

**Daniel Iskra**

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

# WARTOŚĆ ZAGROŻONA OPCJI EUROPEJSKICH SZACOWANA PRZEDZIAŁOWO. SYMULACJE

## Wprowadzenie

Jednym z aspektów współczesnej ekonomii jest zarządzanie ryzykiem związanym z prowadzoną inwestycją, czyli identyfikacja, pomiar oraz sterowanie ryzykiem. Przez ostatnie dziesięciolecia wprowadzono (proces ten cały czas się toczy) wiele miar potrafiących skwantyfikować wybrany rodzaj ryzyka. W przypadku ryzyka rynkowego jedną z popularniejszych miar ostatnich lat jest wartość zagrożona (wartość narażona na ryzyko, *Value at Risk – VaR*) [1; 4], która zostanie użyta w niniejszym opracowaniu.

Koncepcję wartości narażonej na ryzyko można zdefiniować następująco [6]: jest to miara określająca wielkość straty, której osiągnięcie lub przekroczenie w ustalonej chwili czasu  $t$  jest równe zadanemu z góry prawdopodobieństwu  $\alpha$  :

$$P(S_0 - S_t \geq VaR(\alpha, t)) = \alpha \quad (1)$$

gdzie:

$S_0, S_t$  – odpowiednio początkowa (deterministyczna) i końcowa (losowa) wartość procesu cen instrumentu,

$t$  – ustalony horyzont inwestycji,

$\alpha$  – ustalony poziom tolerancji (poziom istotności) dla szacowanej wartości  $VaR$ .

W celu wyznaczenia wartości zagrożonej danego instrumentu finansowego należy znać rozkład jego cen, co w praktyce najczęściej wiąże się z oszacowaniem parametrów wybranego rozkładu na podstawie próbki za pomocą odpowiednich estymatorów. Ze względu na fakt, iż estymatory (używane do estymacji parametrów rozkładu) są zmiennymi losowymi, ich oszacowana wartość zależy od próbki użytej w estymacji. Fakt ten można także wykorzystać do konstrukcji przedziałów ufności, które pokryją wartość zagrożoną z zadanym poziomem ufności [2; 3].

W celach poglądowych przeprowadzono symulacje, na podstawie których szacowano prognozę punktową wartości zagrożonej oraz wyznaczano przedział, który pokrywał wartość zagrożoną dla wybranej opcji kupna i sprzedaży na WIG20.

## 1. Model Blacka-Scholesa

Klasyczny model Blacka-Scholesa [5] jest jednym z najczęściej używanych modeli do wyceny opcji europejskich. Przy jego konstrukcji autorzy poczynili pewne założenia, m.in. takie, że dynamika cen instrumentu bazowego opisana jest geometrycznym ruchem Browna o stałych parametrach:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (2)$$

gdzie:

$S_t$  – wartość instrumentu,

$\mu$  – współczynnik dryfu,

$\sigma$  – współczynnik zmienności,

$dW_t$  – przyrost procesu Wienera,

$dt$  – przyrost czasu.

Rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego stochastycznego jest funkcja:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t} \quad (3)$$

gdzie:

$S_0$  – aktualna wartość instrumentu.

W swoich rozważaniach przyjęli także brak wszelkich kosztów transakcyjnych oraz podatków oraz że krótkoterminowa wolna od ryzyka stopa procentowa  $r$  jest stała.

Na podstawie powyższych założeń Black i Scholes wyprowadzili wzory na ceny europejskich opcji kupna [5]:

$$c = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2) \quad (4)$$

oraz opcji sprzedaży:

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \quad (5)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sqrt{\sigma^2 T}} \quad (6)$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma^2 T} \quad (7)$$

gdzie:

$N(d)$  – dystrybuanta standaryzowanej zmiennej o rozkładzie normalnym,

$S_0$  – cena akcji w chwili  $t = 0$ ,

$T$  – czas pozostający do wygaśnięcia kontraktu,

$X$  – cena wykonania opcji,

$r$  – intensywność oprocentowania.

## Symulacje

Zgodnie z definicją, aby wyznaczyć wartość zagrożoną opcji dla horyzontu  $t$  musimy znać jej wartość początkową, która zależy od oszacowanego parametru  $\sigma$  i wartości  $S_0, X, T, r$  (w pracy zakładano, że stopa  $r$  jest znana) oraz znać rozkład wartości opcji w chwili  $t$ . Rozkład ten jest powiązany z rozkładem zmiennej losowej, jaką jest cena instrumentu bazowego  $S_t$ . Do wyznaczenia prognozy punktowej wartości zagrożonej opcji za pomocą symulacji należy zatem wyestymować parametry  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$  i  $\sigma$  geometrycznego ruchu Browna.

Na ich podstawie wygenerować rozkład ceny instrumentu bazowego na chwilę  $t$ , a następnie wyznaczyć cenę początkową opcji w czasie  $t=0$  i rozkład ceny opcji w czasie  $t$ .

W przypadku dynamiki cen instrumentu bazowego opisanej geometrycznym ruchem Browna, logarytmiczne stopy zwrotu o okresie  $\Delta t$  mają rozkład normalny:

$$N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right) \quad (8)$$

Wykorzystując metodę momentów można wyznaczyć wzory na estymatory  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$  i  $\sigma^2$ :

$$\begin{cases} \sigma^2 \Delta t = D^2(\ln(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t})) \\ (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t = E(\ln(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t})) \end{cases} \quad (9)$$

W tym celu należy podstawić do powyższego układu równań wzory na estymatory wartości oczekiwanej  $E(\ln(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}))$  i wariancji  $D^2(\ln(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}))$  rozkładu normalnego logarytmicznych stóp zwrotu.

Należy podkreślić, że w rzeczywistości wartość oczekiwana czy wariancja rozkładu nie jest zmienną losową, podobnie jak sama wartość zagrożona wielkości te są deterministyczne. W praktyce jednak nie znamy ich prawdziwych wartości, a jedynie je oszacowujemy z pewnym błędem estymacji. Aby uwzględnić opisywaną niepewność będzie wyznaczany przedział ufności, który pokryje wartość zagrożoną z zadaniem poziomem ufności. Przedział ten, podobnie jak w przypadku prognozy punktowej również będzie wyznaczany symulacyjnie.

Dla rozkładu normalnego  $N(E(X), D(X))$  nieobciążone estymatory wariancji oraz wartości oczekiwanej są niezależne i powiązane ze zmiennymi losowymi [7]:

$$H = \frac{(n-1)\hat{D}^2(X)}{D^2(X)} \quad (10)$$

$$T = \frac{(\hat{E}(X) - E(X))\sqrt{n-1}}{\hat{D}(X)} \quad (11)$$

gdzie:

$H$  – zmienna o rozkładzie chi-kwadrat z  $n-1$  stopniami swobody,

$T$  – zmienna o rozkładzie t-Studenta z  $n-1$  stopniami swobody,

$n$  – liczebność próbki.

Jak już wcześniej zaznaczono, wielkości  $\sigma^2$  i  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$  nie są zmiennymi losowymi, dlatego wprowadzono zmienne losowe  $(\sigma^2)^*$ ,  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^*$ , których rozkłady powinny pokryć odpowiednio opisywane wielkości.

Na podstawie wzorów (9), (10) i (11) można wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych  $(\sigma^2)^*$ ,  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^*$  (pod warunkiem, że znane są wielkości  $\hat{E}(X)$ ,  $\hat{D}^2(X)$ ):

$$(\sigma^2)^* = D^2(X) \frac{1}{dt} = \frac{(n-1)\hat{D}^2(X)}{H} \frac{1}{dt} \quad (12)$$

$$(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^* = E(X) \frac{1}{dt} = (\hat{E}(X) - \frac{T\hat{D}(X)}{\sqrt{n-1}}) \frac{1}{dt} \quad (13)$$

gdzie:

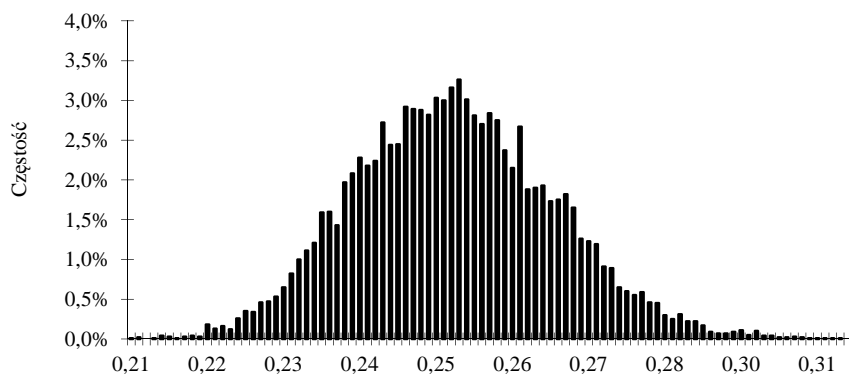
$\hat{E}(X)$ ,  $\hat{D}^2(X)$  – wyestymowane wielkości wartości oczekiwanej i wariancji,  
 $H$ ,  $T$  – zmienne losowe o rozkładzie chi-kwadrat i  $t$ -Studenta, oba z  $n-1$  stopniami swobody.

Wygenerowane rozkłady zmiennych  $(\sigma^2)^*$  oraz  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)^*$  (na podstawie wzorów (12) i (13)) pokryją odpowiednio ich prawdziwe wartości.

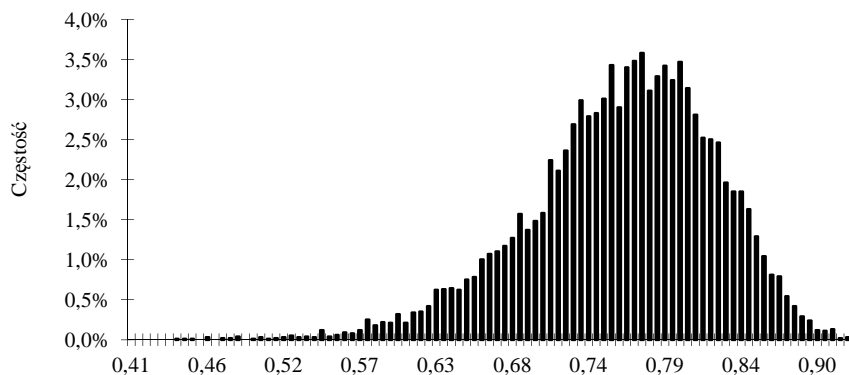
Dla prognozy punktowej rozkład zmiennej  $S_t$  generowano na podstawie 10 000 realizacji, estymując wcześniej parametry  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$  i  $\sigma^2$  ze 100 jednodniowych logarytmicznych stóp zwrotu (por. wzór (9)). W przypadku prognozy przedziałowej parametry  $\sigma^2$  i  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$  wyznaczano na podstawie 10 000 losowych realizacji zmiennej  $H$  oraz  $T$  (por. wzory (11) i (12)), a następnie dla każdej z 10 000 par tych parametrów generowano rozkład  $S_t$  również na podstawie 10 000 losowych realizacji (na podstawie wzoru (3)). Wartość oczekiwaną i wariancję logarytmicznych stóp zwrotu estymowano na podstawie próbki stuelementowej, natomiast stopę  $r$  obliczano jako średnią ważoną stóp WIBOR (wagi były ilorzem okresu stopy do czasu wygaśnięcia opcji).

Na rys. 1 i 2 przedstawiono histogramy zmiennej opisującej jednodniową oraz 15-dniową względną wartość zagrożoną (wartość zagrożoną w stosunku do początkowej wartości opcji:  $\frac{VaR}{P_0}$ , która będzie nazywana także  $wzVaR$ , do-

datnia wartość oznacza spadek wartości opcji) opcji OW20U1250. Jest to opcja sprzedaży na WIG20 o dacie zapadalności na wrzesień 2011 r. i wartości wykonania 2500. Poziom tolerancji  $VaR$  ustalono jako  $\alpha = 0,05$ . Stopa procentowa  $r = 0,04$ . Rozkłady generowano na dzień 30.03.2011 r., zatem przedziały odczytane z wygenerowanych rozkładów jako  $[Q_{0,025}; Q_{0,975}]$ , ( $Q_p$  – kwantyl rzędu  $p$ ) powinny pokryć wartość zagrożoną odpowiednio na dzień następny i na 15 dni z poziomem ufności 0,95.



Rys. 1. Histogram względnej jednodniowej wartości zagrożonej

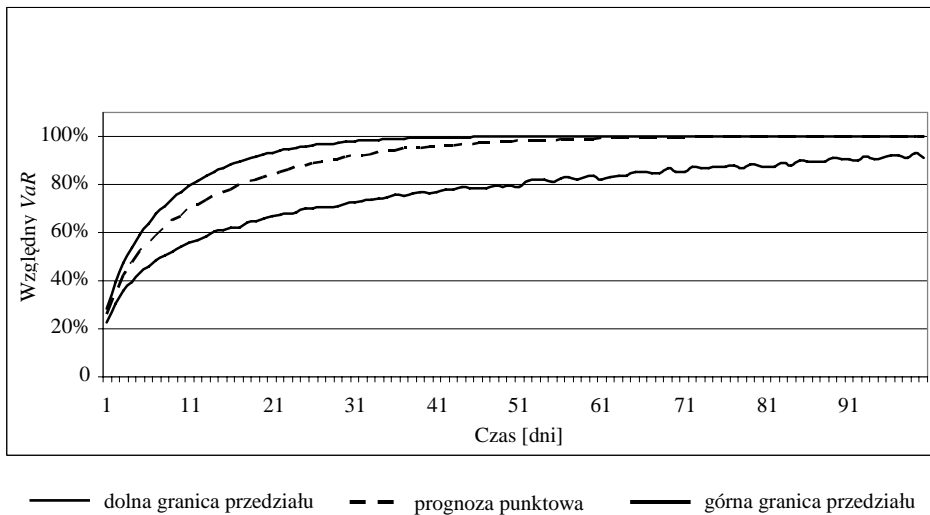


Rys. 2. Histogram względnej 15-dniowej wartości zagrożonej

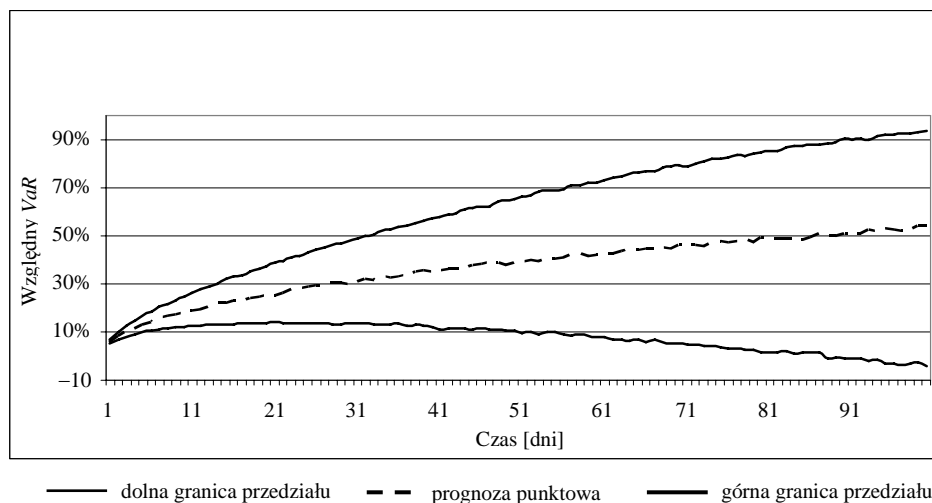
W przypadku jednodniowej wartości zagrożonej odczytany przedział [0,23; 0,28] powinien pokryć wartość zagrożoną opcji z poziomem ufności 0,95. Jednodniowa prognoza punktowa wyniosła 0,26 (w tym przypadku parametry  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$  i  $\sigma^2$  wynoszą odpowiednio (co do zaokrąglenia) 0,07 i 0,02 w skali roku). Rozpiętość przedziału ufności w stosunku do prognozy punktowej jest równa 22%.

Dla prognozy 15-dniowej odczytany przedział to [0,61; 0,87], prognoza punktowa 0,78 (parametry nie ulegają zmianie), natomiast rozpiętość tego przedziału do prognozy punktowej jest równa 33%. Jak można zauważyć, w tym przypadku, stawiając prognozę punktową można się pomylić nawet o 15% jej wartości w wyniku błędu estymacji parametrów modelu.

Poniżej przedstawiono wykres  $wzVaR$  o coraz dłuższym horyzoncie  $VaR$  dla opcji sprzedaży OW20U1250 oraz opcji kupna OW20I1230 wyznaczanego w dacie 30.03.2011 r. (opcje na WIG20). Począwszy od  $wzVaR$  jednodniowego skończywszy na  $wzVaR$  100-dniowym. Poziom tolerancji wartości zagrożonej był równy  $\alpha = 0,05$ . Przedziały pokrywały względną wartość zagrożoną z poziomem ufności 0,95.



Rys. 3. Prognozy względnej wartości zagrożonej dla opcji OW20U1250 (opcja sprzedaży na WIG20 z terminem wykonania we wrześniu 2011 r. i wartością wykonania 2500)

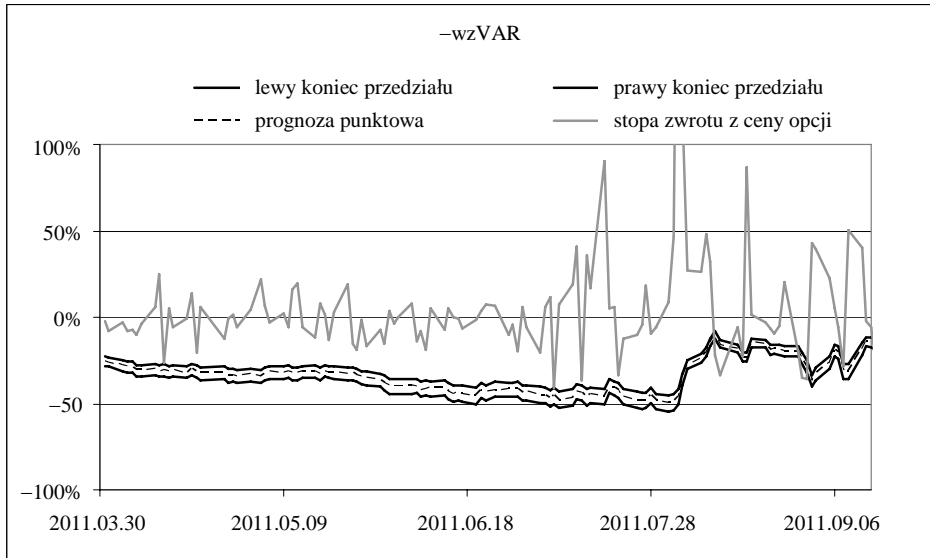


Rys. 4. Prognozy względnej wartości zagrożonej dla opcji OW20I1230 (opcja kupna na WIG20 z terminem wykonania we wrześniu 2011 r. i wartością wykonania 2300)

Na wykresach można obserwować, jak zmienia się prognoza punktowa wartości zagrożonej wraz z wydłużaniem się czasu, dla którego była wyznaczana oraz jaki wpływ na dokładność szacowania ma estymacja parametrów modelu. Wraz z wydłużaniem się horyzontu wartości zagrożonej zwiększa się rozpiętość jej przedziału ufności aż górna granica osiągnie poziom 100%. Dla odpowiednio długiego horyzontu wartości zagrożonej dolna granica przedziału ufności też będzie dążyć do 100% w przypadku opcji sprzedaży i do 0 w przypadku opcji kupna. Taka sytuacja wynika z faktu, że wraz z wydłużaniem czasu do wygaśnięcia opcji prawdopodobieństwo, że wartość indeksu w dacie wykonania będzie w przedziale  $[0; X]$  zmierza do zera (dla parametrów estymowanych na dzień 30.03.2011 r.).

Na kolejnym rysunku przedstawiono wyniki symulacji, w wyniku której szacowano jednodniowe względne wartości zagrożone z poziomem tolerancji 0,05 zarówno dla prognozy przedziałowej, jak i punktowej. Symulacje przeprowadzono dla opcji OW20U1250 zmniejszając za każdym razem czas pozostały do jej wygaśnięcia o jeden dzień. Względne wartości zagrożone porównano z realnymi cenami tej opcji, a dokładniej z ich stopami zwrotu. Pamiętając, że dodatnia wartość zagrożona oznacza spadek ceny opcji, na wykresie przedstawiono względne wartości zagrożone przemnożone przez (-1) (oznaczymy tę wartość jako  $wzVaR$ ).





Rys. 5. Jednodniowe prognozy wartości zagrożonej

Minimalna zaobserwowana rozpiętość przedziału ufnosci w stosunku do prognozy punktowej  $wzVaR$  dla tego samego dnia wyniosła około 18%, maksymalna około 40%. Średnia rozpiętość przedziału ufnosci w stosunku do prognozy punktowej jest równa 23,3%, natomiast odchylenie standardowe około 5%. Widać zatem, że prognoza punktowa względnej wartości zagrożonej może w niektórych przypadkach znacznie różnić się od wartości realnej.

## Podsumowanie

W przypadku prognoz punktowych wartości zagrożonej szansa na jej bezbłędne oszacowanie jest znikoma (dokładniej równa 0). Oczywiście błąd estymacji może być tak mały, że różnice pomiędzy wyznaczoną a rzeczywistą wartością zagrożoną będą nieistotne i taka prognoza będzie skuteczna. Istnieje jednak alternatywa w postaci estymacji przedziałowej, w której można wyznaczyć przedział pokrywający wartość zagrożoną z góry zadany poziom ufnosci. W opracowaniu przedstawiono próbę wyznaczania wartości zagrożonej wybranych opcji europejskich na WIG20 za pomocą symulacji. Na ich podstawie można zaobserwować, jak zmienia się rozpiętość prognoz przedziałowych w czasie, czy też w zależności od horyzontu wartości zagrożonej. W bardzo prosty sposób obrazują one, jakie błędy mogą wystąpić podczas estymacji punktowej wartości zagrożonej.

## Literatura

1. Alexander C., *Market Risk Analysis: Value at Risk Models*, Vol. IV, John Wiley & Sons, England 2008.
2. Contreras P., Satchell S., *A Bayesian Confidence Interval for Value-at-Risk* 2003, <http://www.dspace.cam.ac.uk/handle/1810/380>
3. Dowd K., *Assessing VaR Accuracy*, 2000 <http://www.smartquant.com/references/VaR/var14.pdf>
4. Holton G.A., *Value at Risk. Theory and Practice*, Academic Press, USA 2003,
5. Hull J., *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG-PRESS, Warszawa 1999.
6. Jorion P., *Value at risk: the new benchmark for managing financial risk*, McGraw-Hill 2001.
7. Sobczyk M., *Statystyka. Aspekty praktyczne i teoretyczne*, UMCS, Lublin 2006.

## VaR ESTIMATED INTERVAL EUROPEAN OPTIONS. SIMULATIONS

### Summary

This paper presents a procedure for determining the value at risk ranges covering European options with a given level of confidence. Interval forecast VaR takes into account the uncertainty associated with the estimation error of the model parameters used. Option pricing model adapted Black-Sholes, and studies based on simulations.