Krzysztof Piasecki
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

ROZMYTA RELACJA RÓWNOWAŻNOŚCI STRUMIENI FINANSOWYCH

Wprowadzenie

Genezy przedstawionych w tym artykule rozważań należy szukać w dwóch rozważanych uprzednio niezależnie problemach poznawczych.

W literaturze[1] pojęto próbę wyjaśnienia istoty procesu aprecjacji kapitału. Wybrane wyniki przeprowadzonych tam analiz formalnych przedstawiono w rozdziale 1. Badania te m.in. pozwoliły spojrzeć na pojęcie wartości bieżącej w świetle teorii użyteczności. Podjęto też próbę zbudowania modelu formalnego wyjaśniającego paradoks utrzymywania się równowagi rynkowej na silnie efektywnym rynku finansowym pozostającym w stanie nierównowagi finansowej. Uzasadnienie i wybrane efekty tych prac zostały w szkicowy sposób przedstawione w rozdziale 2. Wartość bieżąca została tam oszacowana przy pomocy liczby rozmytej.

Głównym celem tego artykułu jest przedstawienie formalnych konsekwencji wynikających z zestawienia rezultatów badawczych opisanych w rozdziałach 1 i 2. Realizacji tego celu będzie służyć przedstawienie w rozdziale 3 rozmytej relacji równoważności pomiędzy strumieniami finansowymi. Pewien praktyczny przykład zastosowań tej relacji zostanie przedstawiony w rozdziale 4.

Wszystkie rezultaty badawcze zaprezentowane w tym artykule mają charakter pilotażowy i w głównej mierze służą wskazaniu nowego kierunku badań dowolnej przestrzeni przepływów finansowych.

---

[1] K. Piasecki: Podstawy arytmetyki finansowej w świetle teorii użyteczności. Księga Jubileuszowa Profesora Edwarda Smagi. UE, Kraków 2012; Idem: Basis of Financial Arithmetic from the Viewpoint of the Utility Theory. Operations Research and Decisions 2012, Vol. 3.

1. Wartość bieżąca w świetle teorii użyteczności

Fundamentalnym założeniem arytmetyki finansowej jest pewnik, że wartość pieniądza rośnie wraz z upływem czasu, po jakim będzie on spożytkowany. Założenie to jest uzasadniane na ogół poprzez analizę równania wymiany pieniądza[2] zaproponowanego przez Irvinga Fishera. W analizie tej korzysta się z dodatkowego założenia o stałej ilości pieniądza. Jest to typowo normatywne założenie i z tego względu rozpatrywaną w arytmetyce finansowej wartość pieniądza będziemy nazywać wartością normatywną pieniądza. Proces przyrostu wartości normatywnej nazywamy procesem aprecjacji kapitału. Jednak na ogół stosowana praktyka gospodarczo-finansowa powoduje przyrost ilości pieniądza szybszy od przyrostu wolumenu produkcji. Obserwujemy wtedy spadek wartości realnej pieniądza. Oznacza to, że wartości normatywnej pieniądza nie możemy identyfikować z jego wartością realną. Rodzi to pytanie o istotę pojęcia wartości normatywnej. Konsekwencją tego pytania jest kolejne pytanie o istotę podstawowych funkcji arytmetyki finansowej. Poszukiwano odpowiedzi na to pytanie. Zbudowano tam następujący model formalny.

Niech będzie dany zbiór momentów czasowych $\Theta \subseteq [0, +\infty[$. W szczególnym przypadku może to być zbiór momentów kapitalizacji lub nieujemna półprosta czasu. W analizie rynków finansowych każda z należności jest reprezentowana przez instrument finansowy opisany jako strumień finansowy (t, C), gdzie symbol $t \in \Theta$ oznacza moment przepływu strumienia, natomiast symbol $C \in \mathbb{R}_0^+$ opisuje wartość nominalną tego przepływu. Zbiór wszystkich należności opisujemy jako produkt kartezjański $\Phi^+ = \Theta \times \mathbb{R}_0^+$. Na zbiorze tych należności każdy z inwestorów określa swoje preferencje. Preferencje te mają pewne wspólne cechy.

Referując podstawy teorii kapitału, von Mises[3] przedstawił regułę preferencji czasowej. Reguła ta głosi, że przy uwzględnieniu zasady ceteris paribus podmiot ekonomiczny woli zaspokoić swoje potrzeby bądź osiągać postawione cele możliwie jak najszybciej. Inaczej mówiąc, kiedy podmiot ma przed sobą dwa cele o subiektywnie jednakowej wartości, to wyżej sobie ceni ten, który może osiągnąć w krótszym czasie. W szczególnym przypadku oznacza to, że inwestor, porównując dwie wpłaty o równej wartości nominalnej, preferuje zawsze wpłatę szybciej dostępną.

---

[2] Analiza taka została opisana np. w K. Piasecki, W. Ronka-Chmielowiec: Matematyka finansowa. C.H. Beck, Warszawa 2011.

[3] L. Mises von: The Ultimate Foundation of Economic Science. An Essay on Method. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton 1962.

Jest też oczywiste, że każdy podmiot ekonomiczny w swym działaniu kieruje się regułą preferencji majątkowej. Reguła ta oznacza, że przy uwzględnieniu zasady ceteris paribus podmiot ekonomiczny woli wchodzić we władanie możliwie jak najbardziej wartościowych przedmiotów ekonomicznych. Jeśli ma przed sobą dwa przedmioty ekonomiczne równocześnie dostępne, to wybiera ten, który charakteryzuje się większą subiektywną wartością. W szczególnym przypadku oznacza to, że inwestor, porównując dwie równocześnie dostępne wpłaty, wybiera zawsze wpłatę o wyższej wartości.

Równoczesne uwzględnienie obu tych preporządków prowadzi do ostatecznego określenia relacji preferencji $\succcurlyeq$ na zbiorze Φ^+ należności, jako porównania wielokryterialnego

$$\forall (t_1, C_1), (t_2, C_2) \in \Phi^+ : (t_1, C_1) \succcurlyeq (t_2, C_2) \Leftrightarrow t_1 \le t_2 \wedge C_1 \ge C_2 \tag{1}$$

Istnieje wtedy funkcja użyteczności $U: \Phi^+ \longrightarrow [0, +\infty[$ spełniająca warunek

$$\forall (t_1, C_1), (t_2, C_2) \in \Phi^+ : (t_1, C_1) \succcurlyeq (t_2, C_2) \Rightarrow U(t_1, C_1) \ge U(t_2, C_2). \tag{2}$$

Użyteczność ta jest rosnącą funkcją wartości należności C i malejącą funkcją momentu t przepływu momentu czasowego. Określona w ten sposób funkcja użyteczności może mieć subiektywny charakter[4]. Przedstawiono[5] rozszerzenie tego preporządku do zbioru $\Phi = \Theta \times \mathbb{R}$ wszystkich przepływów finansowych. Rozszerzenie to zachowuje monotoniczność funkcji użyteczności $U: \Phi \longrightarrow [0, +\infty[$. Można wtedy między innymi pokazać, że

$$\forall t \in \Theta: \quad U(t, 0) = 0 \tag{3}$$

Kwestią umowna jest wyskalowanie wartości funkcji użyteczności. Przyjmujemy tutaj, że użyteczność natychmiastowego przepływu finansowego jest równa wartości nominalnej tego przepływu. Założenie to zapisujemy, jako warunek brzegowy

$$\forall C \in \mathbb{R}: \quad U(0, C) = C \tag{4}$$

Tak zdefiniowana funkcja użyteczności wyznacza następującą relację $\equiv$ równoważności strumieni finansowych

$$\forall (t_1, C_1), (t_2, C_2) \in \Phi : (t_1, C_1) \equiv (t_2, C_2) \Leftrightarrow U(t_1, C_1) = U(t_2, C_2) \tag{5}$$

[4] R. Dacey, P. Zielonka: A Detailed Prospect Theory Explanation of the Disposition Effect. „Journal of Behavioral Finance" 2005, Vol. 2/4.

[5] K. Piasecki: Podstawy arytmetyki finansowej..., op. cit.; Idem: Basis of Financial..., op. cit.

Jeśli dwa strumienie finansowe są jednakowo użyteczne, to uważamy je za równoważne. O strumieniu finansowym równoważnym do danego mówimy, że jest ekwiwalentem tego ostatniego. Wartość nominalną dowolnego ekwiwalentu danego strumienia finansowego identyfikujemy, jako wartość normatywną tego strumienia.

Analiza monotoniczności funkcji użyteczności prowadzi nas do sformułowania zasady aprecjacji. Zasada ta głosi, że wartość normatywna należności rośnie wraz z czasem, po jakim należność ta będzie płatna. W ten sposób teoria użyteczności potwierdza fundamentalny pewnik arytmetyki finansowej głoszący, że wartość pieniądza rośnie wraz z upływem czasu.

W arytmetyce finansowej przedmiotem rozważań jest strumień finansowy (t, C). Dla strumienia tego możemy określić jego ekwiwalent $(0, C_0)$. Wartość nominalną C_0 tego ekwiwalentu nazywamy wartością bieżącą i oznaczamy symbolem $PV(t, C)$. Zgodnie z definicją (5) relacji równoważności strumieni i warunkiem brzegowym (4) mamy tutaj tożsamość

$$C_0 = PV(t, C) = U(0, C_0) = U(t, C) \tag{6}$$

Wartość bieżąca dowolnego strumienia finansowego jest identyczna z jego użytecznością. Stwierdzenie to w pełni wyjaśnia istotę pojęcia wartości bieżącej. Dowolnej wartości bieżącej $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ przysługują m.in. następujące właściwości

$$\forall C \in \mathbb{R}: \quad PV(0, C) = C \tag{7}$$

$$\forall (t_1, C), (t_2, C) \in \Phi^+: \ t_1 < t_2 \Rightarrow PV(t_1, C) > PV(t_2, C) \tag{8}$$

$$\forall (t, C_1), (t, C_2) \in \Phi: \quad C_1 < C_2 \Rightarrow PV(t, C_1) < PV(t, C_2) \tag{9}$$

Jednocześnie Peccati[6] przedstawił aksjomatyczną definicję wartości bieżącej $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$. Wartość bieżąca została tam zdefiniowana jako funkcji spełniającej warunki (7), (8) i warunek addytywności

$$\forall (t, C_1), (t, C_2) \in \Phi: \quad PV(t, C_1) + PV(t, C_2) = PV(t, C_1 + C_2) \tag{10}$$

[6] L. Peccati: Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell'attualizzazione. Studium Parmense, Parma 1972.

Podejście to było już studiowane[7]. Aktualny stan wiedzy na temat konsekwencji aksjomatycznego podejścia do pojęcia wartości bieżącej został przedstawiony w pracy J. Janssen, R. Manca, E. Volpe di Prignano[8].

Warunek (9) jest uogólnieniem warunku (10). W tej sytuacji wartość bieżąca zdefiniowana przy pomocy tożsamości (6) jest uogólnieniem klasycznego pojęcia wartości bieżącej w ujęciu Peccatiego.

Wykazanie, że wartość bieżąca danego strumienia finansowego jest identyczna z użytecznością tego strumienia wskazuje na subiektywny charakter pojęcia wartości bieżącej. W tej sytuacji otrzymujemy podwaliny teoretyczne pod budowę modeli finansów behawioralnych wykorzystujących subiektywne oceny wartości bieżącej. Wykorzystać tutaj możemy dorobek nauk ekonomicznych zgromadzony w zakresie teorii użyteczności.

Pokazano[9], że pojęcie wartości bieżącej w ujęciu Peccatiego można uogólnić do przypadku, kiedy jest uwzględniany dodatkowo efekt dywersyfikacji inwestycji

$$\forall (t, C_1), (t, C_2) \in \Phi: \quad PV(t, C_1) + PV(t, C_2) \geq PV(t, C_1 + C_2) \tag{11}$$

Wartość bieżąca $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ definiujemy wtedy, jako dowolną funkcję spełniająca warunki (7), (8) i (11).

Tak rozumiane pojęcie wartości bieżącej możemy z kolei uogólnić do przypadku, kiedy dodatkowo uwzględniane jest pierwsze prawo Gossena

$$\begin{gathered}\forall (t, C_1), (t, C_2) \in \Phi^+ \ \forall \alpha \in [0; 1] : \\ \alpha \cdot PV(t, C_1) + (1 - \alpha) \cdot PV(t, C_2) \leq PV(t, \alpha \cdot C_1 + (1 - \alpha) \cdot C_2)\end{gathered} \tag{12}$$

informujące o malejącej marginalnej użyteczności bogactwa. Wartość bieżącą $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ definiujemy wtedy, jako dowolną funkcję spełniającą warunki (7), (8) i (12).

Najbardziej ogólną definicją wartości bieżącej jest określenie jej, jako dowolnej funkcji $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającej warunki (7), (8) i (9).

---

7 K. Piasecki: Modele matematyki finansowej. Instrumenty podstawowe. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.

8 J. Janssen, R. Manca, E. Volpe di Prignano: Mathematical Finance. Deterministic and Stochastic Models. John Wiley & Sons, London 2009.

9 K. Piasecki: Basis of Financial..., op. cit.

Na marginesie tej pracy warto też dostrzec, że arytmetykę finansową należy traktować jako rozszerzenie opartej na obiektywnych przesłankach teorii procentu. Wobec subiektywnych aspektów podejmowanej problematyki dynamicznej oceny pieniądza jest to rozszerzenie istotne.

2. Rozmyta wartość bieżąca

Zgromadzona wiedza o rynku finansowym stanowi jedyną przesłankę merytoryczną do wyznaczenia ceny równowagi finansowej C_0 rozważanego instrumentu finansowego. Cena ta jest interpretowana jako zdyskontowana wartość bieżąca (PV) przyszłych przepływów finansowych związanych z tym instrumentem finansowym. O rozważanym rynku finansowym będziemy zakładać, że jest w pełni efektywny. W tej sytuacji wszyscy uczestnicy rynku przyjmują identyczną wartość C_0 ceny równowagi. Równocześnie wszyscy ci uczestnicy rynku obserwują tę samą wartość $\check{C}$ ceny rynkowej. Znajomość obu tych wartości wystarcza racjonalnego do uzasadnienia podejmowanych decyzji inwestycyjnych. Dla przypadku

$$\check{C} < C_0 \tag{13}$$

racjonalne przesłanki sugerują kupno danego instrumentu finansowego. Zakup taki jest możliwy jedynie wtedy, kiedy pojawi się oferta jego sprzedaży. Naturalnym jest tutaj pytanie, jakimi przesłankami kieruje się inwestor sprzedający taki papier wartościowy. Podobnie, dla przypadku

$$\check{C} > C_0 \tag{14}$$

racjonalne przesłanki jednoznacznie sugerują sprzedaż rozważanego instrumentu finansowego. Sprzedaż taka jest możliwa jedynie wtedy, kiedy pojawi się oferta jego kupna. Rodzi to pytanie, jakimi przesłankami kieruje się inwestor kupujący ten papier wartościowy.

Odpowiedź na powyższe dwa pytania może być tylko jedna. Na dowolnym efektywnym rynku finansowym równowaga rynkowa pomiędzy popytem i podażą może być osiągnięta pod wpływem behawioralnych przesłanek. Problem ten był szczegółowo rozważany[10], gdzie do rozwiązania tego problem zaproponowano zastosowanie pojęcia behawioralnej wartości bieżącej (BPV) zdefinio-

[10] Idem: Podstawy arytmetyki..., op. cit.; Idem: Basis of Financial..., op. cit.

wanej jako liczba rozmyta określona przez swą funkcję przynależności $\mu(\cdot\,|\alpha, \Delta C) \epsilon [0;1]^{\mathbb{R}}$. Przebieg zmienności tej funkcji przynależności zależy od odchylenia

$$\Delta C = \check{C} - C_0 \tag{15}$$

ceny rynkowej od ceny równowagi oraz od parametru $\alpha \in [0;1]$ opisującego stopień oddziaływania fenomenu konserwatyzmu poznawczego opisanego na gruncie psychologii przez Edwardsa[11]. Fenomen ten jest uwzględniany w wielu behawioralnych modelach rynku finansowego. Można zapoznać się z dyskusją na ten temat[12]. Wykazano, że tak określony model BPV dobrze służy wyjaśnieniu paradoksu równowagi rynkowej na w pełni efektywnym rynku finansowym.

Propozycja przedstawienia wartości bieżącej, jako liczby rozmytej jest już dobrze ugruntowana ideą. Koncepcja zastosowania liczb rozmytych w arytmetyce finansowej wywodzi się od Buckleya[13]. Definicję Peccatiegio do przypadku rozmytego uogólnił Calzi[14]. Ward[15] definiuje rozmytą PV, jako zdyskontowaną rozmytą prognozę przyszłego przepływu finansowego. Definicja Warda jest uogólniona[16] do przypadku nieprecyzyjnie oszacowanego odroczenia. Sheen uogólnia definicję Warda do przypadku rozmytej stopy nominalnej. Buckley (1987, 1992), Gutierrez (1989), Kuchta (2000) i Lesage (2001) dyskutują problemy związane z zastosowaniem rozmytej arytmetyki do wyznaczania rozmytej PV. Huang[17] uogólnia definicję Warda do przypadku, kiedy przyszły przepływ finansowy jest dany, jako rozmyta zmienna losowa. Bardziej ogólna definicja rozmytej PV jest proponowana przez Tsao[18] zakładającego, że przyszły przepływ finansowy jest określony, jako rozmyty zbiór probabilistyczny.

---

[11] W. Edwards: Conservatism in Human Information Processing. W: Formal Representation of Human Judgment. Red. B. Klienmutz. Wiley, New York 1968.

[12] N. Barberis, A. Shleifer, R. Vishny: A Model of Investor Sentiment. „Journal of Financial Economics" 1998, Vol. 49.

[13] I.J. Buckley: The Fuzzy Mathematics of Finance. „Fuzzy Sets and Systems" 1987, Vol. 21.

[14] M.L. Calzi: Towards a General Setting for the Fuzzy Mathematics of Finance. „Fuzzy Sets and Systems" 1990, Vol. 35.

[15] T.L. Ward: Discounted Fuzzy Cash Flow Analysis. 1985 Fall Industrial Engineering Conference Proceedings, 1985.

[16] J.G. Greenhut, G. Norman, C.T. Temponi: Towards A Fuzzy Theory of Oligopolistic Competition. IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS 1995.

[17] X. Huang: Two New Models for Portfolio Selection with Stochastic Returns Taking Fuzzy Information. „European Journal of Operational Research" 2007, Vol. 180(1).

[18] C.-T. Tsao: Assessing the Probabilistic Fuzzy Net Present Value for a Capital, Investment Choice Using Fuzzy Arithmetic. „J. of Chin. Ins. of Industrial Engineers" 2005, Vol. 22(2).

3. Przybliżona równoważność strumieni finansowych

Rozważamy przestrzeń finansową (Φ, PV), gdzie $PV\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną ustaloną wartością bieżącą spełniającą warunki (7), (8) i (9). Funkcja ta każdemu strumieniowi finansowemu $(t, C) \in \Phi$ przypisuje jego normatywną wartość bieżącą (PPV Prescriptive Present Value – Prescriptive Present Value)

$$C_0 = PV(t, C) \tag{16}$$

W rozdziale 2 zwrócono uwagę, że wartość bieżąca może być w przybliżeniu oszacowana za pomocą liczby rozmytej. Zgodnie z definicją[19] podaną w (Dubois, Prade, 1979), dowolna liczba rozmyta reprezentująca przybliżenie liczby $l \in \mathbb{R}$ jest zdefiniowana za pomocą swej funkcji przynależności $\mu(\cdot\,|l) \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ spełniającej warunki

$$\mu(l|l) = 1 \tag{17}$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon\ x \leq y \leq z \Rightarrow \mu(y|l) \geq min\{\mu(x|l), \mu(z|l)\} \tag{18}$$

Inwestor, oceniając przybliżenia poszczególnych wariantów wartości bieżącej, określa rodzinę indeksowana $\{\nu(\cdot\,|C)\colon C \in \mathbb{R}\} \subset [0;1]^{\mathbb{R}}$. W ten sposób przybliżenie dowolnej wartości $C \in \mathbb{R}$ jest reprezentowane przez dokładnie jedną funkcję przynależności $\nu(\cdot\,|C) \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ spełniająca warunki (17) i (18). Powoduje to, że dowolną normatywną wartość bieżącą inwestor może zastąpić przez jej przybliżenie. W ten sposób zostaje wprowadzona szacunkowa wartość bieżąca (EPV – Estimated Present Value) zdefiniowana jako funkcja $\widetilde{PV}\colon \Phi \longrightarrow [0;1]^{\mathbb{R}}$ określona przy pomocy tożsamości

$$\widetilde{PV}(t, C) = \nu\left(\cdot\,\middle|PV(t, C)\right) \tag{19}$$

EPV każdemu strumieniowi finansowemu przypisuje funkcję przynależności przybliżenia jego PPV. W rozdziale 1 przypomniano, że wartość bieżącą strumienia finansowego może być identyfikowana z jego użytecznością. Korzystając teraz z (6) możemy określić rozmytą użyteczność strumieni finansowych, jako funkcję $\widetilde{U}\colon \Phi \longrightarrow [0;1]^{\mathbb{R}}$ określoną za pomocą tożsamości

$$\widetilde{U}(t, C) = \widetilde{PV}(t, C) \tag{20}$$

[19] J. Dubois, H. Prade: Fuzzy Real Algebra: Some Results. „Fuzzy Sets and Systems” 1979, Vol. 2.

Zdefiniowana wyżej funkcja użyteczności jest rozmytym uogólnieniem klasycznej funkcji użyteczności zdefiniowanej za pomocą równoważności (2). Idea stosowania rozmytej użyteczności pochodzi od Nakamury[20].

Wyznaczona użyteczność (20) pozwala nam na określenie przybliżonej relacji $\cong$ równoważności strumieni

$$\forall (t_1, C_1), (t_2, C_2) \in \Phi: (t_1, C_1) \cong (t_2, C_2) \Leftrightarrow \tilde{U}(t_1, C_1) \approx \tilde{U}(t_2, C_2) \qquad (21)$$

gdzie symbol $\approx$ oznacza relację równości określoną na zbiorze liczb rozmytych. Jeśli relacja ta jest wyznaczana z zachowaniem zasady rozszerzenia Zadeha, to wtedy funkcja przynależności $\varrho \epsilon [0; 1]^{\Phi \times \Phi}$ relacji równoważności (21) jest wyznaczona za pomocą tożsamości

$$\varrho\big((t_1, C_1), (t_2, C_2)\big) = \sup_{x \epsilon \mathbb{R}} \big\{\nu\big(x \big| PV(t_1, C_1)\big) \wedge \nu\big(x \big| PV(t_2, C_2)\big)\big\} \qquad (22)$$

Tak zdefiniowana przybliżona równoważność strumieni finansowych jest rozmytym uogólnieniem relacji równoważności. Interpretacją wartości (22) funkcji przynależności jest stopień, w jakim strumień finansowy (t_1, C_1) jest ekwiwalentem strumienia finansowego (t_2, C_2). Stopień ten zależy od czynników obiektywnych i behawioralnych. Poza wzajemnym przestrzennym położeniem strumieni finansowych, głównym czynnikiem obiektywnym są właściwe stopy procentowe rynków finansowych. Przykładami czynników behawioralnych są tutaj subiektywne postrzeganie rynków finansowych oraz fenomen konserwatyzmu poznawczego. Stosowanie rozmytej relacji równoważności (21) pozwala na uwzględnienie tych wszystkich bardzo odmiennych czynników poznawczych przy pomocy pojedynczego narzędzia analizy rynków finansowych. Poniżej podany zostanie jeden przykład takich zastosowań.

4. Rozmyty okres obrachunkowy

Okresem obrachunkowym nazywamy taki okres, w którym analizując przepływy finansowe możemy pominąć efekt aprecjacji kapitału. Wszystkie występujące w takim okresie strumienie finansowe o identycznej wartości nominalnej przepływów uważamy za równoważne. Do rejestracji i oceny poszczególnych równoważnych przepływów finansowych możemy stosować narzędzia rachunkowości finansowej. W Polsce ustawowy okres obrachunkowy trwa 12 kolejnych miesięcy.

[20] K. Nakamura: Preference Relations on A Set of Fuzzy Utilities As A Basis for Decision Making. „Fuzzy Sets and Systems" 1986, Vol. 20(2).

W warunkach inflacji, kiedy wzrastają także stopy rynków finansowych, równoważność wszystkich strumieni finansowych ujawniających się w ustawowym okresie obrachunkowym jest problematyczna. Zaleca się wtedy prowadzenie na własne zarządcze potrzeby dodatkowej rachunkowości finansowej dostosowanej do warunków inflacji. Metody te szeroko omawia S. Sojak[21]. Zaleca się tam m.in. wyznaczanie podokresów rachunkowych o długości dostosowanej do wysokości inflacji.

Przy opisie takiego okresu obrachunkowego zastosowanie może znaleźć opisana powyżej relacja $\approxeq$ przybliżonej równoważności strumieni finansowych.

Weźmy pod uwagę dowolną ustaloną wartość nominalną $C \in \mathbb{R}$. W początkowym momencie czasu $t_0 = 0$ okres obrachunkowy $\Delta(C)$ definiujemy, jako zbiór wszystkich momentów $t \epsilon \Theta$ takich, ze strumień finansowy (t, C) jest równoważny strumieniowi finansowemu $(0, C)$. Postępując w ten sposób postać okresu obrachunkowego uzależniamy od rozpatrywanej wartości nominalnej $C \in \mathbb{R}$. Jest to zgodne z wynikami eksperymentów poświęconych intuicyjnemu dyskontowaniu odroczonych wypłat. Te empiryczne badania stanowią jeden z nurtów poznawczych finansów behawioralnych[22].

Stosując relację $\approxeq$ przybliżonej równoważności strumieni finansowych, funkcję przynależności $\delta(\cdot\,|C)\epsilon[0;1]^{\Theta}$ okresu obrachunkowego $\Delta(C)$ definiujemy za pomocą tożsamości

$$\delta(t|C) = \varrho\big((0, C), (t, C)\big) \tag{23}$$

Korzystając teraz z zależności (7) i (22) ostatecznie otrzymujemy

$$\delta(t|C) = \sup_{x \epsilon \mathbb{R}}\big\{\nu(x|C) \wedge \nu\big(x\big|PV(t, C)\big)\big\} \tag{24}$$

Można wykazać, że warunek (18) jest warunkiem dostatecznym na to, aby funkcja przynależności $\delta(\cdot\,|C)$ była nierosnącą funkcją czasu. Jeśli teraz określimy minimalny akceptowany stopień $\alpha\epsilon[0;\ 1]$ równoważności strumieni finansowych, to maksymalnie długi okres obrachunkowy $\Delta(C)$ jest przedziałem

$$\Delta(C) = [0, T_\alpha(C)] \tag{25}$$

---

[21] S. Sojak: Rachunkowość finansowa w warunkach inflacji. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora", Warszawa 1996.

[22] W. Du, L. Green, J. Myerson: Cross-cultural Comparisons of Discounting Delayed and Probabilistic Rewards. „Psychological Record" 2002, Vol. 52; K.N. Kirby, M. Santiesteban: Concave Utility, Transaction Costs and Risk in Measuring Discounting of Delayed Rewards. „Journal of Experimental Psychology; Learning, Memory and Cognition" 2003, Vol. 29; M.K. Shelley: Outcome Signs, Question Frames and Discount Rates. Management Sciences 1993, Vol. 39.

gdzie

$$T_\alpha(C) = \sup_{t\epsilon\Theta}\left\{t\colon \sup_{x\epsilon\mathbb{R}}\{\nu(x|C) \wedge \nu(x|PV(t,C))\} = \alpha\right\} \tag{26}$$

W przypadku ograniczenia analizy strumieni finansowych do zastosowania jedynie nierozmytej relacji równoważności bylibyśmy pozbawieni możliwości przeprowadzenia takiej analizy.

5. Studium przypadku

Rozważamy dowolny ustalony zbiór $\Phi = \Theta \times \mathbb{R}$ przepływów finansowych. Dla ustalonego $C^* \in \mathbb{R}_0^+$ definiujemy funkcję $pv(\cdot\,|C^*)\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki

$$pv(0|C^*) = C^* \tag{26}$$

$$\forall t_1, t_2 \in \Theta\colon\ t_1 < t_2 \Longrightarrow pv(t_1|C^*) > pv(t_2|C^*) \tag{27}$$

Wartość $pv(t|C^*)$ interpretujemy, jako PV przepływu finansowego (t, C^*). W praktyce finansów wartość $pv(t|C^*)$ ustalamy, jako cenę rynkową instrumentu finansowego reprezentującego przepływu (t, C^*). Funkcja ta może pełnić funkcję punktu odniesienia do zdefiniowania PV dowolnego przepływu finansowego.

Dla dowolnego $\gamma \geq 0$ wartość bieżącą $PV(\cdot\,|\gamma)\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ definiujemy za pomocą tożsamości

$$PV(t, C|\gamma) = \frac{C}{C^*} \cdot \left|\frac{C}{C^*}\right|^{\frac{-\gamma\cdot t}{1+t}} \cdot pv(t|C^*) \tag{28}$$

Parametr $\gamma \geq 0$ może być interpretowana, jako współczynnik awersji do ryzyka obarczającego dowolnie późny przepływ finansowy. Bezpośrednio z warunków (26) i (27) wynika, że opisana powyżej funkcja spełnia (7) i (8). Stosując elementarny rachunek różnicowy można wykazać, że spełniony tutaj jest też warunek (12). Jednak dla $\gamma > 0$ nie jest spełniony warunek (10). Wszystko to oznacza, że zależność (28) opisuje funkcję PV niespełniającą warunku addytywności Peccatiego i równocześnie spełniającej pierwsze prawo Gossena. Szczegółowe uzasadnienie postaci funkcjonału (28) można znaleźć w pracy K. Piasecki[23]. W dalszych rozważaniach wartości funkcji (28) będą odgrywać rolę PPV.

[23] K. Piasecki: Wartość bieżąca a pierwsze prawo Gossena – studium przypadku (w druku).

Wielokrotnie, nawet w przypadku przepływu finansowego (t, C^*) trudno jest jednoznacznie określić jego PV. Z tej przyczyny, definiujemy funkcje $pv_*(\cdot\,|C^*): \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ i $pv^*(\cdot\,|C^*): \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki (26), (27) i

$$\forall t \in \Theta: \; pv_*(t|C^*) \leq pv(t|C^*) \leq pv^*(t|C^*) \tag{29}$$

Wartości $pv_*(t|C^*)$ i $pv^*(t|C^*)$ interpretujemy, jako odpowiednio oszacowania dolne i górne PV przepływu finansowego (t, C^*).

Oszacowania wartość bieżącej, dolne $PV_*(\cdot\,|\gamma): \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ i górne $PV^*(\cdot\,|\gamma): \Phi \longrightarrow \mathbb{R}$ definiujemy za pomocą tożsamości

$$PV_*(t, C|\gamma) = \frac{C}{C^*} \cdot \left|\frac{C}{C^*}\right|^{\frac{-\gamma \cdot t}{1+t}} \cdot pv_*(t|C^*) \tag{30}$$

$$PV^*(t, C|\gamma) = \frac{C}{C^*} \cdot \left|\frac{C}{C^*}\right|^{\frac{-\gamma \cdot t}{1+t}} \cdot pv^*(t|C^*) \tag{31}$$

EPV może przyjąć postać rozmytej liczby trójkątnej (Kuchta, 2000) o nośniku ograniczonym przez dolne i oszacowania PPV. Wtedy funkcja przynależności $\nu\big(\cdot\,\big|PV(t, C)\big) \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ zastosowana w (19) do określenia EPV przyjmuje postać

$$\nu\big(x\big|PV(t, C)\big) = \begin{cases} 0 & x \notin \,]PV_*(t, C|\gamma), PV^*(t, C|\gamma)[\\ \dfrac{x - PV_*(t, C|\gamma)}{PV(t, C|\gamma) - PV_*(t, C|\gamma)} & x \notin \,]PV_*(t, C|\gamma), PV(t, C|\gamma)[\\ 1 & x = PV(t, C|\gamma) \\ \dfrac{x - PV(t, C)}{PV^*(t, C|\gamma) - PV(t, C|\gamma)} & x \notin \,]PV(t, C|\gamma), PV^*(t, C|\gamma)[\end{cases} \tag{32}$$

Dla określenia stopnia zachodzenia relacji równoważności pomiędzy przepływami finansowymi (t_1, C_1) i (t_2, C_2) koniecznym jest wyznaczenie wartości

$$a_* = PV_*(t_1, C_1|\gamma), \quad a = PV(t_1, C_1|\gamma), \quad a^* = PV^*(t_1, C_1|\gamma)$$

$$b_* = PV_*(t_2, C_2|\gamma), \quad b = PV(t_2, C_2|\gamma), \quad b^* = PV^*(t_2, C_2|\gamma)$$

Funkcja przynależności $\varrho \in [0; 1]^{\Phi \times \Phi}$ relacji równoważności (21) jest wtedy określona następująco

$$\varrho\big((t_1, C_1), (t_2, C_2)\big) = \begin{cases} 0 &]a_*, a^*[\,\cap\,]b_*, b^*[\,= \emptyset \\ \dfrac{b^*a - a_*b^* - a_*a + a_*^2}{b^* - b + a - a_*} &]a_*, a^*[\,\cap\,]b_*, b^*[\,= \emptyset \wedge b < a \\ 1 & a = b \\ \dfrac{a^*b - b_*a^* - b_*b + b_*^2}{a^* - a + b - b_*} &]a_*, a^*[\,\cap\,]b_*, b^*[\,= \emptyset \wedge b > a \end{cases} \tag{33}$$

Z warunku (26) wnioskujemy, że EPV dowolnego bieżącego przepływu finansowego $(0, C)$ jest liczbą nierozmytą. Dzięki temu spostrzeżeniu funkcję przynależności $\delta(\cdot\,|C)\epsilon[0;1]^{\Theta}$ okresu obrachunkowego $\Delta(C)$ jest określona przez tożsamość

$$\delta(t|C) = \nu\big(C\big|PV(t,C)\big) \tag{34}$$

co pozwala nam zapisać

$$\delta(t|C) = \begin{cases} 0 & C \geq PV^*(t,C) \\ \dfrac{PV^*(t,C|\gamma) - C}{PV^*(t,C|\gamma) - PV(t,C|\gamma)} & C < PV^*(t,C) \end{cases} \tag{35}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\delta(t|C) = \begin{cases} 0 & C \geq PV^*(t,C) \\ \dfrac{pv^*(t|C^*) - C^*\left|\dfrac{C}{C^*}\right|^{\frac{\gamma\cdot t}{1+t}}}{pv^*(t|C^*) - pv(t|C^*)} & C < PV^*(t,C) \end{cases} \tag{36}$$

Dla założonego poziomu akceptacji $\alpha \in [0;1]$ długość $T_\alpha(C)$ okresu obrachunkowego $\Delta(C)$ jest jedynym pierwiastkiem równania

$$\frac{pv^*(t|C^*) - C^*\left|\dfrac{C}{C^*}\right|^{\frac{\gamma\cdot t}{1+t}}}{pv^*(t|C^*) - pv(t|C^*)} = \alpha \tag{37}$$

Podsumowanie

W artykule pokazano, że nieprecyzyjnie określona wartość bieżąca prowadzi wprost do zainicjowania rozmytej analizy przestrzeni strumieni finansowych. W ostatnim rozdziale pokazano, że takie uogólnienie klasycznego podejścia stworzą nowe możliwości aplikacyjne. To spostrzeżenie zachęca do podjęcia dalszych badań nad zaproponowanym uogólnieniem.

Z praktycznego punktu widzenia ciekawych wyników można tutaj oczekiwać po zastosowaniu explicite opisanych funkcji PV oraz explicite opisanych typów liczb rozmytych stosowanych do opisu szacunkowej wartości bieżącej.

Model nieprecyzyjnie określonego okresu obrachunkowego wymaga także dalszych badań empirycznych. Zgodnie z metodami badawczymi stosowanymi w finansach behawioralnych badania takie powinny być przeprowadzone w warunkach wysokiej inflacji.

Literatura

Barberis N., Shleifer A., Vishny R.: A Model of Investor Sentiment. „Journal of Financial Economics" 1998, Vol. 49.
Buckley I.J.: The Fuzzy Mathematics of Finance. „Fuzzy Sets and Systems" 1987, Vol. 21.
Calzi M.L.: Towards a General Setting for the Fuzzy Mathematics of Finance. „Fuzzy Sets and Systems" 1990, Vol. 35.
Dacey R., Zielonka P.: A Detailed Prospect Theory Explanation of the Disposition Effect. „Journal of Behavioral Finance" 2005, Vol. 2/4.
Dubois J., Prade H.: Fuzzy Real Algebra: Some Results. „Fuzzy Sets and Systems" 1979, Vol. 2.
Du W., Green L., Myerson J.: Cross-cultural Comparisons of Discounting Delayed and Probabilistic Rewards. „Psychological Record" 2002, Vol. 52.
Edwards W.: Conservatism in Human Information Processing. W: Formal Representation of Human Judgment. Red. B. Klienmutz. Wiley, New York 1968.
Greenhut J.G., Norman G., Temponi C.T.: Towards A Fuzzy Theory of Oligopolistic Competition. IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS 1995.
Gutierrez I.: Fuzzy Numbers and Net Present Value. „Scand. J. Mgmt" 1989, Vol. 5(2).
Huang X.: Two New Models for Portfolio Selection with Stochastic Returns Taking Fuzzy Information. „European Journal of Operational Research" 2007, Vol. 180(1).
Janssen J., Manca R., Volpe di Prignano E.: Mathematical Finance. Deterministic and Stochastic Models. John Wiley & Sons, London 2009.
Kirby K.N., Santiesteban M.: Concave Utility, Transaction Costs and Risk in Measuring Discounting of Delayed Rewards. „Journal of Experimental Psychology; Learning, Memory and Cognition" 2003, Vol. 29.
Kuchta D.: Fuzzy Capital Budgeting. „Fuzzy Sets and Systems" 2000, Vol. 111.
Lesage C.: Discounted Cash-flows Analysis. An Interactive Fuzzy Arithmetic Approach. „European Journal of Economic and Social Systems" 2001, Vol. 15(2).
Mises L. von: The Ultimate Foundation of Economic Science. An Essay on Method. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton 1962.
Nakamura K.: Preference Relations on A Set of Fuzzy Utilities As A Basis for Decision Making. „Fuzzy Sets and Systems" 1986, Vol. 20(2).
Peccati L.: Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell'attualizzazione. Studium Parmense, Parma 1972.
Piasecki K.: Modele matematyki finansowej. Instrumenty podstawowe. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
Piasecki K.: Behavioural Present Value. „Behavioral & Experimental Finance Journal" 2011, Vol. 4. http://ssrn.com/abstract=1729351.
Piasecki K.: Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych. UE, Poznań 2011.
Piasecki K.: Podstawy arytmetyki finansowej w świetle teorii użyteczności. Księga Jubileuszowa Profesora Edwarda Smagi. UE, Kraków 2012.
Piasecki K.: Basis of Financial Arithmetic from the Viewpoint of the Utility Theory. Operations Research and Decisions 2012, Vol. 3.

Piasecki K.: Wartość bieżąca a pierwsze prawo Gossena – studium przypadku (w druku).
Piasecki K., Ronka-Chmielowiec W.: Matematyka finansowa. C.H. Beck, Warszawa 2011.
Shelley M.K.: Outcome Signs, Question Frames and Discount Rates. Management Sciences 1993, Vol. 39.
Sojak S.: Rachunkowość finansowa w warunkach inflacji. Towarzystwo Naukowe Organizacji i Kierownictwa „Dom Organizatora", Warszawa 1996.
Tsao C.-T.: Assessing the Probabilistic Fuzzy Net Present Value for a Capital, Investment Choice Using Fuzzy Arithmetic. „J. of Chin. Ins. of Industrial Engineers" 2005, Vol. 22(2).
Ward T.L.: Discounted Fuzzy Cash Flow Analysis. 1985 Fall Industrial Engineering Conference Proceedings, 1985.

FUZZY RELATION ON CASH FLOW EQUIVALENCE

Summary

There are presented premises inducing to generalize the concept of cash flow equivalence to fuzzy case. As a result of taking these studies was obtained membership function of fuzzy relation of cash flow equivalence. Obtained model was applied for determine the length of accounting period used in conditions of high inflation.