METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XVII/2, 2016, s. 36 – 45

O PEWNYM PROBLEMIE MAYERA STEROWANIA OPTYMALNEGO W PRZYPADKU STOCHASTYCZNYM

Wiesław Grygierzec
Katedra Statystyki i Ekonometrii, Uniwersytet Rolniczy w Krakowie
e-mail: rrgrygie@cyf-kr.edu.pl

Streszczenie: Rozważamy problem stochastycznego sterowania optymalnego dla układu opisywanego poprzez stochastyczne równanie różniczkowe typu Ito. Układy takie bywają tez nazywane jako *modele dyfuzyjne*. Źródłem niepewności w takich modelach jest *biały szum* który odzwierciedla oddziaływanie dużej ilości niezależnych sił losowych. W tej sytuacji problem sterowania polega na podejmowaniu na podstawie możliwie najnowszych informacji, odpowiednich decyzji spośród wszystkich możliwych w celu osiągnięcia zamierzonego celu. Kluczowa role odgrywa w tym zagadnieniu tzw. *funkcja wartości*, która w jakiś sposób charakteryzuje nam ewolucje w czasie minimalnej wartości funkcjonału kosztu. W niniejszym artykule autor udawania pewne własności funkcji wartości dla tzw. *problemu Mayera* czyli dla specjalnej postaci funkcjonału kosztu.

Słowa kluczowe: stochastyczne sterowanie optymalne, funkcja wartości, problem Mayera

WSTĘP

Niniejszy artykuł jest poświecony przedstawieniu pewnych własności funkcji wartości dla problemu stochastycznego sterowania optymalnego. Wiele zjawisk przyrodniczych pojawiających się w zastosowaniach jest modelowane za pomocą równań różniczkowych postaci

$$\frac{dx}{dt} = b(t, x(t)) + v(t) \tag{1}$$

gdzie $x(t) \in R^n$, tzn. $x = (x_1(t),...,x_n(t))$ opisuje stan układu w chwili t natomiast $v(t)$ reprezentuje nieznane zakłócenie. Kiedy takie zakłócenie ma nieregularny i nieprzewidywalny charakter naturalnym jest przyjęcie procesu stochastycznego w postaci:

$$v(t) = \sigma(t, x(t))\frac{dw}{dt},$$

gdzie $\frac{dw}{dt}$ to zapis formalny pochodnej czasowej procesu Wiennera, która jak wiadomo nie istnieje w sensie klasycznym ale jako tzw. pochodna dystrybucyjna, czyli jest to tzw. biały szum. W notacji stochastycznej równanie (1) zapisujemy jako

$$dx(t) = b(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))dw(t).$$

Rozważamy następujący stochastyczny układ ze sterowaniem opisujący ewolucje funkcji stanu $y(t) \in R^d$

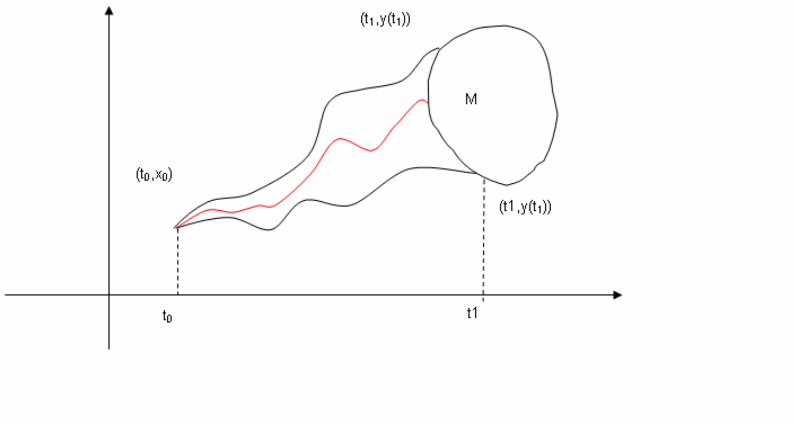
$$\begin{cases} dy(t) = f(t, y(t), u(t))dt + \sigma(t, y(t), u(t))dW(t), \ s \in (t_0, T] \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

gdzie (t_0, x_0) są ustalone. Zakładamy, ze dana jest określona przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq t_0}, P)$, na której jest zdefiniowany standardowy proces Wiennera $\Omega(\tau)$, natomiast $\alpha(t) = \alpha(t, \omega)$ jest sterowaniem w chwili τ zależnym od parametru losowego $\omega \in \Omega$.

Załóżmy ze spełnione są warunki gwarantujące istnienie jednoznacznego rozwiązania $y(t) = y(t; t_0, x_0, u)$ układu (2). Problem sterowania związany jest z zadanym zbiorem $M \subset R^d$ oraz deterministyczną funkcją $g(t, x)$ określona na brzegu ∂M tego zbioru, tzn.

$$g : [t_0, \infty) \times \partial M \to R \tag{3}$$

Rysunek 1. Problem Mayera



Źródło: opracowanie własne

oraz z tzw. *momentem stopu* t_1, czyli *momentem Markowa*, który zdefiniowany jest w sposób następujący. Jako zbiór sterowań dopuszczalnych przyjmiemy tylko takie sterowania *u(t)*, które w skończonym czasie przeprowadzają wektor stanu $\psi(\tau)$ do zbioru M p.n., tzn. istnieje taki (losowy) moment $t_1 = t_1(\omega)$, *moment stopu*, że $y(t_1) \in M$

$$t_1 = \inf\{t > t_0, y(t; t_0, x_0, u) \in M \text{ p.n.}\}. \tag{4}$$

W dalszej części naszego artykułu zasadniczą rolę będzie odgrywać tzw. *funkcja wartości v:*

$$v(t_0, x_0) = \inf_{u \in U_{t_0, x_0}} Eg(t_1, y(t_1; t_0, x_0, u)), \tag{5}$$

gdzie przez U_{t_0, x_0} oznaczamy zbiór sterowań dopuszczalnych dla warunku początkowego (t_0, x_0). Zagadnienie sterowania optymalnego z powyżej zdefiniowaną funkcją wartości nazywamy *problemem Mayera* dla sterowania optymalnego.

W teorii sterowania optymalnego rozważa się dwa zasadnicze podejścia: Podejście Pontryagina, które opiera się o *zasadę maksimum*[1] oraz podejście Bellmana czyli oparte o *programowanie dynamiczne*. W tym ostatnim poszukuje się tzw. *funkcji wartości*, która ma tutaj kluczowe znaczenie i wykazanie pewnych jej własności jest właśnie przedmiotem niniejszego artykułu. Podobne zagadnienie w sytuacji deterministycznej jest przedstawione np. książce [Fleming, Rischel 1975]. Również monografie [Fleming, Soner 1993] oraz [Yong, Zhou 1999] są

[1] Grygierzec W. (2012) O jednolitym podejściu do rachunku wariacyjnego i sterowania optymalnego. Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych, XIII/1.

poświecone problemom m.in. własności funkcji wartości. Podejście przedstawione w niniejszej pracy jest bliskie tzw. twierdzeniu weryfikacyjnemu chociaż nie całkowicie się z nim pokrywa, stanowi istotny wkład w lepsze zrozumienie i poszukiwanie rozwiązań optymalnego sterowania.

OZNACZENIA I DEFINICJE

Zmienna losowa, proces stochastyczny

Przypomnijmy, dla użytku czytelnika podstawowe definicje i właściwości dotyczące procesów stochastycznych z których będziemy korzystali w dalszej części. Niech Ω będzie niepustym zbiorem, F σ-algebrą jego podzbiorów; Π miara probabilistyczna na Ω ($P: F \rightarrow [0,1]$). Trójkę (Ω, F, P) standardowo nazywamy *przestrzenia probabilistyczną*. Funkcję $x:\Omega \rightarrow R^d$, mierzalną względem *F nazywamy zmienna losową* o wartościach w R^d.

Oznaczmy przez $I=[0,T], T \leq \infty$ przedział domknięty w *R. Procesem stochastycznym* x nazwiemy rodzinę zmiennych losowych $\{x(t)\}_{t\in I}$ czasami oznaczanych jako x_t. Formalnie zatem proces stochastyczny to funkcja dwóch zmiennych:

$$x: I \times \Omega \rightarrow R^d,$$

mierzalna względem drugiej zmiennej dla dowolnego $t \in I$. Przy ustalonym $\omega \in \Omega$, funkcję $t \rightarrow x(t,\omega)$ nazwiemy trajektorią procesu x_t. Proces stochastyczny nazywamy ciągłym jeżeli $x(\cdot,\omega)$ jest ciągły jako funkcja *t, dla prawie wszystkich* $\omega \in \Omega$. Rodzinę $\{F_t\}_{t\in I}$ σ-algebr nazywamy *filtracją* jeżeli dla $s \leq t,\ s,t \in I$ zachodzi:

$$F_s \subset F_t \subset F.$$

Układ $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\in I}, F, P)$ nazywamy *przestrzenią probabilistyczną z filtracją.* Proces stochastyczny x_t nazywamy F_t*-adaptowanym* jeżeli dla dowolnego $t \in I,\ \omega \rightarrow x_t(\omega)$ jest F_t -mierzalna. Niech będzie dany dowolny proces stochastyczny x_τ oraz niech F_t będzie najmniejsza σ-algebrą generowana przez x_s; $s \leq t$, wówczas x_t jest adaptowany do F_t: Dla $t \in I$, oznaczamy $F_t^x = \sigma(x_s : s \leq t)$, najmniejsza σ-algebrę względem której x_s jest mierzalny dla $s \leq t$. Jest ona nazywana σ-algebrą generowaną przez x do chwili τ, zatem można ja uważać za "historie" zmiennej losowej x_t.

Warunkowa wartość oczekiwana, Martyngały

Własności wartości oczekiwanej dla trajektorii optymalnej są przedmiotem niniejszego artykułu, przypomnijmy w związku z tym dla wygody czytelnika najważniejsze definicje. *Warunkowa wartość oczekiwana* zmiennej losowej x pod warunkiem zdarzenia A zdefiniowana jest jako:

$$E(x \mid A) = \frac{1}{P(A)} \int_A x(\omega) dP .$$

Warunkową wartością oczekiwaną zmiennej losowej x pod warunkiem σ-ciała $G \subset F$ nazywamy zmienną losową $E(x|G)$ spełniająca warunki:

(1) E(x|G) jest G-mierzalna

(2) dla dowolnego $A \in G$ zachodzi

$$\int_A E(x \mid G)(\omega) dP(\omega) = \int_A x(\omega) dP(\omega) .$$

Adaptowany proces stochastyczny $x_t, t \in I$ nazywamy *martyngałem (podmartyngałem, nadmartyngałem)* względem filtracji F_t jeżeli:

(1) x_t całkowalny dla dowolnego $t \in I$,

(2) $x_s = E(x_t \mid F_s)$ p.n. (odp. $\leq, \geq$) dla dowolnego $s, t \in I, s \leq t$.

Proces Wiennera, Całka stochastyczna Ito

Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna z filtracją $\left(\Omega, F, \{F_t\}_{t \in I}, F, P\right)$ proces stochastyczny $w_t = (w_1, \ldots, w_d)$ nazwiemy *procesem ruchu Browna* albo *procesem Wiennera* w R^d jeżeli jest ciągłym procesem Gaussowskim o niezależnych przyrostach, tzn.

(1) w_0 =0 p.n.(prawie na pewno)

(2) dla dowolnego $0 \leq s < t$ zmienna losowa w_t-w_s jest niezalezna od Fσ,

(3) przyrosty w_t-w_s mają rozkład normalny, tzn. $N(0, (t-s) I_d)$, gdzie Iδ jest macierzą jednostkową w R^d.

Jeżeli filtracja $\{F_t\}$ nie jest zadana w sposób jawny, możemy uważać, że jest to właśnie filtracja $\{F_t^w\}$, czyli generowana przez proces Wiennera w_t i wówczas warunek (2) odpowiada warunkowi:

(2') proces w_t posiada niezależne przyrosty tzn. dla $t < s < r < u$, $(w_t - w_s)$ oraz $(w_u - w_r)$ są niezależne.

Można pokazać, ze gęstość prawdopodobieństwa w_t wyraża się wzorem:

$$p(t, x) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left\{-|x|^2 / (2t)\right\}$$

Przypomnijmy dla wygody czytelnika definicje całki stochastycznej Ito. Przedstawiamy jedynie zasadniczą ideę natomiast osoby zainteresowane bardziej szczegółowym opisem zachęcamy do sięgnięcia do standardowych pozycji książkowych takich jak [Ikeda, Watanabe 1989] czy [Kartzas, Shreve 1991].

Konstrukcje całki stochastycznej Ito $I(f)_t = \int_0^t f_s dW_s$ rozpoczniemy od zdefiniowania zbioru funkcji dla których jest ona poprawnie określona. Dla T > 0 przez $L^2_F(0,T;R)$ oznaczamy zbiór wszystkich mierzalnych procesów $\phi(\tau;\,!)$ adaptowanych do filtracji $\{F_t\}_{t\geq 0}$ o skończonej normie

$$\| f \|_T^2 = E\left\{ \int_0^T f(t,\omega)dt \right\} < \infty.$$

Krok I. Definiujemy całkę najpierw dla procesów schodkowych postaci:

$$f_t(\omega) = \sum_{i00}^{n-1} \xi_i(\omega)\chi_{[t_i,t_{i+1}]}(t),$$

dla zadanego podziału: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T,$ przedziału [0,T] gdzie ξ_i jest F_{t_i} mierzalna, $E(\xi_i^2) < \infty,$ natomiast $\chi_{[t_i,t_{i+1}]}(t)$ jest funkcją charakterystyczną odcinka $[t_i, t_{i+1}]$. Całka stochastyczna procesu schodkowego jest zdefiniowana jako

$$\int_0^t f_s dW_s = \sum_i \xi_i(\omega)(W_{t_{i+1}\wedge t}(\omega) - W_{t_i\wedge t}(\omega)).$$

Dowodzi się prawdziwości tożsamości izometrycznej:

$$E\left(\left| \int_0^t f_s dW_s \right|^2 \right) = E\int_0^t | f_s |^2 \, ds,$$

oraz nierówności Barkholdera-Davisa-Gundy:

$$E \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t f_s dW_s \right|^p \leq c_p E\left(\int_0^T | f_s |^2 \, ds \right)^{p/2},$$

gdzie c_p jest stałą zależną od $T > 0$ oraz $p > 0$.

Krok II. Rozszerzamy definicje poprzez przejście graniczne na adaptowane procesy stochastyczne spełniające:

$$E\int_0^T | x_s(\omega) |^2 \, ds < \infty. \tag{6}$$

Krok III. Kolejne rozszerzenie definicji całki poprzez tzw. lokalizacje na klasę wszystkich adaptowanych procesów spełniających

$$P\left\{ \int_0^T | x_s(\omega) |^2 \, ds < \infty \right\} = 1. \tag{7}$$

Całka stochastyczna Ito jest poprawnie zdefiniowana jeżeli zachodzi warunek (7), jeżeli zachodzi silniejszy warunek (6) wówczas jest ona martyngałem.

PROBLEM STEROWANIA OPTYMALNEGO MAYERA

Stochastyczny układ ze sterowaniem

Problem sterowania będzie polegał na minimalizacji wartości oczekiwanej pewnego funkcjonału *funkcji stanu* oraz *procesu sterowania*. Funkcja stanu to proces stochastyczny $y(t) \in R^d$, o wartościach w R^d opisywany przez następujące stochastyczne równanie różniczkowe typu Ito:

$$dy(t) = f(t, y(t), u(t))dt + \sigma(t, y(t), u(t))dW(t), s \in [t_0, T],$$

które będziemy rozumieli jako równanie całkowe

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(t, y(t), u(t))dt + \int_{t_0}^{t} \sigma(t, y(t), u(t))dW_t \tag{8}$$

gdzie $u(t) \in U$ jest parametrem czyli sterowaniem zastosowanym w chwili t przyjmującym wartości z pewnego zbioru $U \subset R^n$,ograniczonego oraz domkniętego . Oznaczmy przez $Q = [0,T] \times R^d$.
Przyjmiemy następujące założenia: niech funkcje

$$f : Q \times U \to R^d,$$

$$\sigma : Q \times U \to R^d \times R^d,$$

będą ciągłe oraz niech $f(\cdot,\cdot,v), \sigma(\cdot,\cdot,v)$ będą klasy $C^1(Q)$. Zakładamy, że istnieje pewna stała $C>0$, taka, że:

$$(1) \; |f_t| + |f_x| + |\sigma_t| + |\sigma_x| \le C,$$

$$(2) \; |f(t,x,v)| + |\sigma(t,x,v)| \le C(1 + |x| + |v|),$$

gdzie f_t, f_x oznaczają odpowiednie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial t}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial x}$, $|\sigma|$ jest normą operatorową σ również σ_t, σ_x są pochodnymi cząstkowymi funkcji σ o wartościach macierzowych.
Z ogólnej teorii stochastycznych równań różniczkowych wiadomo, że przy powyższych założeniach równanie (8) ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(t) \in L^2(\Omega; C(0,T; R^d))$, gdzie

$$L^2(\Omega; C(0,T; R^d)) = \{x_t : E \sup_{t \in [0,T]} |x_t|^2 < \infty\}.$$

Kryterium do minimalizacji - Problem Mayera

Rozważamy rodzinę stochastycznych problemów Cauchy'ego indeksowana po $(s,x)\in[0,T]\times R^d$:

$$\begin{cases} dy(t)= f(t,y(t),u(t))dt+\sigma(t,y(t),u(t))dW(t), t\in(s,T] \\ y(s)=x,\ (s,x)\ \text{dowolne} \end{cases} \tag{9}$$

oraz funkcję (3) $g(t,x)\in C^1([0,\infty)\times\partial M;R)$, niech *y(t;s,x,u)* bedzie trajektorią rozwiązania (9) oraz t_1 będzie momentem zatrzymania (4). Zbiór sterowań dopuszczalnych

$$U_{s,x}=\{u:[0,\infty)\times\Omega\to U\mid F_t-\text{adaptowane}, t_1(s,x,u(\cdot))<\infty\ \text{p.n.}\} \tag{10}$$

Powiemy, że y^* jest *trajektorią optymalną* a (y^*,u^*) parą optymalną jeżeli

$$v(t_0,x_0)=\inf_{u\in U_{t_0,x_0}} Eg(t_1,y(t_1;t_0,x_0,u))=Eg(t_1,y^*(t_1;t_0,x_0,u^*)). \tag{11}$$

WŁASNOŚCI FUNKCJI WARTOŚCI

Przy powyższych założeniach prawdziwe są następujące twierdzenia.
Twierdzenie 1
Proces v(t,y(t)) jest podmartyngałem dla $t\in[t_0,t_1]$ *tzn.*

$$v(s,y(s))\le E[v(t,y(t))\mid F_s]\ \text{p.n.}$$

dla $t_0\le s\le t\le t_1$.

Dowód. Zauważmy najpierw, ze z definicji (5) funkcji wartości wynika

$$\begin{aligned} v(s,y(s)) &= ess\inf_{u\in U_{s,y(s)}} E[g(t_1,y(t_1,s,y(s),u)\mid F_s] \\ v(t,y(t)) &= ess\inf_{u\in U_{t,y(t)}} E[g(t_1,y(t_1,t,y(t),u)\mid F_t] \end{aligned} \tag{12}$$

oraz, że

$$v(s,y(s)=E[v(s,y(s)\mid F_s]=E[v(s,y(s)\mid F_t]$$

Ustalmy dowolne $u\in U_{t_0,x_0}$, wówczas dla dowolnego $t>s>t_0$ z jednoznaczności rozwiązania *y(t)* po Ścieszkach dla potoku *y(t)* rozwiązania SDE wynika własność Markowa czyli

$$y(t;t_0,x_0,u)=y(t;s,y(s;t_0,x_0,u),u)\ \text{dla dowolnego}\ s\ge t_0$$

z powyższego mamy

$$v(s,y(s,u)=E[v(s,y(s,u)\mid F_t]\le E[g(t_1,y(t_1,u))\mid F_t]$$

biorąc essinf

$$v(s,y(s,u)\le ess\inf_{u\in U_{t,y(t)}} E[g(t_1,y(t_1,t,y(t),u)\mid F_t]=v(t,y(t,u))$$

na koniec bierzemy obustronnie $E[\cdot\mid F_s]$.

Twierdzenie 2

y^**- trajektoria optymalna*) $v(t, y(t)) \equiv const\ p.w.$

Dowód. Z definicji trajektorii optymalnej (11)

$$v(t_0, x_0) = Eg(t_1, y^*(t_1)),$$

natomiast z Twierdzenia 1 mamy

$$Eg(t_1, y^*(t_1)) = v(t_0, x_0) \le E[v(t, y^*(t)) \mid F_{t_0}] = Ev(t, y*(t)) =$$

$$= \mathrm{E}\left[\underset{u \in U_{t,y^*(t)}}{ess\inf}\, E[g(t_1, y^*(t_1) \mid F_t] \right] \le Eg(t_1, y^*(t_1))$$

Ponieważ na początku i na końcu ciągu nierówności mamy to samo wyrażenie zatem nierówności w środku można zamienić na równości.

WNIOSEK

Funkcja wartości jest na wszystkich trajektoriach rozwiązania układu (2) jest podmartyngałem, jedynie na *trajektorii optymalnej* jest stała prawie wszędzie względem miary probabilistycznej P i to jest najprostsze kryterium aby rozpoznać *parę optymalną* czyli *sterowanie optymalne* oraz *trajektorię optymalną*.

BIBLIOGRAFIA

Fleming W. H., Rishel R. W. (1975) Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer-Verlag.

Fleming W. H., Soner H. M. (1993) Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer-Verlag.

Haussmann U. G. (1986) A Stochastic Maximum Principle for Optimal Control of Diffusions. Pitman Research Notes in Mathematics, 151, Longman.

Grygierzec W. (2012) O jednolitym podejściu do rachunku wariacyjnego i sterowania optymalnego. Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych, XIII/1.

Kartzas I., Shreve S. E. (1991) Brownian Motion and Stochastic Calculus. (Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag.

Ikeda, N., Watanabe S. (1989) Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. 2nd Edition, North Holland-Kodansha, Amsterdam-Tokyo, 1989.

Peng S. (1990) A general stochastic maximum principle for optimal control problems. SIAM Journal on Control and Optimization, 28 (4), 966-979.

Pham H. (2009) Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications. Springer-Verlag.

Szafirski B. (2012) Notes from seminar, not published.

Yong J., Zhou X. Y. (1999) Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer-Verlag.

ABOUT SOME MAYER STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM

Abstract: We consider optimal control problem of system which is covered by Ito's stochastic differential equation. Such systems are sometimes called *diffusion models*. The basic source of uncertainty in such models is white noise, which represents large numbers of independent random forces. The controller has to make relevant decision, based on the most update information among all the possible to achieve the best expected result relevant his goal. The key role play so called *value function* which represent in some sense evolution of minimal cost functional in time. In the present paper the author give some characterization of value function for the so called *Mayer problem* which correspond to special form of cost.

Keywords: stochastic optimal control, value function, Mayer problem