ZALEŻNY, ZŁOŻONY PROCES POISSONA – WYZNACZANIE SKŁADEK UBEZPIECZENIOWYCH

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY
Nr 12(18)

Stanisław Heilpern

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ISSN 1644-6739

Streszczenie: Praca poświęcona jest zależnemu, złożonemu procesowi Poissona. W procesie tym dopuszcza się zależność okresów między szkodami a sąsiednią szkodą. Struktura zależności opisana jest funkcją łączącą Spearmana. Wyznaczane są wartości podstawowych funkcjonałów składki ubezpieczeniowej opartych na momentach zdyskontowanej, zagregowanej szkody. Obliczane są wartości dwóch pierwszych momentów i składek, gdy szkody mają rozkład wykładniczy oraz Pareta.

Słowa kluczowe: złożony rozkład Poissona, zależność, funkcja łącząca, składka ubezpieczeniowa.

DOI: 10.15611/sps.2014.12.10

1. Wstęp

Tematem pracy jest zależny złożony proces Poissona. W procesie tym dopuszczamy występowanie zależności okresów między szkodami a sąsiednią szkodą. Osłabienie założenia niezależności występującego w klasycznym modelu umożliwia lepsze, bardziej realistyczne modelowanie procesów ubezpieczeniowych, głównie tzw. szkód katastroficznych występujących na przykład podczas trzęsień ziemi [Boudreault i in. 2006; Cossette i in. 2008]. Zależne, złożone procesy Poissona mogą znaleźć zastosowanie w zagadnieniach ubezpieczeniowych dotyczących teorii kolektywnego ryzyka oraz teorii ruiny.

Struktura zależności pomiędzy okresami pomiędzy szkodami a szkodami opisana jest w pracy funkcją łączącą (ang. *copula*) Spearmana. Funkcja łącząca tego typu umożliwia modelowanie całej gamy dodatnich zależności między niezależnością a ścisłą zależnością (współmonotonicznością).

Pracę można traktować jako kontynuację pracy [Heilpern 2014], w której wyznaczone zostały momenty zagregowanej szkody na podstawie funkcji wyznaczającej momenty. W naszej pracy momenty te zostały wyznaczone wprost na podstawie metody zaproponowanej w artykule [Bargès i in. 2011]. Dzięki temu można rozpatrywać zdyskontowaną wersję zagregowanej szkody oraz wyznaczyć momenty nie tylko dla szkód o rozkładzie wykładniczym, ale i dla innych rozkładów, np. dla rozkładu Pareta. Nie jest to możliwe, gdy stosujemy metodę rozpatrywaną w pracy [Heilpern 2014].

Część druga zawiera podstawowe wiadomości dotyczące zdyskontowanego, zależnego złożonego rozkładu Poissona. Następna część dotyczy funkcji łączącej Spearmana stosowanej w dalszej części pracy do opisu struktury zależności. W części czwartej wyznaczona została wartość oczekiwana zdyskontowanej, zagregowanej szkody, a w piątej jego drugi moment i wariancja. Ostatnia część poświęcona jest wyznaczaniu wartości podstawowych funkcjonałów składek ubezpieczeniowych: zasady wartości oczekiwanej, zasady odchylenia standardowego i zasady wariancji. Wykorzystane zostały w nim rezultaty otrzymane we wcześniejszych rozdziałach.

2. Zależny złożony rozkład Poissona

Podstawą naszych dalszych rozważań będzie złożony proces odnowy ze zdyskontowanymi szkodami $e^{-\delta T_n} X_n > 0$, gdzie stopa dyskontowa $\delta > 0$, oraz momentami wystąpienia szkód T_n określony formułą [Bargès i in. 2011]:

$$S_\delta(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} e^{-\delta T_n} X_n,$$

gdzie proces liczący szkody $N(t) = \sup\{n: T_n \le t\}$ oraz $N(0) = 0$. Zmienną losową $S_\delta(t)$ możemy interpretować jako zdyskontowaną, zagregowaną szkodę. Momenty wystąpienia szkód wyznaczają nam okresy między szkodami: $W_n = T_n - T_{n-1}$ dla $n > 1$ oraz $W_1 = T_1$.

Zakładamy, że okresy między szkodami W_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z dystrybuantą $F_W(w) = 1 - e^{-\lambda w}$. Proces liczący szkody $N(t)$ będzie wtedy procesem Poissona. Szkody X_n również będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartości oczekiwanej m_1 i dystrybuancie $F_X(x)$. Niezależne będą też wektory losowe (W_n, X_n), a ich struktura zależności opisana będzie funkcją łączącą (*copula*) $C(u, v)$.

Ostatnie założenie dopuszcza zależność zmiennych losowych W_n oraz X_n. Jest to bardziej realistyczne założenie niż w przypadku klasyczne procesu Poissona, gdzie zakłada się niezależność tych zmiennych losowych.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 12(18)

Funkcja łącząca $C(u,v)$ jest łącznikiem między rozkładem łącznym a rozkładami brzegowymi [Nelsen 1999; Heilpern 2007]:

$$F(w,x) = C(F_W(w), F_X(x)),$$

gdzie $F(w,x)$ jest dystrybuantą rozkładu łącznego zmiennych W_n oraz X_n. W przypadku klasycznym zakładającym niezależność tych zmiennych losowych, funkcja łącząca przybiera prostą postać:

$$\Pi(u,v) = uv.$$

Funkcję łączącą możemy również traktować jako łączną dystrybuantę zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na iloczynie kartezjańskim $[0,1]^2$.

3. Funkcja łącząca Spearmana

W naszej pracy do modelowania struktury zależności pomiędzy okresem między szkodami W_n a następną szkodą X_n wykorzystana będzie funkcja łącząca Spearmana. Jest to kombinacja wypukła dwóch przeciwstawnych funkcji łączących dotyczących niezależności Π i współmonotoniczności M [Hürlimann 2004; Heilpern 2014]:

$$C_\alpha(u,v) = (1-\alpha)\Pi(u,v) + \alpha M(u,v),$$

gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$. Funkcja łącząca współmonotoniczności odpowiada ścisłej, dodatniej zależności zmiennych losowych. Przybiera ona postać [Nelsen 1999; Heilpern 2007]

$$M(u,v) = \min\{u,v\}.$$

Można pokazać [Nelsen 1999], że współmonotoniczne zmienne losowe W oraz X związane są funkcyjną relacją

$$X = l(W) = F_X^{-1}\big(F_W(W)\big),$$

a ich funkcja łącząca M jest dystrybuantą łącznego rozkładu skupionego w sposób jednostajny na przekątnej $v = u$ kwadratu $[0,1]^2$. Natomiast łączny rozkład współmonotonicznych zmiennych losowych W oraz X skupiony jest na krzywej $x = l(w)$.

Parametr α jest równy współczynnikowi korelacji Spearmana między zmiennymi losowymi W i X. Oddaje więc on stopień zależności tych dwóch zmiennych losowych. Jest to zależność dodatnia, czyli zgodna. Dla $\alpha = 0$ mamy niezależność, a dla $\alpha = 1$ ścisłą, dodatnią zależność, współmonotoniczność.

Za pomocą funkcji łączącej Spearmana możemy modelować całą gamę dodatnich zależności, od niezależności do ścisłej zależności. Między innymi można badać zależność wartości rozpatrywanych charakterystyk zdyskontowanej, zagregowanej szkody $S_\delta(t)$ od stopnia zależności, który jest reprezentowany przez parametr α.

4. Wartość oczekiwana

Wyznaczymy teraz wartość oczekiwaną zagregowanej, zdyskontowanej zależnej szkody $\mu_\delta(t)$. Jest ona równa [Bargès i in. 2011]

$$\mu_\delta(t) = E\big(S_\delta(t)\big) = E(E(S_\delta(t)|\, W_1 = w))$$

$$= E(E(e^{-\delta W_1}X_1 + e^{-\delta W_1}S_\delta(t - W_1)|\, W_1 = w))$$

$$= E\Big(E\big(e^{-\delta w}X_1|\, W_1 = w\big)\Big) + E(e^{-\delta w}\mu_\delta(t - w))$$

$$= \int_0^t e^{-\delta w}\, E(X_1|W_1 = w)dF_W(w) + \int_0^t e^{-\delta w}\,\mu_\delta(t - w)dF_W(w)$$

$$= \lambda\int_0^t e^{-(\delta+\lambda)w}\, E(X_1|W_1 = w)dw + \lambda\int_0^t e^{-(\delta+\lambda)w}\,\mu_\delta(t - w)dw,$$

czyli

$$\mu_\delta(t) = \lambda(I_1(t) + I_2(t)). \tag{1}$$

Zanim obliczymy całki $I_1(t)$, $I_2(t)$, wyznaczmy warunkową dystrybuantę $F(x|w)$ oraz warunkową wartość oczekiwaną występującą w $I_1(t)$. Są one odpowiednio równe

$$F(x|\, w) = \lim_{h\to 0} P(X \le x|\, w < W \le w + h)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{F(w + h, x) - F(w, x)}{P(w < W \le w + h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(1-\alpha)F_I(w + h, x) + \alpha F_M(w + h, x) - (1-\alpha)F_I(w, x) - \alpha F_M(w, x)}{P(w < W \le w + h)}$$

$$= (1-\alpha)F_I(x|w) + \alpha F_M(x|w),$$

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 12(18)

$$E(X_1|W_1=w)=\int_0^\infty xdF(x|\,w)$$
$$=(1-\alpha)\int_0^\infty xdF_I(x|\,w)+\alpha\int_0^\infty xdF_M(x|\,w)$$
$$=(1-\alpha)\int_0^\infty xdF_X(x)+\alpha l(w)=(1-\alpha)m_1+\alpha l(w),$$

ponieważ gdy $W=w$, to $P\big(x=l(w)\big)=1$ dla struktury zależności zmiennych *W* oraz *X* opisanej funkcją łączącą *M*. Wtedy pierwsza całka $I_1(t)$, jest równa

$$I_1(t)=(1-\alpha)m_1\int_0^t e^{-(\delta+\lambda)w}\,dw+\alpha\int_0^t e^{-(\delta+\lambda)w}\,l(w)dw$$
$$=\frac{1-\alpha}{\delta+\lambda}m_1\big(1-e^{-(\delta+\lambda)t}\big)+\alpha\int_0^t e^{-(\delta+\lambda)w}\,l(w)dw.$$

Wyznaczając obustronnie transformatę Laplace'a równania (1), otrzymujemy

$$\mu_\delta^*(p)=(1-\alpha)\frac{\lambda m_1}{(p+\delta+\lambda)p}+\alpha\frac{\lambda}{p}l^*(p+\delta+\lambda)$$
$$+\frac{\lambda}{p+\delta+\lambda}\mu_\delta^*(p),$$

gdzie $f^*(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ jest transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$. Stąd otrzymujemy transformatę Laplace'a wartości oczekiwanej zagregowanej, dyskontowanej straty

$$\mu_\delta^*(p)=\frac{(1-\alpha)\lambda m_1}{(p+\delta)p}+\alpha\lambda\frac{p+\delta+\lambda}{(p+\delta)p}l^*(p+\delta+\lambda). \qquad (2)$$

Odwracając transformatę Laplace'a $\mu_\delta^*(p)$ zadaną wzorem (2), otrzymujemy w tym przypadku, w odróżnieniu od podejścia przedstawionego w pracy [Heilpern 2014], jawną postać wartości oczekiwanej

$$\mu_\delta(t) = (1-\alpha)\frac{\lambda m_1}{\delta}\left(1-e^{-\delta t}\right) + \alpha\frac{\lambda}{\delta}\int_0^t e^{-(\delta+\lambda)w}\left(\delta+\lambda-\lambda e^{-\delta(t-w)}\right)l(w)dw.$$

Natomiast dla $\delta = 0$ mamy

$$\mu_0(t) = (1-\alpha)\lambda m_1 t + \alpha\lambda\int_0^t e^{-\lambda w}(1+(t-w)\lambda)l(w)dw.$$

Przyjmijmy teraz, że szkody mają rozkład wykładniczy. Dystrybuanta zmiennej losowej X jest wtedy równa $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$, a funkcja $l(w)$ oraz jej transformata Laplace'a przybierają postać

$$l(w) = \frac{\lambda}{\beta}w \text{ oraz } l^*(p) = \frac{\lambda}{\beta p^2}.$$

Transformata Laplace'a zdyskontowanej, zagregowanej szkody wynosi

$$\mu_\delta^*(p) = \lambda\frac{(1-\alpha)(p+\delta)+\lambda}{(p+\delta)p\beta(p+\delta+\lambda)}.$$

Odwracając powyższą transformatę, otrzymujemy jawną postać wartości oczekiwanej zdyskontowanej, zagregowanej szkody:

$$\mu_\delta(t) = \frac{\lambda}{\beta\delta}\left(1-e^{-\delta t}\right) - \frac{\alpha\lambda}{\beta(\delta+\lambda)}\left(1-e^{-(\delta+\lambda)t}\right).$$

Widzimy, że jej wartość maleje liniowo wraz ze wzrostem parametru α oddającego stopień zależności między zmiennymi W i X. Gdy $I_1(t)$, $\delta = 0$, mamy

$$\mu_0(p) = \frac{\lambda}{\beta}t - \frac{\alpha}{\beta}\left(1-e^{-\lambda t}\right).$$

W odróżnieniu od metody zastosowanej w [Heilpern 2014], w tym przypadku możemy wyznaczyć oczekiwaną szkodę dla innych rozkładów zmiennej X niż wykładniczy. Na przykład załóżmy, że szkody mają rozkład Pareta z dystrybuantą

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{b}{x+b}\right)^a,$$

gdzie $a > 1$ oraz $b > 0$. Wtedy $m_1 = b/(a-1)$, $l(w) = b(e^{\lambda w/a} - 1)$ oraz $l^*(p) = \frac{\lambda b}{p(ap-\lambda)}$, a transformata Laplace'a oczekiwanej wartości szkody jest równa

$$\mu_\delta^*(p) = \lambda b \frac{(1-\alpha)a(p+\delta)+\lambda(a-1)}{(a-1)p(p+\delta)(a(p+\delta+\lambda)-\lambda)}.$$

Odwracając tę transformatę, otrzymujemy

$$\mu_\delta(t) = \frac{\lambda b}{\delta(a-1)}\left(1-e^{-\delta t}\right)$$

$$-\frac{\alpha\lambda ab}{(a-1)(a(\delta+\lambda)-\lambda)}\left(1-e^{-\left(\delta+\lambda-\frac{\lambda}{a}\right)t}\right)$$

.

Gdy $\delta = 0$, to

$$\mu_0(t) = \frac{b\lambda}{a-1}t + \alpha\frac{ab\left(e^{\left(\frac{1}{a}-1\right)\lambda t}-1\right)}{(a-1)^2}.$$

5. Drugi moment

Drugi moment $\mu_\delta^{(2)}(t)$ zdyskontowanej, zagregowanej straty $S_\delta(t)$ można wyznaczyć, stosując podobną metodę, jaka była zastosowana do obliczenia pierwszego momentu, a także zależności wyprowadzone w pracy [Bargès i in. 2011]. Otrzymujemy wtedy:

$$\mu_\delta^{(2)}(t) = E\left(E\left(\left(e^{-\delta w}X_1 + e^{-\delta w}S_\delta(t-w)\right)^2|W_1 = w\right)\right)$$

$$= \lambda\int_0^t e^{-(2\delta+\lambda)w}E(X^2|W=w)dw$$

$$+ 2\lambda\int_0^t e^{-(2\delta+\lambda)w}E(X|W=w)\mu_\delta(t-w)dw$$

$$+\lambda\int_0^t e^{-(2\delta+\lambda)w}\mu_\delta^{(2)}(t-w)dw = \lambda\big(J_1(t)+2J_2(t)+J_3(t)\big), \quad (3)$$

gdzie warunkowy drugi moment zmiennej losowej X wynosi:

$$E(X^2|W=w)=(1-\alpha)m_2+\alpha l^2(w),$$

a $m_2=E(X^2)$. Poszczególne całki $J_i(t)$ są odpowiednio równe:

$$J_1(t)=\frac{(1-\alpha)m_2}{2\delta+\lambda}\left(1-e^{-(2\delta+\lambda)t}\right)+\alpha\int_0^t e^{-(2\delta+\lambda)w}l^2(w)dw,$$

$$J_2(t)=(1-\alpha)m_1\int_0^t e^{-(2\delta+\lambda)w}\mu_\delta(t-w)dw$$
$$+\alpha\int_0^t e^{-(2\delta+\lambda)w}l(w)\mu_\delta(t-w)dw,$$

$$J_3(t)=\int_0^t e^{-(2\delta+\lambda)w}\mu_\delta^{(2)}(t-w)dw,$$

a ich transformaty Laplace'a wynoszą:

$$J_1^*(p)=\frac{(1-\alpha)m_2}{p(p+2\delta+\lambda)}+\frac{\alpha}{p}(l^2)^*(p+2\delta+\lambda),$$

$$J_2^*(p)=\left(\frac{(1-\alpha)m_1}{p+2\delta+\lambda}+\alpha l^*(p+2\delta+\lambda)\right)\mu_\delta^*(p),$$

$$J_3^*(p)=\frac{\left(\mu_\delta^{(2)}\right)^*(p)}{p+2\delta+\lambda}.$$

Stąd oraz z (2) i (3) otrzymujemy ogólną postać transformaty Laplace'a drugiego momentu:

$$\left(\mu_\delta^{(2)}\right)^*(p)=\frac{\lambda}{p(p+2\delta)}((1-\alpha)m_2+\alpha(p+2\delta+\lambda)(l^2)^*(p+2\delta$$
$$+\lambda)+2p((1-\alpha)m_1+\alpha(p+2\delta+\lambda)l^*(p+2\delta$$
$$+\lambda))(\mu_\delta)^*(p)).$$

Dla wykładniczych szkód transformata ta jest równa

$$\left(\mu_\delta^{(2)}\right)^*(p)=$$
$$\frac{2\lambda}{p\beta^2(p+2\delta)}\left(1-\alpha+\frac{\alpha\lambda^2}{(p+2\delta+\lambda)^2}+\frac{((\alpha-1)(p+\delta)-\lambda)((\alpha-1)(p+2\delta)-\lambda)\lambda}{(p+\delta)(p+\delta+\lambda)(p+2\delta+\lambda)}\right).$$

Natomiast drugi moment zdyskontowanej, zagregowanej straty przybiera w tym przypadku postać:

$$\mu_{\delta}^{(2)}(t) = \frac{2\lambda}{\beta^2}(\frac{e^{-t(2\delta+\lambda)}t\alpha\lambda}{2\delta+\lambda} - \frac{e^{-t\delta}\big((1-\alpha)\delta+\lambda\big)\lambda}{\delta^2(\delta+\lambda)}$$
$$-\frac{e^{-2t\delta}(\delta^2-(2-\alpha)\delta\lambda+\lambda^2)}{2\delta^2(\delta-\lambda)}$$
$$+\frac{e^{-t(\delta+\lambda)}\alpha\lambda(\delta-\alpha\delta+\alpha\lambda)}{\delta^3-\delta\lambda^2}$$
$$+\frac{e^{-t(2\delta+\lambda)}\alpha(2\delta^3+2(1+\alpha)\delta^2\lambda+(1+3\alpha)\delta\lambda^2+\alpha\lambda^3)}{\delta(\delta+\lambda)(2\delta+\lambda)^2}$$
$$+\frac{1}{2}(\frac{1-3\alpha}{\delta}+\frac{\lambda}{\delta^2}+\frac{4\alpha\delta}{(2\delta+\lambda)^2}+\frac{\alpha(2\delta+\lambda+2\alpha\lambda)}{(\delta+\lambda)(2\delta+\lambda)}))$$

a wariancja jest równa

$$V\big(S_\delta(t)\big) = \frac{1}{\beta^2}\lambda(2(\frac{e^{-t\delta}\big((-1+\alpha)\delta-\lambda\big)\lambda}{\delta^2(\delta+\lambda)} + \frac{e^{-t(2\delta+\lambda)}t\alpha\lambda}{2\delta+\lambda}$$
$$-\frac{e^{-2t\delta}(\delta^2+(-2+\alpha)\delta\lambda+\lambda^2)}{2\delta^2(\delta-\lambda)}$$
$$+\frac{e^{-t(2\delta+\lambda)}\alpha(2\delta^3+2(1+\alpha)\delta^2\lambda+(1+3\alpha)\delta\lambda^2+\alpha\lambda^3)}{\delta(\delta+\lambda)(2\delta+\lambda)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1-3\alpha}{\delta}+\frac{\lambda}{\delta^2}+\frac{4\alpha\delta}{(2\delta+\lambda)^2}+\frac{\alpha(2\delta+\lambda+2\alpha\lambda)}{(\delta+\lambda)(2\delta+\lambda)}\right)$$
$$+\frac{e^{-t(\delta+\lambda)}\alpha\lambda(\delta-\alpha\delta+\alpha\lambda)}{\delta^3-\delta\lambda^2}) - \lambda(\frac{1-e^{-t\delta}}{\delta}+\frac{(-1+e^{-t(\delta+\lambda)})\alpha}{\delta+\lambda})^2.$$

Gdy nie uwzględniamy dyskonta ($\delta = 0$), wariancja zagregowanej szkody przybiera znaną postać [Heilpern 2014]:

$$V\big(S_0(t)\big) = \frac{1}{\beta^2}\Big(2\lambda t - 2\alpha\lambda t + \alpha^2\big(1 - 2\lambda t e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\big)\Big).$$

Powyższe przekształcenia umożliwiające wyznaczenie momentów zdyskontowanej oraz wariancji zagregowanej straty $S_\delta(t)$ zostały wykonane za pomocą programu Mathematica 7. W podobny sposób możemy wyznaczyć te wartości dla szkód o rozkładzie Pareta. Jednak

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
Nr 12(18)

końcowe wzory mają dość skomplikowaną postać. Nie zostaną przedstawione w naszej pracy. Wykorzystane jednak będą w następnym paragrafie, do wyznaczania wartości składek ubezpieczeniowych opartych na momentach.

6. Wyznaczanie składek ubezpieczeniowych

Obliczone momenty zdyskontowanej, zagregowanej straty $S_\delta(t)$ na podstawie wzorów podanych w paragrafach 2 i 3 umożliwią nam wyznaczanie podstawowych składek ubezpieczeniowych przy ustalonym przedziale czasowym $(0, t]$, składek przybierających postać:

$$\Pi_\delta(t) = E(S_\delta(t)) + L_\delta(t),$$

gdzie $E(S_\delta(t))$ jest tzw. składką netto, a obciążenie ryzykiem $L_\delta(t)$ zależy od momentów zmiennej losowej $S_\delta(t)$.

W naszej pracy będziemy rozpatrywać trzy postacie obciążenia ryzykiem [Ostasiewicz (red.) 2000; Rolski i in. 1999]:

$$L_\delta^E(t) = cE\big(S_\delta(t)\big),$$

$$L_\delta^V(t) = cV\big(S_\delta(t)\big),$$

$$L_\delta^\sigma(t) = c\sqrt{V(S_\delta(t))},$$

gdzie $c \geq 0$ jest współczynnikiem bezpieczeństwa. Otrzymujemy wtedy trzy rodzaje składek, tzw. zasadę wartości oczekiwanej $\Pi_\delta^E(t)$, wariancji $\Pi_\delta^V(t)$ i odchylenia standardowego $\Pi_\delta^\sigma(t)$ [Ostasiewicz (red.) 2000; Bargès i in. 2011].

Przedstawimy teraz dwa przykłady wyznaczania wielkości składki ubezpieczeniowej. W pierwszym szkody mają rozkład wykładniczy, a w drugim – rozkład Pareta.

Przykład 1. Załóżmy, że $\lambda = 1$, $\delta = 0{,}1$, $t = 2$, a szkody X mają rozkład wykładniczy z parametrem $\beta = 1$. W tabeli 1 przedstawione są wartości oczekiwane zagregowanej straty $S_{0,1}(1)$, jej wariancji oraz składek: zasady wartości oczekiwanej, odchylenia standardowego i wariancji, gdy c$= 0{,}2$, dla różnych wartości parametru α. Wartość oczekiwana oraz wariancja zagregowanej straty są wtedy odpowiednio równe

$$E(S_{0,1}(1)) = 1{,}81269 - 0{,}808361\alpha,$$

$$V(S_{0,1}(1)) = 3{,}2968 - 3{,}33021\alpha + 0{,}359067\alpha^2.$$

W obydwu przypadkach są to malejące funkcje ze względu na parametr α oddający stopień zależności.

Tabela 1. Wartości wybranych składek ubezpieczeniowych dla szkód o rozkładzie wykładniczym

			Składki		
α	$E(S_{0,1}(1))$	$V(S_{0,1}(1))$	$\Pi_\delta^E(t)$	$\Pi_\delta^g(t)$	$\Pi_\delta^V(t)$
0	1,8127	3,2968	2,1752	2,1758	2,2477
0,2	1,6510	2,6451	1,9812	1,9763	2,0473
0,4	1,4893	2,0222	1,7872	1,7738	1,8468
0,6	1,3277	1,4279	1,5932	1,5667	1,6463
0,8	1,1660	0,8624	1,3992	1,3517	1,4458
1	1,0043	0,3257	1,2052	1,1185	1,2454

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 2. (cd. przykładu 1) Załóżmy teraz, że szkody mają rozkład Pareta z parametrami $a = 3$, $b = 2$. Wtedy dystrybuanta rozkładu szkód przybiera postać

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{2}{x+2}\right)^3,$$

$\beta = 1$, a wartość oczekiwana oraz wariancja zagregowanej straty są wtedy odpowiednio równe:

$$E(S_{0,1}(1)) = 1{,}81269 - 1{,}02285\alpha,$$

$$V(S_{0,1}(1)) = 6{,}5936 - 6{,}78801\alpha + 0{,}411417\alpha^2.$$

I w tym przypadku są to funkcje malejące ze względu na parametr α. W tabeli 2 przedstawione są wartości oczekiwane zagregowanej straty $S_{0,1}(1)$, jej wariancji oraz wybranych składek ubezpieczeniowych dla różnych wartości parametru α.

Tabela 2. Wartości wybranych składek ubezpieczeniowych dla szkód o rozkładzie Pareta

			Składki		
α	$E(S_{0,1}(1))$	$V(S_{0,1}(1))$	$\Pi_\delta^E(t)$	$\Pi_\delta^g(t)$	$\Pi_\delta^V(t)$
0	1,8127	6,5936	2,1752	2,3263	2,2477
0,2	1,6081	5,2525	1,9297	2,0665	1,9941
0,4	1,4036	3,9442	1,6843	1,8008	1,7404
0,6	1,1990	2,6689	1,4388	1,5257	1,4867
0,8	0,9944	1,4265	1,1933	1,2333	1,2331
1	0,7898	0,2170	0,9478	0,8830	0,9794

Źródło: opracowanie własne.

ŚLĄSKI PRZEGLĄD STATYSTYCZNY

Nr 12(18)

7. Podsumowanie

W pracy wyznaczone zostały dwa pierwsze momenty zdyskontowanej, zagregowanej szkody. Dopuszczona została możliwość występowania zależności okresów między szkodami a sąsiednią szkodą. Natomiast struktura zależności opisana została funkcją łączącą Spearmana. W odróżnieniu od metody zastosowanej w pracy [Heilpern 2014] momenty badanej zmiennej losowej zostały wyznaczone wprost, a nie na podstawie funkcji tworzącej momenty. Metoda ta umożliwiła wyznaczenie momentów nie tylko dla szkód o rozkładzie wykładniczym, ale i dla innych rozkładów, na przykład o rozkładzie Pareta. Uwzględniono też możliwość zdyskontowania rozpatrywanych szkód. Zaobserwowano, że wraz ze wzrostem stopnia zależności maleje wartość oczekiwana i wariancja zagregowanej szkody. Na podstawie wyznaczonych momentów obliczone zostały wartości podstawowych składek ubezpieczeniowych.

W dalszych badaniach autor zajmować się będzie aproksymacją wybranych charakterystyk zdyskontowanej, zagregowanej szkody, takich jak VaR, czy TVaR. W tym celu oprócz znajomości dwóch pierwszych momentów, potrzebna będzie znajomość trzeciego momentu (patrz [Bargès i in. 2011]).

Literatura

Bargès M., Cossette H., Loisel S., Marceau E., *On the moments of aggregate discounted claims with dependence introduced by a FGM copula*, „ASTIN Bulletin" 2011, Vol. 41, No. 1, s. 215–238.

Boudreault M., Cossette H., Landiault D., Marceau E., *On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes*, „Scandinavian Actuarial Journal" 2006, Vol. 5, s. 265–285.

Cossette H., Marceau E., Marri F., *On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern copula*, „Insurance: Mathematics and Economics" 2008, Vol. 43, s. 444–455.

Heilpern S., *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2007.

Heilpern S., *Compound Poisson process with dependent interclaim times and claim amounts*, „Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu" 2014 [w recenzji].

Hürlimann W., *Multivariate Fréchet copulas and conditional value-at-risk*, „International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences" 2004, Vol. 7, s. 345–364.

Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 1999.

Ostasiewicz W. (red.), *Modele aktuarialne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 2000.

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, New York 1999.

ŚLĄSKI
PRZEGLĄD
STATYSTYCZNY

Nr 12(18)

DEPENDENT COMPOUND POISSON PROCESS – INSURANCE PREMIUM DETERMINATION

Summary: The paper is devoted to the dependent compound Poisson process. The dependence of the interclaim times and the neighbouring claim amount is allowed in this process. The dependent structure is described by the Spearman copula. The values of the basic insurance premiums based on the moments of discounted aggregated claim are determined. The values of two first moments and insurance premiums where the claims are exponentially and Pareto distributed are derived.

Keywords: compound Poisson process, dependence, copula, insurance premium.