ opcja call (put) jest OTM (ITM).

Określenia wymaga pojęcie Δ dla opcji stosowane w konstruowaniu uśmiechu zmienności opcji walutowych. W przypadku opcji put delta przyjmuje wartości ujemne, dlatego w kontekście prezentacji uśmiechu zmienności Δ opcji put jest liczbą przeciwstawną do delty forward, czyli wielkości: $\hat{\Delta} = \emptyset(-d_+)$, gdzie $\emptyset$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Delta forward to delta przeniesiona na termin wygaśnięcia opcji czynnikiem e^{rfT}, gdzie *rf* jest stopą waluty bazowej, a *T* terminem zapadalności opcji. Oś delty może więc przyjmować dwa oznaczenia: 10P, 25P, ATM, 25C, 90C lub 10P, 25P, 50P, 75P, 90P.

5. Konstrukcja płaszczyzny zmienności implikowanej na rynku walutowym

Macierz utworzona przez terminy zapadalności oraz kursy realizacji określana jest jako płaszczyzna zmienności (volatility surface). Jednymi z pierwszych badaczy, którzy opisywali teorię płaszczyzny zmienności byli J. Gtheral[6] oraz N. Taleb[7]. Dalsze prace nad opisem dynamiki płaszczyzny zmienności kontynuowali I. Clark[8] oraz Castagena[9]. Zmienność można określić funkcją: $V = f(t, K)$, gdzie: V – zmienność rynkowa, T – okres, na który opiewa opcji, K – kurs realizacji opcji.

Zmienność implikowana na rynku jest wyznaczana jedynie w punktach węzłowych. W przypadku terminów zapadalności są to najczęściej okresy 1, 2, 3, 6 i 12 miesięcy. Odnośnie do kursów realizacji wybiera się kursy realizacji wykazujące przy danym poziomie zmienności wspomniane już delty 90, 75, 25 i 10 (dla opcji call). Terminy łamane i kursy pośrednie należy wyznaczyć różnymi metodami interpolacyjnymi. Ponadto, płaszczyznę zmienności wyznacza się na podstawie trzech punktów wykresu dla:

- zmienności opcji 25ΔP – $\sigma_{25}put$,
- zmienność opcji ATM – σ_{ATM},
- zmienność opcji 25Δcall – $\sigma_{25}call$, przy czym dwie ostatnie wartości są kwotowane pośrednio poprzez:
- zmienność strategii *25Δ risk reversal:* $\sigma_{25}RR = \sigma_{25}c - \sigma_{25}p$,
- zmienność strategii *25Δbutterfly:* $\sigma_{25}BF = \frac{1}{2}(\sigma_{25}c + \sigma_{25}p) - \sigma_{ATM}$.

Innym sposobem wyznaczenia płaszczyzny zmienności jest skorzystanie z trzech strategii opcyjnych: *zero delta Straddle* (*STD*), *25 delta Risk Reversal* (*RR*), *25 delta Butterfly* (*BF*). Zmienność strategii *25 delta Risk Reversal* wyznacza stopień skośności uśmiechu zmienności. Zmienność strategii *25 delta Butterfly* określa stopień wypukłości uśmiechu zmienności.

---

6 J. Gatheral: The Volatility Surface, A Practitioner's Guide. Wiley, New Jersey 2006.

7 N.N. Taleb: Dynamic Hedging, Managing Vanilla and Exotic Options. Wiley Finance, New York 1997, s. 147.

8 I.J. Clark: Foreign Exchange Option Pricing. Wiley Finance, Eastbourne 2011, s. 63.

9 A. Castagena: FX Options and Smile Risk. Wiley Finance, Wiltshire 2010, s. 91.

Tabela 1

Przykładowa macierz płaszczyzny zmienności

Expiry	Date	ATM	25D R/R	25D Eq Fly
O/N	15-sty-13	14,00%	-1,00%	0,26%
1W	21-sty-13	11,50%	-1,38%	0,28%
2W	28-sty-13	11,10%	-1,67%	0,29%
1M	13-lut-13	11,10%	-2,38%	0,37%
2M	15-mar-13	11,05%	-2,60%	0,40%
3M	15-kwi-13	10,90%	-2,85%	0,46%
6M	15-lip-13	10,70%	-3,31%	0,63%
9M	14-paź-13	10,40%	-3,61%	0,68%
1Y	14-sty-14	10,25%	-3,90%	0,75%
2Y	14-sty-15	9,75%	-4,00%	0,81%

Źródło: A. Castagena: FX Options and Smile Risk. Wiley Finance, Wiltshire 2010.

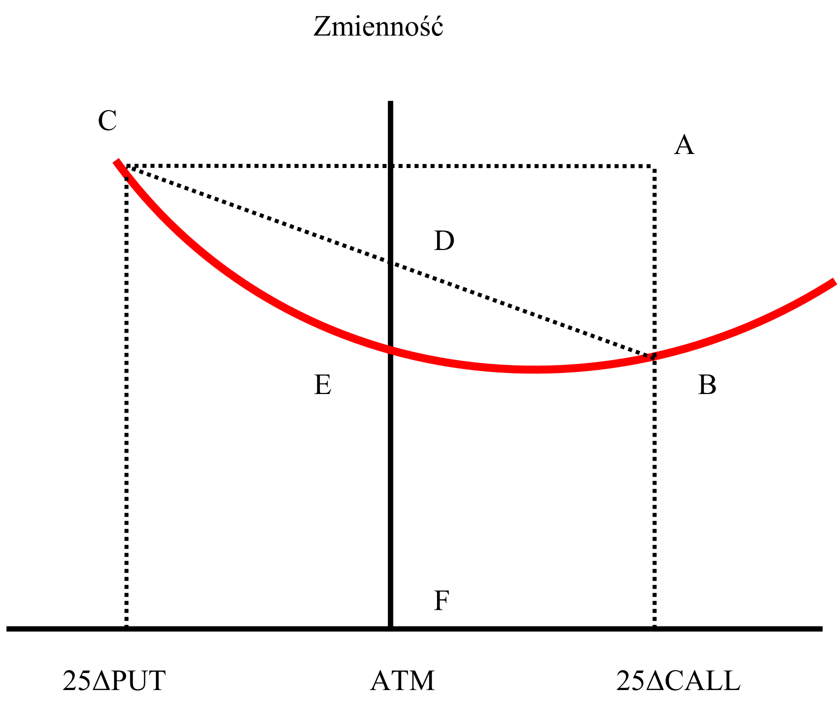
Strategia *Zero delta Straddle* – strategia stelaża ATM – jest złożeniem dwóch opcji *50Δcall* oraz *50Δput* (obie kupione lub sprzedane). Zmienność tej strategii to podstawowy parametr, który wskazuje na opcje z najwyższym parametrem vega dla określonego terminu zapadalności. Zastosowanie takiej strategii oznacza inwestycję na podstawie drugiego momentu centralnego czyli wariancji rozkładu stóp zwrotu. *25 delta Risk Reversal* – jest złożeniem opcji *25Δcall* oraz *25Δput* (jedna kupiona druga sprzedana). RR pokazuje, jaka jest różnica zmienności rynkowej dla opcji z kursami rozłożonymi symetrycznie względem kursu forward, z których jeden znajduje się po stronie aprecjacyjnej a drugi po stronie deprecjacyjnej. Jest to inwestycja na podstawie trzeciego momentu centralnego, czyli skośności rozkładu stóp zwrotu. *25 delta Butterfly* – strategia żelaznego motyla – składa się ze złożenia strategii typu *25Δ strangle* oraz *zeroΔ straddle* (jedna strategia kupiona, druga sprzedana). Pierwsza strategia składa się z opcji *25Δcall* oraz *25Δput* – obie kupione lub sprzedane. W tym wypadku inwestor kupuje kurs realizacji równy terminowemu i sprzedaje kursy realizacji rozłożone symetrycznie względem kursu oczekiwanego. Jest to inwestycja na podstawie czwartego momentu centralnego – kurtozy rozkładu stóp zwrotu[10]. Strategie typu *25Δstrangle* można również alternatywnie oszacować jako: $\sigma STG25 = \sigma ATM + \sigma BF25$.

[10] P. Mielus: Op. cit., s. 89.

Cena strategii *Straddle* i *Strangle* jest średnią z cen pojedynczych opcji składających się na omawiane strategie. Natomiast cena RR i BF jest różnicą zmienności rynkowej dla opcji cząstkowych (jedną opcję kupujemy, drugą sprzedajemy). W takim zestawieniu zachodzą następujące relacje:

$STD_{50} = 0{,}5(C_{50} + P_{50})$, $RR_{50} = C_{25} - P_{25}$, $BF_{25} = STD_{50} - STG_{25}$, $STG_{25} = 0{,}5(C_{25} + P_{25})$.

Po przekształceniu otrzymanych formuł na poziomy zmienności implikowanej dla opcji z niskimi deltami można je wycenić następująco: $C_{25} = STD_{50} + BF_{25} + 0{,}5RR_{25}$, $P_{25} = STD_{50} + BF_{25} - 0{,}5RR_{25}$.



Rys. 1. Prezentacja konstrukcji uśmiechu zmienności dla kursu walutowego

Analizując rys. 1 należy wskazać, iż odcinek ED odpowiada za koszt transakcji BF a odcinek AB za koszt transakcji RR. Koszt zmienności instrumentu I można oszacować na podstawie oszacowania ceny opcji z uwzględnieniem uśmiechy zmienności na podstawie formuły: $I_{cost} = I_{MKT} - I_{BS}$, co następnie można zastosować do ustalenia kosztu zmienności dla transakcji BF oraz RR.

$$RR_{cena} = \left[Call\big(K_c, \sigma(K_c)\big) - Put\left(K_p, \sigma\big(K_p\big)\right)\right] -$$
$$-\left[Call(K_c, \sigma_{ATM}) - Put\big(K_p, \sigma_{ATM}\big)\right]$$

$$BF_{cena} = \frac{1}{2}\left[Call\big(K_c, \sigma(K_c)\big) - Put\left(K_p, \sigma\big(K_p\big)\right)\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\left[Call(K_c, \sigma_{ATM}) - Put\big(K_p, \sigma_{ATM}\big)\right]$$

Dyskretną strukturę zmienności można przedstawić w postaci dwuwymiarowej tablicy jako macierz wartości indeksowanych dwoma zmiennymi, okresami, które odpowiadają wystandaryzowanym terminom zapadalności opcji oraz delt opcji (względnie cenom wykonania). Indeksy czasowe oraz konwencje delty były już wcześniej zaprezentowane. Dyskretna struktura zmienności implikowanej ma więc postać[11]

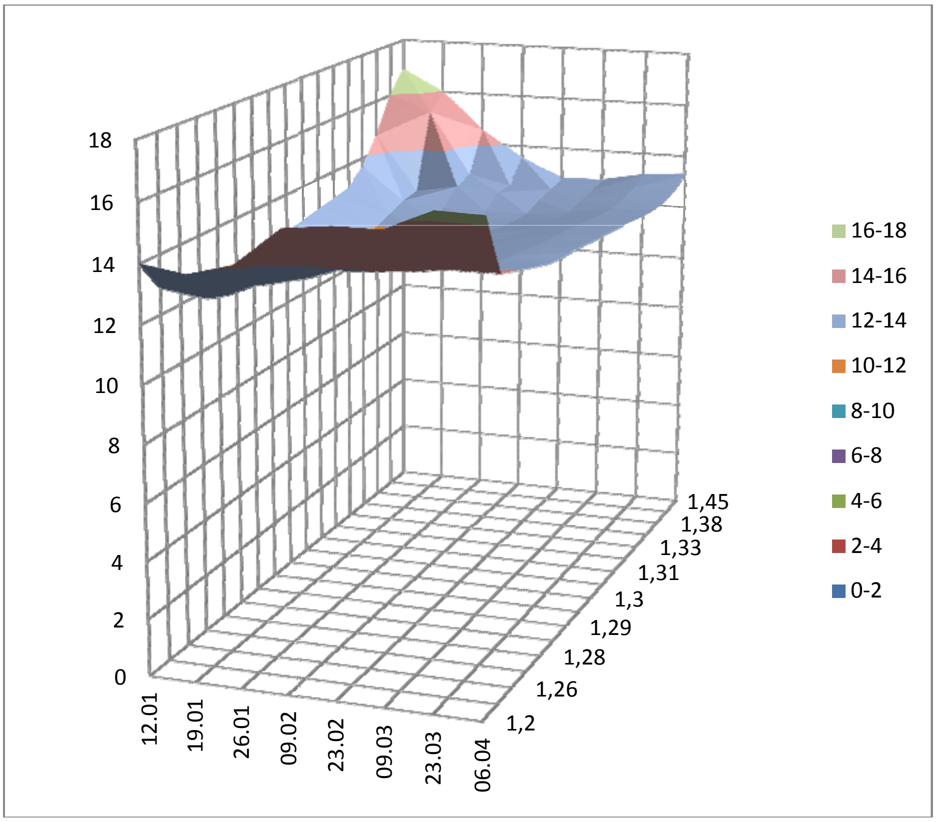
$$\begin{pmatrix} \mathrm{Ti}\backslash\Delta\mathrm{k} & 10 & 25 & 50 & 75 & 90 \\ 1\mathrm{D} & \delta 1d, 10 & \delta 1d, 25 & \delta 1d, 50 & \delta 1d, 75 & \delta 1d, 90 \\ 1\mathrm{W} & \delta 1w, 10 & \delta 1w, 25 & \delta 1w, 50 & \delta 1w, 75 & \delta 1w, 90 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1\mathrm{Y} & \delta 1y, 10 & \delta 1y, 25 & \delta 1y, 50 & \delta 1y, 75 & \delta 1y, 90 \end{pmatrix}$$

Kształt uśmiechu zmienności dla okresów krótszych jest wyraźny, a dla okresów dłuższych staje się bardziej płaski i wygładzony. Implikowana płaszczyzna zmienności jest tworzona na podstawie struktury zmienności i ma trzy wymiary: delty lub ceny wykonania, okresu do zapadalności oraz poziomu zmienności.

[11] W. Waluś, M. Baryło: Inżynieria finansowa. Matematyka stosowana. UW, Warszawa 2011, s. 121.

Wykres 4

Płaszczyzna zmienności dla pary walutowej EUR/USD 01.01.2011



Źródło: A. Castagena: FX Options and Smile Risk. Wiley Finance, Wiltshire 2010.

6. Interpolacja metodą Vanna-Volga

Po raz pierwszy metoda ta została przedstawiona w pracy A. Liptona i W. MgGhee[12]. Aby oszacować zmienność dla poszczególnych opcji znajdujących się na osi płaszczyzny zmienności i odpowiadającym węzłom ją tworzącym, a nienotowanych przez rynek, należy zastosować metodę interpolacji. Należy określić zmienność dla opcji z następującymi cenami wykonania: *KxxP*, *KATM*, *KxxC* oraz odpowiadającym im zmiennościom implikowanym

[12] A. Liption, W. McGhee: An Efficient Implementation of the Universal Volatility Model, 2001.

σxxP, *σATM*, *σxxC* przeprowadzając interpolację międzypunktową. Jedna z metod interpolacji jest wykorzystanie metody Vanna Volga (VV)[13]. Pozwala ona dostarczyć wartość zmienności implikowanej dla każdego z węzłów delty znajdującej się na osi płaszczyzny zmienności. Zaprezentowana zostanie uproszczona notacja, która przyjmuje ceny wykonania Ki, dla i = 1, 2, 3. Metoda VV opiera się na skonstruowaniu portfeli replikujących składające się odpowiednio z *x1* = *x1*(*K)*, *x2* = *x2*(*K*), *x3* = *x3*(*K*) jednostek opcji o cenach wykonania *K1*, *K2*, *K3* oraz Δ_t ilości aktywa, na które wystawiona jest opcja. Dokonując odpowiednich obliczeń otrzymujemy wzory na

$$\text{Vegę: } \frac{\delta C_{BS}(t;K)}{\delta\sigma} = \sum_{i=1}^{3} X_i(t;K)\frac{\delta C_{BS}(t;K_i)}{\delta\sigma}$$

$$\text{Vanne: } \frac{\delta C_{BS}(t;K)}{\delta\sigma} = \sum_{i=1}^{3} X_i(t;K)\frac{\delta^2 C_{BS}(t;K_i)}{\delta^2\sigma}$$

$$\text{Volge: } \frac{\delta C_{BS}(t;K)}{\delta\sigma} = \sum_{i=1}^{3} X_i(t;K)\frac{\delta^2 C_{BS}(t;K_i)}{\delta\sigma\delta S_t}$$

Vega wskazuje na zmianę ceny opcji pod wpływem zmiany zmienności, Vanna wskazuje na zmianę parametru Vega pod wpływem zmiany ceny instrumentu bazowego, Volga wskazuje na zmianę Vegi pod wpływem zmiany zmienności. Po przekształceniu wzorów BS można uzyskać analityczną postać Vegi, Vanny oraz Volgi.

$$v(t,K) = \frac{\delta^2 C_{BS}(t;K)}{\delta\sigma\delta S_t}$$

$$\frac{\delta C_{BS}(t;K_i)}{\delta\sigma} = S_t DF_f(t,T)\sqrt{\tau}\emptyset\big(d_+(t,K)\big) = SN'(d_+)\sqrt{T-t},$$

$$\frac{\delta^2 C_{BS}(t;K_i)}{\delta^2\sigma} = \frac{v(t,K)}{\sigma}d_+(t,K)d_-(t,K) = S_0\sqrt{T-t}N'(d_+)\frac{d_+d_-}{\sigma}$$

$$\frac{\delta^2 C_{BS}(t;K_i)}{\delta\sigma\delta S_t} = -\frac{v(t,K)}{S_t\sigma\sqrt{\tau}}d_-(t,K) = \frac{N'(d_+)d_-}{\sigma}$$

Bazując na powyższych wzorach i przyjmując za zmienność σATM otrzymamy wagi *xi* (*t*, *K*) oraz przyjmując, że *K1* < *K2* < *K3*

$$x_1(K) = \frac{v(t,K)\ln\left(\frac{K_2}{K}\right)\ln\left(\frac{K_3}{K}\right)}{v(t,K_1)\ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right)\ln\left(\frac{K_3}{K_1}\right)}$$

[13] A. Castagena, F. Mercurio: Consistent Pricing of FX Options. Wiley Finance, Mediolan 2007.

$$x_2(K) = \frac{v(t,K)\ln\left(\frac{K_1}{K}\right)\ln\left(\frac{K_3}{K}\right)}{v(t,K_2)\ln\left(\frac{K_1}{K_2}\right)\ln\left(\frac{K_3}{K_2}\right)}$$

$$x_3(K) = \frac{v(t,K)\ln\left(\frac{K_1}{K}\right)\ln\left(\frac{K_2}{K}\right)}{v(t,K_3)\ln\left(\frac{K_1}{K_3}\right)\ln\left(\frac{K_2}{K_3}\right)}$$

$$x_{ATM}(K) = x_1(K) + x_2(K) + x_3(K)$$

$$x_{RR}(K) = \frac{1}{2}\left(x_3(K) - x_1(K)\right)$$

$$x_{BF} = (K) = x_1(K) + x_3(K)$$

Podsumowaniem modelu interpolacji uśmiechu zmienności metoda Vanna Volga jest wzór na cenę opcji dla danego t i K, który implikuje krzywą zmienności: $C(t,K) = C_{BS} + \sum_{i=1}^{3} x_i(t,K)(C_{MKT}(t,K_i) - C_{BS}(t,K_i))$, gdzie: $C_{MKT}(t,K_i)$ – cena opcji call wyliczona z modelu BS z cena wykonania *Ki* i czasem zapadalności t oraz zmiennością σ_i, $C_{BS}(t,K_\alpha)$ – cena opcji call wyliczona z modelu BS z ceną wykonania K_α i zmiennością σ_{ATM}.

Odwracając formułę krzywej zmienności względem σ można policzyć zależność od każdego K i tym samym krzywą uśmiechu zmienności. Ekstrapolacja dla bardzo wysokich delt nie ma dużego znaczenia, gdyż zmienność dla wysokich cen wykonania nie jest mocno wrażliwa. Czasowa ekstrapolacja też nie ma większej wrażliwości dlatego, iż płaszczyzna „wypłaszcza" się wraz ze wzrostem terminów do zapadalności.

Podsumowanie

Zrozumienie dynamiki zmian na rynku walutowym jest kluczowe w przypadku zarządzania ekspozycją walutową. Ciągłe zmiany na rynku walutowym wymagają zaangażowania coraz bardziej zaawansowanych technik analizy ryzyka walutowego i zmienności. Stosowanie coraz bardziej zaawansowanych instrumentów finansowych powoduje zapotrzebowanie na tworzenie modeli matematycznych próbujących opisać zachowanie się kursów walutowych oraz ich zmienności. Niniejszy artykuł pozwala na zrozumienie podstawowych aspektów wpływających na kształtowanie się ryzyka walutowego.

Literatura

Castagena A.: FX Options and Smile Risk. Wiley Finance, Wiltshire 2010.
Castagena A., Mercurio F.: Consistent Pricing of FX Options. Wiley Finance, Mediolan 2007.
Clark I.J.: Foreign Exchange Option Pricing. Wiley Finance, Eastbourne 2011.
Gatheral J.: The Volatility Surface, A practitioner's Guide. Wiley, New Jersey 2006.
Garman M.B. and Kohlhagen S.W.: Foreign Currency Option Values. „Journal of International Money and Finance" 1983, Vol. 2.
Heston S.L.: A Closed form Solution for Option with Stochastic Volatility with Application for Bonds and Currency Options. „Review of Financial Studies" 1993, Vol. 6.
Hull J.C., White A.: The Pricing of Option on Assets with Stochastic Volatilities. „Journal of Finance" 1997, Vol. 42.
Gatheral J.: The Volatility Surface, A Practitioner's Guide. Wiley, New Jersey 2006.
Liption A., McGhee W.: An Efficient Implementation of the Universal Volatility Model, 2001.
Mielus P.: Rynek opcji walutowych w Polsce. K.E. Liber, Warszawa 2002.
Taleb N.N.: Dynamic Hedging, Managing Vanilla and Exotic Options. Wiley Finance, New York 1997.
Waluś W., Baryło M.: Inżynieria finansowa. Matematyka stosowana. UW, Warszawa 2011.

CONSTRACTION OF THE VOLATILITY SURFACE ON FOREGIN EXCHANGE MARKET

Summary

The foreign exchange market is one of the most important segments of the financial market. FX options market is also one of the largest in the world. In the case of the basic model of option pricing – Merton Scholes model variability Blacks used for option pricing is constant and flat over time and does not change in relation to the strike price. The term structure of volatility is creating volatility surfaces for which variability has different levels depending on the date and the exercise price of options. This paper presents the characteristics of the exchange rate and pattern construction plane volatility smile in the currency market. Article characterized the basic concepts of interpolation and extrapolation of pairs trading volatility certain exchange rates.