



Katarzyna Zeug-Żebro

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
Wydział Zarządzania
Katedra Matematyki
katarzyna.zeug-zebro@ue.katowice.pl

ZASTOSOWANIE WYBRANYCH METOD SZACOWANIA WYMIARU FRAKTALNEGO DO OCENY POZIOMU RYZYKA FINANSOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH

Streszczenie: W literaturze związanej z teorią inwestycji finansowych można spotkać wiele metod klasycznych i nieklasycznych, pozwalających na ocenę ryzyka. W grupie miar klasycznych znajdują się m.in. odchylenie standardowe czy też współczynnik zmienności. Miary te jednak na ogół zaniżają poziom ryzyka. W pracy zaprezentowano bardziej rzetelną miarę należącą do metod nieklasycznych, tj. wymiar fraktalny. Szacowanie tego wymiaru oparto na trzech procedurach: analizie R/S, metodzie segmentowo-wariacyjnej oraz metodzie podziału pola. Badanie przeprowadzono dla finansowych szeregów czasowych złożonych z cen zamknięcia wybranych indeksów giełdowych oraz akcji spółek notowanych na GPW w Warszawie.

Słowa kluczowe: wymiar fraktalny, analiza R/S, metoda segmentowo-wariacyjna, metoda podziału pola, ryzyko.

Wprowadzenie

Ocena ryzyka inwestycji jest bardzo ważnym zagadnieniem wspomagającym m.in. podjęcie decyzji finansowych. Ze względu na sposób rozumienia tego pojęcia oraz wyboru modelu kształtowania się cen instrumentów finansowych powstało wiele klasycznych i nieklasycznych metod szacowania poziomu ryzyka. W grupie miar klasycznych znajdują się m.in. odchylenie standardowe czy też współczynnik zmienności. Wieloletnie badania wykazały jednak, że miary te na ogół zaniżają wartość ryzyka inwestycyjnego. Opracowano więc metody, któ-

re bardziej rzetelnie odzwierciedlają ryzykowność podejmowanych inwestycji. Wśród nich można wyróżnić wymiar fraktalny. Miara ta określa zmienność stopy zwrotu i im większa jej wartość, tym większe ryzyko związane z inwestowaniem w dany instrument finansowy [Zwolankowska, 1999].

Celem artykułu była ocena ryzyka wybranych finansowych szeregów czasowych. Badanie przeprowadzono na podstawie nieklasycznej miary ryzyka, jaką jest wymiar fraktalny. Do oszacowania tego wymiaru posłużono się trzema różnymi procedurami, tj. analizą przeskalowanego zakresu, metodą segmentowo-wariacyjną i metodą podziału pola. W badaniach wykorzystano szeregi czasowe utworzone z cen zamknięcia indeksów giełdowych WIG, WIG20, WIG-BANKI i WIG-ENERG oraz trzydziestu spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie wchodzących w skład indeksu WIG30 lub jego listy rezerowej¹. Dane obejmowały okres od 04.01.2010 do 31.10.2013. Obliczenia przeprowadzono przy użyciu programów napisanych przez autorkę w języku programowania Delphi oraz pakietu Microsoft Excel.

1. Wymiar fraktalny

Wymiar fraktalny jest uogólnieniem wymiaru euklidesowego i służy do opisu skomplikowanych strukturalnie obiektów geometrycznych, w tym np. szeregów czasowych. Wymiar ten bada, w jakim stopniu analizowany obiekt czy też szereg wypełnia przestrzeń, w której jest zanurzony [Orzeszko, 2010]. Jego cechą charakterystyczną jest fakt, że może on przyjmować wartości niecałkowite, np. krzywa na płaszczyźnie ma wymiar z przedziału $[1, 2]$.

Wymiar fraktalny (zwany również pojemnościowym) danego obiektu geometrycznego A można obliczyć, szacując minimalną liczbę domkniętych hipersześcianów o boku długości ε , potrzebnych do jego pokrycia. Wymiar ten wyznacza się na podstawie następującego wzoru:

$$D(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L(A, \varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \quad (1)$$

gdzie $L(A, \varepsilon)$ jest minimalną liczbą hipersześcianów o boku długości ε .

W celu oszacowania wymiaru fraktalnego szeregu czasowego $\{x_t\}$ wyznacza się na płaszczyźnie punkty o współrzędnych (t, x_t) . Następnie, łącząc je kolejno odcinkami, otrzymuje się linię łamaną K . Wymiar fraktalny tak skonstruowanej łamanej K jest wymiarem szeregu czasowego.

¹ Portfel indeksu WIG30 po korekcie kwartalnej 19.09.2014 (według stanu na 31.07.2014 r.).

2. Wybrane techniki szacowania wymiaru fraktalnego

W literaturze związanej z fraktalami można spotkać wiele różnych sposobów wyznaczania wymiaru fraktalnego. Do mniej znanych metod należą: analiza przeskalowanego zakresu, metoda segmentowo-wariacyjna oraz podziału pola. W dalszej części pracy zostaną omówione właśnie te trzy techniki szacowania wymiaru.

2.1. Analiza przeskalowanego zakresu

Pierwszą omawianą techniką obliczania wymiaru fraktalnego szeregu czasowego $\{x_t\}$ jest metoda oparta na wykładniku Hursta, zwana analizą przeskalowanego zakresu lub w skrócie analizą R/S. Analiza ta służy również do badania istnienia efektu długiej pamięci i z tego powodu jest stosowana m.in. do identyfikacji chaosu w szeregach czasowych.

Dla szeregu obserwacji $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ przebiega ona w następujących etapach [Chun, Kim, Kim, 2002]:

Krok 1. Szereg $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ zostaje przekształcony w ciąg $m = N - 1$ logarytmicznych stóp zwrotu:

$$y_k = \log\left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right), k = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (2)$$

Krok 2. Niech $T, q \in N$ i $T \cdot q = m$, wówczas istnieje T podprzedziałów I_j , każdy o długości q , $j = 1, \dots, T$. Ponadto niech każdy składnik podprzedziału I_j będzie oznaczony przez y_{ij} , gdzie $i = 1, \dots, q$. Średnia wartość dla j -tego podciągu wynosi:

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^q y_{ij}}{q}. \quad (3)$$

Krok 3. W kolejnym etapie każdy podciąg zostaje scentrowany poprzez odjęcie średniej arytmetycznej:

$$z_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_j \quad (4)$$

i zdefiniowanie ciągu sum częściowych z_{ij} :

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^i z_{lj}, i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, T. \quad (5)$$

Krok 4. Następnie należy obliczyć rozstępy skumulowanych szeregów czasowych według wzoru:

$$R_j = \max(p_{ij}) - \min(p_{ij}). \quad (6)$$

Krok 5. Kolejny etap algorytmu to wyznaczenie rozstępów przeskalowanych dla każdego skumulowanego szeregu czasowego, tzn. każdy rozstęp zostaje podzielony przez odchylenie standardowe tego szeregu:

$$\alpha_{jq} = R_j / S_j, \quad (7)$$

gdzie: $S_j = \sqrt{\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q z_{ij}^2}$.

Krok 6. Ostatecznie należy obliczyć:

$$(R/S)_q = (1/T) \sum_{j=1}^T \alpha_{jq}. \quad (8)$$

Powyższą procedurę przeprowadza się dla różnych długości szeregu czasowego q , $10 \leq q \leq \frac{m}{2}$. W ten sposób otrzymujemy zależność wielkości R/S od długości szeregu q . Aby wyznaczyć wykładnik Hursta, należy zlogarytmować następującą zależność:

$$(R/S)_q = cq^H, \quad (9)$$

gdzie: H jest wykładnikiem Hursta, c jest stałą, a t jest wartością oczekiwaną przeskalowanego zakresu:

$$\ln((R/S)_q) = \ln c + H \ln q. \quad (10)$$

Wykładnik Hursta jest współczynnikiem kierunkowym regresji liniowej.

Wymiar fraktalny $D(N)$ szeregu czasowego obliczony na podstawie wykładnika Hursta H szacuje się za pomocą następującego wzoru [Zwołankowska, 2000]:

$$D(N) = 2 - H. \quad (11)$$

2.2. Metoda segmentowo-wariacyjna

Jedną z najpopularniejszych metod szacowania wymiaru fraktalnego jest metoda wariacyjna [Dubuc i in., 1989]. Jej rozszerzeniem jest metoda segmentowo-wariacyjna S-W zaproponowana przez M. Zwolankowską [2000]. Według tej metody wymiar fraktalny szeregu czasowego $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ można wyznaczyć, obliczając granicę:

$$D(N) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L(K, \varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}, \quad (12)$$

gdzie $L(K, \varepsilon)$ jest minimalną liczbą kwadratów o boku długości ε pokrywających linię łamaną K . Wzór (12) można przekształcić do prostszej, równoważnej postaci, podstawiając za $L(K, \varepsilon)$ następującą formułę:

$$L(K, \varepsilon) = \frac{P(K, \varepsilon)}{\varepsilon^2}, \quad (13)$$

gdzie $P(K, \varepsilon)$ jest polem pokrywającym całą łamaną K . Dodatkowo można przyjąć, że dla dostatecznie małych wartości ε prawdziwy jest wzór:

$$D(N) \approx \frac{\ln \frac{P(K, \varepsilon)}{\varepsilon^2}}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}. \quad (14)$$

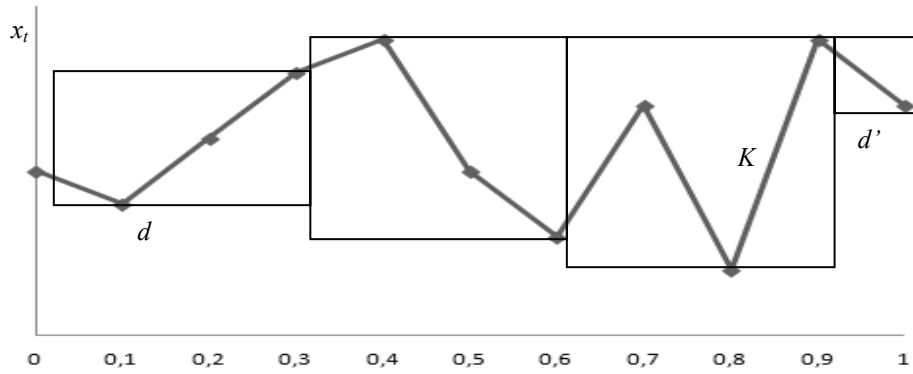
Algorytm metody segmentowo-wariacyjnej powstał na podstawie wzoru (14) i przebiega według następujących kroków:

Krok 1. W pierwszej kolejności, dla każdej obserwacji szeregu czasowego $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ należy wyznaczyć punkt o współrzędnych $\left(\frac{t-1}{N-1}, x_t\right)^2$, dla $t = 1, 2, \dots, N$, a następnie połączyć te punkty odcinkami, tworząc linię łamaną K .

Krok 2. Następnie wyznaczona łamana K zostaje pokryta prostokątami rozpiętymi nad n ($n \geq 2, n \in N$), kolejnymi punktami (rys. 1). Otrzymuje się w ten sposób $k = \left[\frac{N-1}{n-1}\right]^3$ prostokątów, każdy o podstawie $d = \frac{n-1}{N-1}$.

² Pierwsze współrzędne naniesionych punktów są równo oddalone od siebie.

³ Symbol $[\cdot]$ oznacza część całkowitą liczby.



Rys. 1. Konstrukcja pokrycia n punktów linii łamanej K

Krok 3. Jeśli iloraz $\frac{N-1}{n-1}$ jest liczbą całkowitą, wtedy kolejne wyznaczone prostokąty zostają oznaczone następująco:

$$P_*(n) = [a_j; b_j] \times [a'_j; b'_j], \quad (15)$$

gdzie $a_j = (j-1) \cdot d$, $b_j = j \cdot d$, $a'_j = \min\{K(x); x \in [a_j; b_j]\}$,
 $b'_j = \max\{K(x); x \in [a_j; b_j]\}$.

W przeciwnym przypadku, po przeprowadzeniu procedury pozostaje niepokrytych $N - (n-1) \cdot k - 1$ ostatnich punktów łamanej K . Punkty te pokrywa się dodatkowym prostokątem o podstawie $d' = \frac{N - (n-1) \cdot k - 1}{N-1}$:

$$P'_*(n) = [b_k; 1] \times [a'; b'], \quad (16)$$

gdzie:

$$a' = \min\{K(x); x \in [b_k; 1]\}, \quad b' = \max\{K(x); x \in [b_k; 1]\}.$$

Krok 4. Następnie należy obliczyć pole pokrycia linii łamanej K zgodnie ze wzorem:

$$P(K, d) = \sum_{j=1}^k d \cdot (b'_j - a'_j) + d' \cdot (b' - a'). \quad (17)$$

Krok 5. Ostatecznie, przekształcając wzór (14) do postaci:

$$D(N) \cdot \ln \frac{1}{d} \approx \ln \frac{\sum_{j=1}^k d \cdot (b'_j - a'_j) + d' \cdot (b' - a')}{d^2}, \quad (18)$$

wymiar fraktalny szeregu czasowego zostaje oszacowany jako współczynnik re-

gresji zmiennych $\ln \frac{1}{d}$ i $\ln \frac{\sum_{j=1}^k d \cdot (b'_j - a'_j) + d' \cdot (b' - a')}{d^2}$.

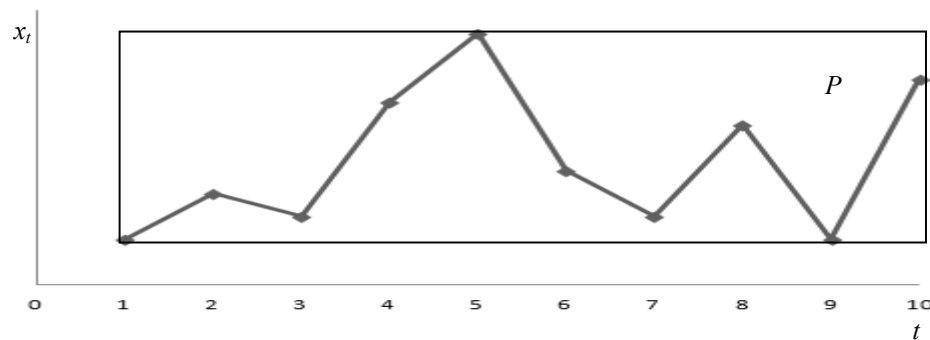
2.3. Metoda podziału pola

Ostatnią omawianą procedurą szacowania wymiaru fraktalnego jest zaproponowana przez G. Przekotę [2003] metoda podziału pola PP. Metoda ta ma wiele wspólnego z metodą segmentowo-wariacyjną, gdyż podobnie jak w tej procedurze szereg czasowy zostaje pokryty prostokątami. Algorytm tej procedury ma następujący przebieg:

Krok 1. W pierwszym etapie należy obliczyć pole prostokąta pokrywającego cały szereg czasowy $\{x_t\}, t = 1, 2, \dots, N$ (rys. 2):

$$P = N \cdot (x_{\max} - x_{\min}), \quad (19)$$

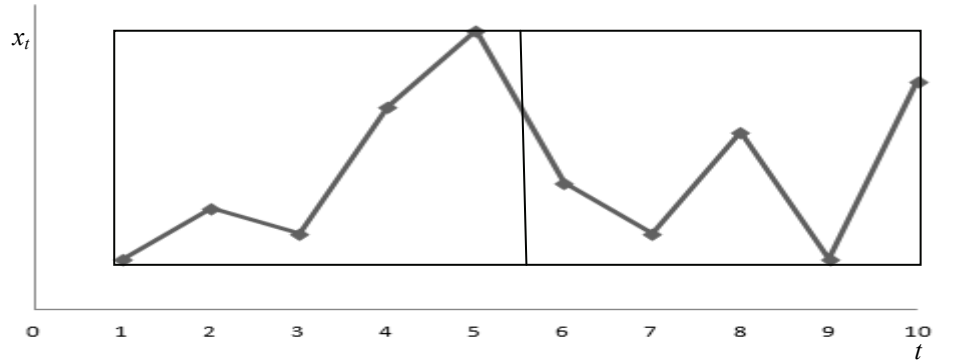
gdzie N jest liczbą obserwacji szeregu, zaś x_{\max} oznacza największą wartość w szeregu, a x_{\min} najmniejszą.



Rys. 2. Pokrycie szeregu prostokątem o polu P

Krok 2. Następnie należy podzielić prostokąt P na połowy i obliczyć sumę p pól otrzymanych połówek (rys. 3):

$$p = \frac{N}{2} \cdot (x_{\max}^1 - x_{\min}^1) + \frac{N}{2} \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2). \quad (20)$$



Rys. 3. Podział pokrycia szeregu prostokątem na połówki

Krok 3. Powtarzając procedurę dzielenia kolejnych prostokątów na połówki k razy, otrzymujemy następujące wzory:

$$P_k = \frac{N}{k} \sum_{i=1}^k (x_{\max}^i - x_{\min}^i), \quad (21)$$

$$p_{2k} = \frac{N}{2k} \sum_{i=1}^k (x_{\max}^i - x_{\min}^i), \quad (22)$$

gdzie P_k jest polem pokrywającym szereg po podziale na k części, p_{2k} jest polem pokrywającym szereg po podziale na $2k$ części, zaś x_{\max}^i , x_{\min}^i oznaczają największą i najmniejszą wartość w i -tym prostokącie.

Krok 4. Ostatecznie wymiar fraktalny szeregu czasowego $D(N)$ wyznaczamy ze wzoru:

$$p_{2k} = D(N) \cdot \frac{P_k}{2}, \quad (23)$$

szacując współczynnik regresji zmiennych p_{2k} i $\frac{P_k}{2}$.

3. Analiza poziomu ryzyka finansowych szeregów czasowych

Badaniu poddano szeregi finansowe⁴ utworzone z cen zamknięcia wybranych indeksów giełdowych WIG, WIG20, WIG-BANKI i WIG-ENERG oraz trzydziestu spółek notowanych na GPW w Warszawie wchodzących w skład indeksu WIG30 lub jego listy rezerwowej (tab. 1). Dane obejmują okres od 04.01.2010 do 31.10.2013.

Analiza wymienionych wyżej szeregów czasowych przebiegała w następujących etapach:

1. Wyznaczenie wykładnika Hursta i jego wartości oczekiwanej.
2. Szacowanie wymiaru fraktalnego na podstawie:
 - 2.1. Analizy R/S,
 - 2.2. Metody segmentowo-wariacyjnej,
 - 2.3. Metody podziału pola,
 dla indeksów i pozostałych finansowych szeregów czasowych.
3. Wyznaczenia odchylenia standardowego stóp zwrotu σ .

Przeprowadzone badania empiryczne pozwoliły wyznaczyć wykładnik Hursta oraz jego wartość oczekiwaną $E((R/S)_q)$ (tab. 1)⁵. $E((R/S)_q)$ została obliczona na podstawie następującego wzoru [Stawicki, Janiak, s. 38]:

$$E((R/S)_q) = \frac{q}{(q-0,28)\sqrt{\frac{\pi}{2}q}} \sum_{i=1}^{q-1} \sqrt{\frac{q-i}{i}}, \quad (24)$$

gdzie q jest długością podciągów analizowanych w procedurze R/S.

Wykładnik Hursta różny od oczekiwanego $E(H)$ świadczy o istnieniu szeregu o długookresowej pamięci.

Tab. 1. Wyniki szacowania wykładnika Hursta i jego wartości oczekiwanej dla finansowych szeregów czasowych

Szereg	Szacowany wykładnik Hursta	Oczekiwany wykładnik Hursta	Liczba obserwacji/liczba dzielników
1	2	3	4
WIG	0,5364	0,5701	960/20
WIG20	0,5209	0,5701	960/20
WIG-BANKI	0,5257	0,5701	960/20
WIG-ENERG	0,5383	0,5701	960/20

⁴ Dane pochodzą z archiwum plików programu Omega, dostępnych na stronie internetowej www.bossa.pl.

⁵ W celu oszacowania wykładnika Hursta i jego wartości oczekiwanej, posłużono się programem autorki napisanym w języku programowania Delphi

cd. tab. 1

1	2	3	4
ASSECOPOL	0,4820	0,5701	960/20
BOGDANKA	0,5505	0,5701	960/20
BORYSZEW	0,5640	0,5701	960/20
BZWBK	0,4887	0,5701	960/20
CCC	0,5618	0,5701	960/20
CEZ	0,5016	0,5701	960/20
CYFRPLSAT	0,4516	0,5701	960/20
ENEA	0,5105	0,5701	960/20
EUROCASH	0,5121	0,5701	960/20
GRUPAAZOTY	0,5443	0,5701	960/20
GTC	0,5610	0,5701	960/20
HANDLOWY	0,5113	0,5701	960/20
INGBSK	0,4708	0,5701	960/20
KERNEL	0,4886	0,5701	960/20
KGHM	0,5561	0,5701	960/20
LOTOS	0,5788	0,5701	960/20
LPP	0,4934	0,5701	960/20
MBANK	0,4969	0,5701	960/20
MILLENIUM	0,5149	0,5701	960/20
NETIA	0,5128	0,5701	960/20
ORANGEPL	0,5518	0,5701	960/20
PEKAO	0,5045	0,5701	960/20
PGE	0,4970	0,5701	960/20
PGNIG	0,5042	0,5701	960/20
PKNORLEN	0,5312	0,5701	960/20
PKOBP	0,4842	0,5701	960/20
PZU	0,5206	0,5659	864/16
SYNTHOS	0,5201	0,5701	960/20
TAURONPE	0,5309	0,5723	840/23
TVN	0,5482	0,5701	960/20

Otrzymane rezultaty pokazały, że w przypadku większości finansowych szeregów czasowych wykładnik Hursta wyraźnie różni się od wartości oczekiwanej. Oznacza to, że te szeregi finansowe charakteryzują się „pamięcią długookresową”. Szeregi czasowe ich stóp zwrotu posiadają pewną wewnętrzną strukturę, mogą być chaotyczne.

W kolejnym kroku badań oszacowano wymiar fraktalny, wykorzystując analizę przeskalowanego zakresu, metodę segmentowo-wariacyjną oraz metodę podziału pola. Otrzymane wartości przedstawiono w tab. 2 i 3⁶, gdzie dodatkowo zaprezentowano wartości odchylenia standardowego stóp zwrotu badanych szeregów czasowych.

⁶ W celu oszacowania wymiaru fraktalnego na podstawie metod R/S, S-W i PP, posłużono się programem autorki napisanym w języku programowania Delphi

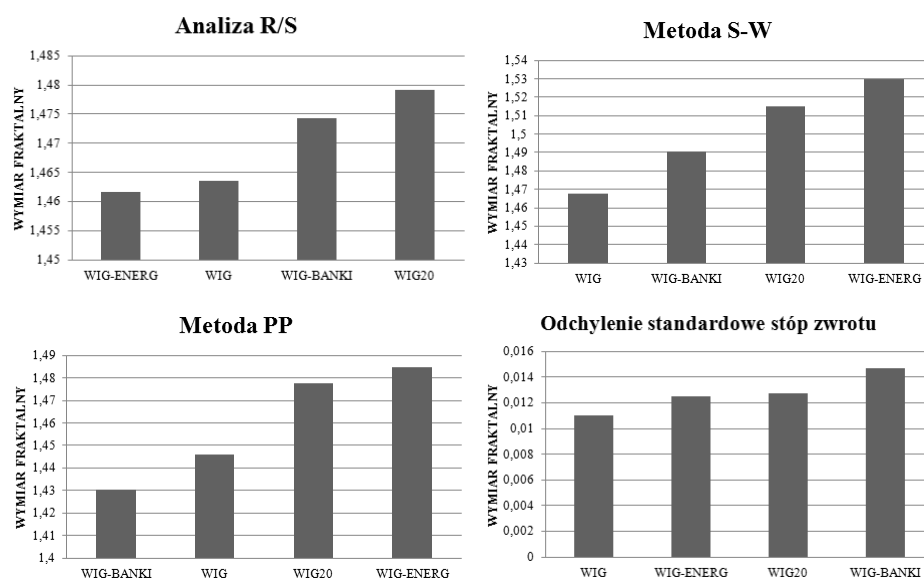
Tab. 2. Wyniki szacowania wymiaru fraktalnego i odchylenia standardowego wybranych indeksów giełdowych

Szereg	Wymiar fraktalny*			σ
	R/S	S-W	PP	
WIG	1,4636	1,4678	1,4458	0,0110
WIG20	1,4791	1,5152	1,4778	0,0127
WIG-BANKI	1,4743	1,4906	1,4303	0,0147
WIG-ENERG	1,4617	1,5299	1,4849	0,0125

* R/S – analiza przeskalowanego zakresu; S-W – metoda segmentowo-wariacyjna; PP – metoda podziału pola.

Wyniki przedstawione w tab. 2 pokazują, że najwyższe wartości wymiaru fraktalnego dla każdego indeksu uzyskano poprzez zastosowanie metody segmentowo-wariacyjnej, najniższe zaś dla procedury podziału pola. Dodatkowo, zbliżone wartości wymiaru fraktalnego w przypadku szeregów czasowych WIG i WIG-BANKI otrzymano dla analizy R/S i metody S-W, zaś w przypadku indeksów WIG20 i WIG-ENERG dla metod R/S i PP.

Rys. 4 i 5 przedstawiają wyniki przedstawione w tab. 2 i 3, uporządkowane ze względu na wartość oszacowanego wymiaru fraktalnego.

**Rys. 4.** Ranking indeksów utworzony według wartości wyznaczonych miar ryzyka

Z uzyskanych rankingów wynika, że zbliżone uporządkowanie wartości wymiaru fraktalnego otrzymano stosując metody: segmentowo-wariacyjną i podziału pola. W przypadku analizy przeskalowanego zakresu uzyskano całkowi-

cie odmienne zestawienie niż w przypadku procedury S-W i PP. Rankingi te różnią się również od rezultatów uzyskanych w wyniku oceny ryzyka na podstawie odchylenia standardowego.

Najniższy poziom ryzyka można zaobserwować w przypadku indeksu giełdowego WIG (metoda S-W i σ), WIG-ENERG (analiza R/S) i WIG-Banki (metoda PP). Mimo tych różnic, można przyjąć, że indeks WIG charakteryzuje się najniższym ryzykiem, gdyż dla procedur S-W i σ zajął on pierwszą pozycję w rankingu, natomiast dla metod R/S i PP uzyskał drugie miejsce.

Tab. 3. Wyniki szacowania wymiaru fraktalnego i odchylenia standardowego dla szeregów czasowych spółek wchodzących w skład indeksu WIG30 lub jego listy rezerwowej

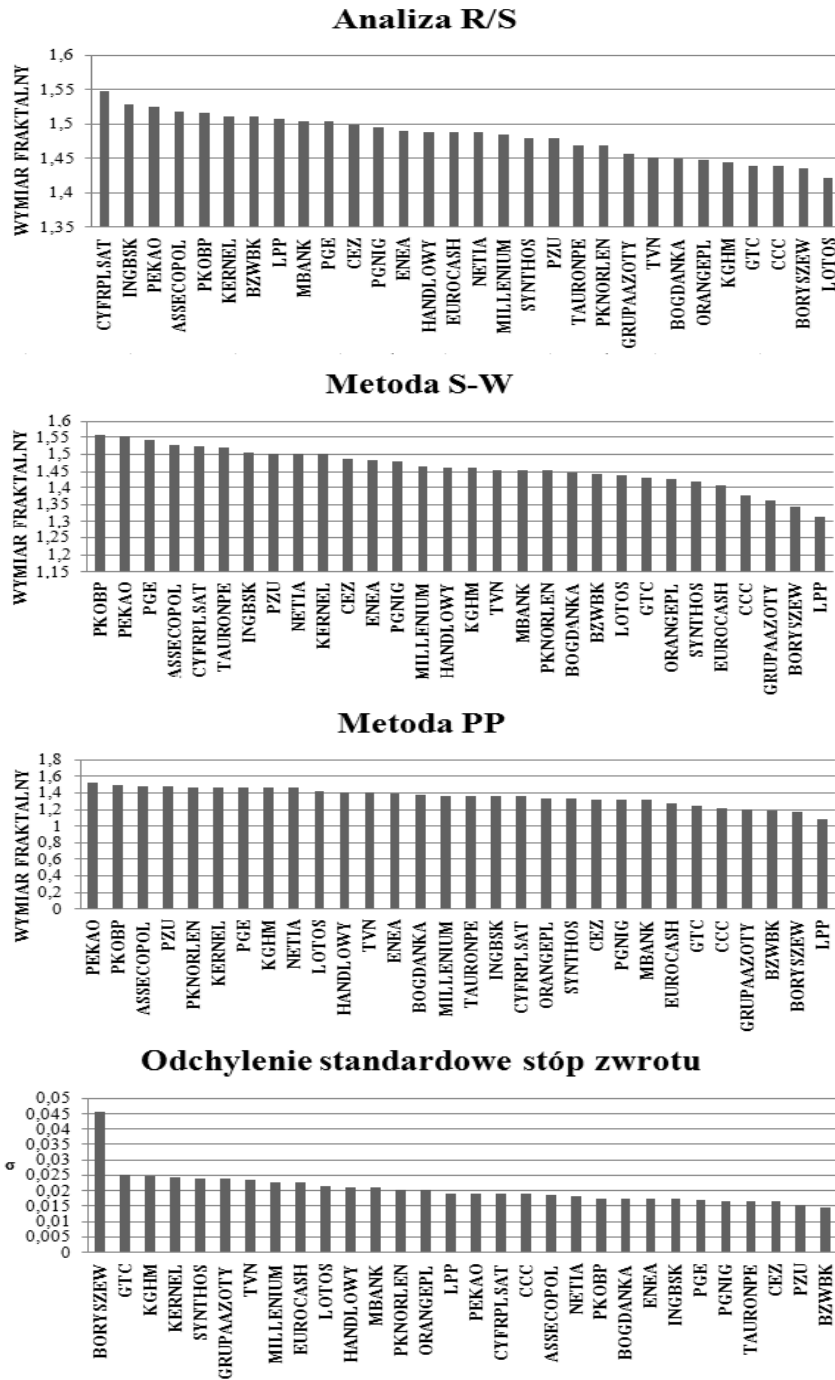
Szereg	Wymiar fraktalny*			σ
	R/S	S-W	PP	
ASSECOPOL	1,5180	1,5268	1,4863	0,0185
BOGDANKA	1,4495	1,4482	1,3777	0,0175
BORYSZEW	1,4360	1,3433	1,1710	0,0457
BZWBK	1,5113	1,4425	1,1790	0,0146
CCC	1,4382	1,3755	1,2177	0,0189
CEZ	1,4984	1,4877	1,3244	0,0164
CYFRPLSAT	1,5484	1,5240	1,3644	0,0190
ENEA	1,4895	1,4820	1,3919	0,0174
EUROCASH	1,4879	1,4066	1,2683	0,0228
GRUPAAZOTY	1,4557	1,3628	1,1996	0,0239
GTC	1,4390	1,4270	1,2449	0,0250
HANDLOWY	1,4887	1,4630	1,4043	0,0209
INGBSK	1,5292	1,5052	1,3649	0,0173
KERNEL	1,5114	1,5005	1,4639	0,0244
KGHM	1,4439	1,4604	1,4602	0,0246
LOTOS	1,4212	1,4391	1,4189	0,0217
LPP	1,5066	1,3149	1,0834	0,0191
MBANK	1,5031	1,4545	1,3147	0,0209
MILLENIUM	1,4851	1,4666	1,3690	0,0229
NETIA	1,4872	1,5007	1,4597	0,0181
ORANGEPL	1,4482	1,4257	1,3391	0,0202
PEKAO	1,5246	1,5527	1,5290	0,0191
PGE	1,5030	1,5405	1,4632	0,0171
PGNIG	1,4958	1,4782	1,3187	0,0166
PKNORLEN	1,4688	1,4536	1,4667	0,0204
PKOBP	1,5158	1,5570	1,4906	0,0176
PZU	1,4794	1,5027	1,4802	0,0152
SYNTHOS	1,4799	1,4176	1,3309	0,0241
TAURONPE	1,4691	1,5186	1,3665	0,0166
TVN	1,4518	1,4555	1,4011	0,0235

* R/S – analiza przeskalowanego zakresu; S-W – metoda segmentowo-wariacyjna; PP – metoda podziału pola. Pogrubioną czcionką zaznaczono spółki wchodzące w skład indeksu giełdowego WIG20.

Rezultaty obliczania wymiaru fraktalnego szeregów czasowych wybranych spółek (tab. 3) potwierdzają zbieżność wyników (zaobserwowaną podczas oceny ryzyka indeksów giełdowych) uzyskanych w przypadku zastosowania metody segmentowo-wariacyjnej i podziału pola. Szacowanie ryzyka na podstawie analizy przeskalowanego zakresu oraz przy użyciu odchylenia standardowego uporządkowało spółki w zupełnie innej kolejności niż dla metod S-W i PP.

Wymiar fraktalny oszacowany na podstawie indeksu WIG20 oraz przeciętne wymiary fraktalne dla spółek tworzących ten indeks w wielu przypadkach różnią się od siebie. Najbardziej zbliżone wartości uzyskano dla szeregów PKNORLEN, PZU, SYNTHOS i TAURONPE (analiza R/S), ASSECOPOL, KERNEL, PZU i TAURONPE (metoda S-W) oraz ASSECOPOL, KERNEL, KGHM, PGE, PKNORLEN, PZU (metoda PP). Świadczy to o tym, że inwestowanie w te akcje jest tak samo ryzykowne, jak inwestowanie w portfel, który reprezentuje indeks WIG20. Dla pozostałych spółek otrzymujemy odmienną konkluzję, tj. inwestowanie w te spółki jest mniej lub bardziej ryzykowne.

Według rankingów przedstawionych na rys. 5, dotyczących wartości wymiaru fraktalnego, najniższym ryzykiem charakteryzowały się spółki LPP, Lotos, Boryszew, Grupa Azoty, CCC i GTC. Zaskakujący jest wynik pomiaru ryzyka odchyleniem standardowym uzyskany dla szeregu czasowego Boryszew, zgodnie z którym inwestycja w tę spółkę jest najbardziej ryzykowna. Tymczasem jak zaznaczono wcześniej, w przypadku zastosowania wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka, spółka ta należy do grupy inwestycji najmniej ryzykownych.



Rys. 5. Ranking spółek utworzony według wartości wyznaczonych miar ryzyka

Podsumowanie

W opracowaniu przeprowadzono analizę ryzyka wybranych finansowych szeregów czasowych na podstawie wymiaru fraktalnego i odchylenia standardowego. W badaniach posłużono się różnymi narzędziami szacowania wymiaru fraktalnego, tj. analizą przeskalowanego zakresu, metodą segmentowo-wariacyjną oraz metodą podziału pola.

Z uzyskanych podczas badania rankingów finansowych szeregów czasowych utworzonych według wartości wyznaczonych miar ryzyka wynika, że zbliżone uporządkowanie wymiaru fraktalnego otrzymano stosując metody: segmentowo-wariacyjną i podziału pola. W przypadku analizy przeskalowanego zakresu uzyskano całkowicie odmienne zestawienie wartości tego wymiaru.

Na podstawie tych wyników, należy stwierdzić, że metoda wyznaczania wymiaru fraktalnego na podstawie analizy przeskalowanego zakresu prowadzi do oszacowań wysoce niestabilnych oraz niepewnych. Wszystkie wnioski formułowane na podstawie rezultatów otrzymanych z jej wykorzystaniem pozostają wątpliwe. Z tego powodu lepszym rozwiązaniem w badaniach ryzykowności inwestycji wydaje się zastosowanie metody segmentowo-wariacyjnej lub podziału pola. Należy jednak nadmienić, że otrzymane niedokładności oszacowań wymiaru fraktalnego nie wynikają tylko z możliwych niedoskonałości stosowanych metod, lecz są rezultatem zastosowania ich do szeregów o skończonej długości. Można wykazać, że dla szeregów o bardzo dużej liczbie obserwacji wartości wymiaru fraktalnego będą zbliżały się do wartości teoretycznych [Purczyński 2000].

Literatura

- Chun S.H., Kim K.J., Kim S.H. (2002), *Chaotic Analysis of Predictability versus Knowledge Discovery Techniques: Case Study of Polish Stock Market*, „Expert Systems”, Vol. 19(5), s. 264- 272.
- Dubuc B., Quininou J.F., Roques-Carmes C., Tricot C., Zucker S.W. (1989), *Evaluating the Fractal Dimension of Profiles*, „Physical Review A”, Vol. 39.
- Orzeszko W. (2010), *Wymiar fraktalny szeregów czasowych a ryzyko inwestowania*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici. Ekonomia XLI. Nauki Humanistyczno-Społeczne”, z. 397, Toruń.
- Przekota G. (2003), *Szacowanie wymiaru fraktalnego szeregów czasowych metodą podziału pola*, „Zeszyty Studiów Doktoranckich”, Poznań, z. 12, s. 47-68.
- Purczyński J. (2000), *Chaos a analiza R/S* [w:] W. Tarczyński, red., *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, Wydawnictwo Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin.

- Stawicki J., Janiak E.A., Müller-Frączek I. (1997), *Różnicowanie fraktalne szeregów czasowych – wykładnik Hursta i wymiar fraktalny* [w:] *Dynamiczne modele ekonometryczne: materiały na V Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, 9-11 września 1997*, Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora”, Toruń, s. 35-41.
- Zwolankowska D. (1999), *Wykorzystanie wymiaru fraktalnego w ocenie ryzyka inwestycji giełdowych* [w:] T. Trzaskalik, red., *Modelowanie preferencji a ryzyko '99*. Cz. 1, Wydawnictwo AE, Katowice.
- Zwolankowska D. (2000), *Metoda segmentowo-wariacyjna. Nowa propozycja liczenia wymiaru fraktalnego*, „Przegląd Statystyczny”, R. 47, z. 1-2.

APPLICATION OF CHOSEN METHODS OF ESTIMATING FRACTAL DIMENSION TO THE ASSESSMENT RISK OF FINANCIAL TIME SERIES

Summary: In the literature on the theory of financial investments can meet many classical and non-classical methods which allowing for risk assessment. In the group of the classical measures are the standard deviation or variation coefficient. However, these measures generally understate the level of risk. In the paper presents a more reliable measure of which belongs to the non-classical methods, ie. fractal dimension. This dimension was estimated based on the three procedures: R/S analysis, segment-variation method and field division method. The test will be conducted based on the financial time series which consist of closing prices of stock market indices and companies listed on the Warsaw Stock Exchange.

Keywords: fractal dimension, R/S analysis, segment-variation method, field division method, risk.