Krzysztof Piasecki
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej
Katedra Badań Operacyjnych
k.piasecki@ue.poznan.pl

DYSKONTO A AWERSJA DO RYZYKA UTRATY PŁYNNOŚCI

Streszczenie: Wartość bieżąca jest rozważana jako użyteczność strumienia finansowego. Dzięki temu można było określić, w jaki sposób awersja do ryzyka utraty płynności wpływa na stopę dyskonta. Otrzymany model został zastosowany w finansach behawioralnych.

Słowa kluczowe: awersja do ryzyka, dyskonto, finanse behawioralne, paradoks równowagi rynkowej, silnie efektywne rynki finansowe, użyteczność, wartość bieżąca.

Wprowadzenie

W klasycznych modelach arytmetyki finansowej dyskonto zależy od horyzontu czasowego inwestycji i prędkości aprecjacji kapitału, mierzonej przy pomocy nominalnej stopy procentowej. Każdorazowo dyskonto jest określane jako wartość bieżąca przyszłego przepływu finansowego. Wartość ta jest obarczona m.in. ryzykiem terminowym. Ryzyko to jest identyfikowane z ryzykiem utraty płynności implikowanym przez wydłużanie się horyzontu czasowego inwestycji. Koszt tego ryzyka zmniejsza wartość bieżącą ocenianego przepływu. Oznacza to, że wartość dyskonta jest implikowana przez ryzyko terminu. W tej sytuacji nie można nie wykluczyć tego, że na ocenę wartości dyskonta ma także wpływ podatność oceniającego na ryzyko. Każda metoda dyskontowania jest określona poprzez przebieg zmienności założonego modelu aprecjacji kapitału. Celem tej pracy jest konstrukcja takich modeli dyskontowania, które uwzględniają wpływ awersji do ryzyka na aprecjację kapitału. Przedstawiona też zostanie propozycja wykorzystania tych modeli w finansach behawioralnych.

1. Elementy teorii użyteczności strumienia finansowego

W analizie rynków finansowych każda z płatności jest reprezentowana przez instrument finansowy opisany jako strumień finansowy (t, C), gdzie symbol t oznacza moment przepływu strumienia, natomiast symbol C opisuje wartość nominalną tego przepływu. Każdy z tych strumieni finansowych może być należnością lub wymaganym zobowiązaniem. Wartość nominalna każdej należności jest nieujemna. Zobowiązania obciążające dłużnika stanowią zawsze należność wierzyciela. Wartość zobowiązania jest równa wziętej ze znakiem minus wartości należności odpowiadającej temu zobowiązaniu.

Dalsze rozważania ograniczono do zbioru $\Phi = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ wszystkich strumieni finansowych (t, C) opisujących poszczególne wypłaty z tytułu zbycia praw do kapitału. Na zbiorze tych wypłat każdy z inwestorów określa swoje preferencje przy pomocy specyficznej funkcji użyteczności $U: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. Każda z tych funkcji może mieć subiektywny charakter [Dacey, Zielonka, 2005]. W Piasecki [2012] pokazano, że szczególnym przypadkiem takiej użyteczności jest wartość bieżąca $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, zdefiniowana przez Peccatiego [1972] jako dowolna funkcja, spełniająca warunki:

$$\forall_{C \in \mathbb{R}_0^+}: PV(0, C) = C, \tag{1}$$

$$\forall_{C \in \mathbb{R}_0^+}: t_2 > t_1 \geq 0 \Rightarrow PV(t_2, C) < PV(t_1, C)\ , \tag{2}$$

$$\forall_{C_1, C_2 \in \mathbb{R}_0^+}: PV(t, C_1 + C_2) = PV(t, C_1) + PV(t, C_2)\ . \tag{3}$$

Wartość bieżąca dowolnego strumienia finansowego jest identyczna z jego użytecznością. Stwierdzenie to w pełni wyjaśnia istotę pojęcia wartości bieżącej. Z drugiej strony taka identyfikacja wartości bieżącej rodzi pewne wnioski formalne, o których będzie mowa później.

W Piasecki [2007] pokazano, że koniunkcja warunków (1), (2) i (3) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dowolna funkcja wartości bieżącej $PV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ była określona przez tożsamość:

$$PV(t, C) = C \cdot v(t), \tag{4}$$

gdzie czynnik dyskontujący jest nierosnącą funkcją czasu, spełniającą dodatkowo warunek brzegowy:

$$v(0) = 1. \tag{5}$$

Proces aprecjacji kapitału jest wtedy opisany za pomocą wartości przyszłej $FV: \Phi \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, określonej jednoznacznie przez tożsamość:

$$PV\big(t, FV(t, C)\big) = C. \tag{6}$$

Porównanie warunków (4), (5) i (6) dowodzi, że dowolna funkcja wartości przyszłej $FV\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ jest określona przez tożsamość:

$$FV(t, C) = C \cdot s(t), \tag{7}$$

gdzie czynnik aprecjacji $s\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow [1, +\infty[$ jest niemalejącą funkcją, spełniającą dodatkowo warunek brzegowy:

$$s(0) = 1\ . \tag{8}$$

Czynniki aprecjacji i dyskontowanie wyznaczone przez tą samą funkcję wartości bieżącej spełniają warunek:

$$v(t) = \left(s(t)\right)^{-1}\ . \tag{9}$$

2. Użyteczność kapitału w przypadku kapitalizacji ciągłej

Ze zjawiskiem kapitalizacji ciągłej mamy do czynienia jedynie wtedy, kiedy nominalna stopa procentowa opisuje prędkość aprecjacji. Przystępując do wyznaczenia przebiegu zmienności funkcji wartości przyszłej $FV\colon \Phi \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, wyznaczamy dla dowolnego momentu $t \geq 0$ i dowolnej zadanej długości $\Delta t > 0$ okresu odroczenia ekwiwalenty $C(t)$ i $C(t + \Delta t)$ tej samej wartości bieżącej kapitału C_0. Wtedy momentowi czasu $t \geq 0$ jest przypisana stopa forward:

$$p_{\Delta t}(t) = \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t \cdot C(t)}. \tag{10}$$

Zgodnie z tym, trend ekwiwalentu wartości kapitału spełnia warunek Lipschitza, a więc jest jednostajnie ciągły. Dodatkowo założono, że trend jest dostatecznie gładki[1], co oznacza, że zmiany prędkości aprecjacji kapitału nie będą się odbywały skokowo.

Chwilową bieżącą stopę forward zdefiniowano jako bieżącą stopę forward obligacji zerokuponowej[2] o horyzoncie wymagalności $\Delta t \longrightarrow 0$ [Siegel, Nelson, 1987]. W tej sytuacji w naszych rozważaniach chwilową stopę forward będziemy interpretować jako chwilową względną prędkość aprecjacji kapitału. Zmierzając do wyznaczenia tej stopy, wyznaczamy granicę:

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} p_{\Delta t}\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t \cdot C(t)} = \frac{1}{C(t)}\frac{dC}{dt} = \delta(t)\ . \tag{11}$$

[1] Oznacza to istnienie ciągłej pierwszej pochodnej rozważanej funkcji.

[2] Bieżącą stopę forward obligacji zerokuponowej wyznaczamy za pomocą zależności (10) dla $t = 0$.

W literaturze przedmiotu[3] granicę $\delta(t)$ nazywa się także intensywnością oprocentowania. Jest ona identyczna ze stopą wzrostu wyznaczoną dla trendu opisującego proces aprecjacji kapitału.

Warunki (1), (6) i (11) prowadzą do określenia zagadnienia początkowego:

$$\begin{cases} \frac{1}{C(t)} \cdot \frac{dC}{dt} = \delta(t) \\ C(0) = C_0 \end{cases} . \tag{12}$$

Rozwiązanie tego zagadnienia pozwala na jednoznaczne określenie trendu wartości przyszłej wartości skapitalizowanej ciągle:

$$C(t) = FV(t, C_0) = C_0 \cdot exp\left\{\int_0^t \delta(\tau) d\tau\right\} . \tag{13}$$

Wtedy, dzięki (12) i (15), użyteczność dowolnego strumienia finansowego (t, C) jest określona przy pomocy tożsamości:

$$U(t, C) = PV(t, C) = C \cdot exp\left\{- \int_0^t \delta(\tau) d\tau\right\} = C \cdot v(t) . \tag{14}$$

3. Zależność użyteczności strumienia finansowego od awersji do ryzyka

Wzrost ryzyka utraty płynności implikuje ograniczenie wzrostu ceny jednostkowej kapitału wywołanego opóźnieniem momentu wymagalności. Oznacza to, że dla ustalonej wartości kapitału $C > 0$ spadek trendu $PV(\cdot, C)$ jest ograniczony przez awersję do ryzyka. Nie mając dokładniejszych informacji o rozkładzie tej awersji, założono, że jest ona niezależna od horyzontu czasowego inwestycji. Oznacza to, że natężenie tej awersji jest stałe w czasie. Stosując miarę Arrowa–Pratta awersji do ryzyka [Arrow, 1971; Pratt, 1964], założenie to opisujemy przy pomocy warunku:

$$\exists_{\gamma > 0} : - \frac{\frac{\partial^2 PV(t,C)}{\partial t^2}}{\frac{\partial PV(t,C)}{\partial t}} = - \frac{v''(t)}{v'(t)} = \gamma . \tag{15}$$

Z zależności (14) otrzymujemy:

$$v'(t) = - v(t) \cdot \delta(t), \tag{16}$$

$$v''(t) = -v'(t) \cdot \delta(t) - v(t) \cdot \delta'(t), \tag{17}$$

[3] Np. [Chrzan, 2001].

co razem z (15) daje równanie różniczkowe:

$$-\frac{-v'(t)\cdot\delta(t)-v(t)\cdot\delta'(t)}{-v(t)\cdot\delta(t)}=-\frac{v'(t)}{v(t)}-\frac{\delta'(t)}{\delta(t)}=\delta(t)-\frac{\delta'(t)}{\delta(t)}=\gamma. \qquad (18)$$

Dodatkowo mamy tutaj warunek bieżącej chwilowej stopy forward:

$$\delta(0)=p_0, \qquad (19)$$

gdzie p_0 jest bieżącą chwilową stopą forward. U Svennsona [1994] stopa ta jest identyfikowana z bieżącą stopą O/N. Rozwiązaniem zagadnienia początkowego (18) i (19) jest funkcja:

$$\delta(t)=\frac{\gamma\cdot p_0}{(\gamma-p_0)\cdot\exp\{\gamma\cdot t\}+p_0}\,. \qquad (20)$$

W tej sytuacji, zgodnie z zależnością (20), wartość przyszła jest określona przy pomocy tożsamości:

$$PV_1\big((t,C)\big|\gamma\big)=C\cdot\gamma^{-1}\cdot\big(p_0\cdot exp\{-\gamma\cdot t\}+(\gamma-p_0)\big)\,. \qquad (21)$$

Funkcja ta może zostać wykorzystana do zdyskontowania wartości przyszłego przepływu finansowego (t,C). Stopa dyskonta wynosi wtedy:

$$D_1(t,\gamma)=\frac{C-C\cdot\gamma^{-1}\cdot\big(p_0\cdot exp\{-\gamma\cdot t\}+(\gamma-p_0)\big)}{C}=$$
$$=1-\gamma^{-1}\cdot\big(p_0\cdot exp\{-\gamma\cdot t\}+(\gamma-p_0)\big). \qquad (22)$$

W elementarny sposób[4] można wykazać, że wyznaczona powyżej stopa dyskonta jest rosnącą funkcją miary awersji do ryzyka.

4. Zależność stopy spot od awersji do ryzyka

Jednostkowa cena kapitału wymagalnego w przyszłym momencie $t>0$ jest określona przez stopę spot $y(t)$. W przypadku kapitalizacji ciągłej, mamy wtedy:

$$PV(t,C)=C\cdot exp\{-t\cdot y(t)\}\,. \qquad (23)$$

Porównanie tożsamości (20) i (23) dowodzi, że trend stopy spot ma ciągłą pierwszą pochodną.

Opóźnienie terminu wymagalności kapitału oznacza wzrost ryzyka utraty płynności, który inwestor kompensuje sobie wzrostem jednostkowej ceny kapi-

[4] Wystarczy zauważyć, że wraz ze wzrostem miary awersji do ryzyka maleje licznik odjemnika i równocześnie rośnie mianownik odjemnika. Dzięki temu stwierdzamy, że wraz ze wzrostem miary ryzyka maleje odjemnik, co ostatecznie wywołuje wzrost wartości różnicy (22).

tału. Oznacza to, że trend stopy spot $y: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ jest funkcją rosnącą. Teoria finansów pokazuje też, że dowolna stopa spot spełnia dwa kryteria asymptotyczne. Pierwszym z tych kryteriów jest warunek renty wieczystej:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = p_\infty, \tag{24}$$

gdzie p_∞ jest stopą renty wieczystej. Kolejnym kryterium jest warunek bieżącej chwilowej stopy natychmiastowej:

$$\lim_{t\to 0^+} y(t) = p_0, \tag{25}$$

gdyż bieżąca chwilowa stopa forward p_0 zawsze jest równa chwilowej stopie spot. Wobec monotoniczności trendu stopy spot, mamy:

$$p_0 < p_\infty. \tag{26}$$

Jednostkową cenę kapitału można traktować jako użyteczność przyszłego przepływu finansowego. Wzrost ryzyka utraty płynności implikuje ograniczenie wzrostu ceny jednostkowej kapitału wywołanego opóźnieniem momentu wymagalności. Oznacza to, że wzrost trendu stopy spot jest ograniczony przez awersję do ryzyka. Podobnie jak powyżej, założono, że natężenie tej awersji jest stałe w czasie. Stosując miarę Arrowa–Pratta awersji do ryzyka, założenie to opisujemy przy pomocy warunku:

$$\exists_{\rho>0} : -\frac{y''(t)}{y'(t)} = \rho\ . \tag{27}$$

Dodatkowo założono ciągłość drugiej pochodnej trendu stopy spot. Jedynym rozwiązaniem zadania (24), (25) i (27) jest trend określony przez tożsamość:

$$y(t,\rho) = p_\infty - (p_\infty - p_0) \cdot exp\{-\rho \cdot t\}. \tag{28}$$

Tak określona stopa spot jest malejącą funkcją miary awersji do ryzyka. Z punktu widzenia finansów oznacza to, że wzrost awersji do ryzyka wywołuje spadek ceny jednostkowej kapitału. Zgodnie z zależnością (23), wartość przyszła jest określona przy pomocy tożsamości:

$$PV_2\big((t,C)\big|\rho\big) = C \cdot exp\big\{t \cdot \big((p_\infty - p_0) \cdot exp\{-\rho \cdot t\} - p_\infty\big)\big\}\ . \tag{29}$$

Funkcja ta może zostać wykorzystana do zdyskontowania wartości przyszłego przepływu finansowego (t, C). Stopa dyskonta wynosi wtedy:

$$D_2(t,\rho) = \frac{C - C \cdot exp\big\{t \cdot \big((p_\infty - p_0) \cdot exp\{-\rho \cdot t\} - p_\infty\big)\big\}}{C} =$$
$$= 1 - exp\big\{t \cdot \big((p_\infty - p_0) \cdot exp\{-\rho \cdot t\} - p_\infty\big)\big\}. \tag{30}$$

W elementarny sposób można wykazać, że wyznaczona powyżej stopa dyskonta jest rosnącą funkcją miary awersji do ryzyka.

5. Zróżnicowana awersja do ryzyka jako przesłanka równowagi rynkowej

W sytuacji gdy awersja do ryzyka jest indywidualną cechą każdego z inwestorów, opisane powyżej modele mogą być wykorzystane do budowy formalnych modeli finansów behawioralnych. W modelu tym obiektywne czynniki fundamentalne są reprezentowane przez wartości p_0 i p_∞ opisanych powyżej stóp procentowych.

Weźmy pod uwagę dowolny papier wartościowy $\mathcal{Y}$ stanowiący przedmiot obrotu na ustalonym rynku finansowym. O rozważanym rynku finansowym będziemy zakładać, że jest silnie efektywny. W tej sytuacji, dla każdego przyszłego momentu czasowego wszyscy uczestnicy rynku antycypują identyczną wartość przyszłą danego papieru wartościowego. W momencie czasowym $t > 0$ instrument ten jest reprezentowany przez strumień finansowy (t, C), gdzie $C > 0$ jest antycypowaną dla tego momentu wartością przyszłą. Wartość bieżąca tego strumienia jest identyfikowana przez inwestora jako cena równowagi finansowej instrumentu finansowego $\mathcal{Y}$.

Rozważmy teraz parę inwestorów $(\mathcal{P}_{1,}, \mathcal{P}_2)$ różniących się pomiędzy sobą jedynie awersją do ryzyka. W tym punkcie miara awersji do ryzyka α będzie oznaczała miarę γ opisaną w punkcie 3 lub miarę ρ opisaną w punkcie 4. Awersja do ryzyka inwestora $\mathcal{P}_i$ jest scharakteryzowana przez miarę awersji do ryzyka o wartości α_i. Załóżmy teraz, że inwestor $\mathcal{P}_1$ charakteryzuje się większą awersją do ryzyka niż inwestor $\mathcal{P}_2$. Mamy wtedy

$$\alpha_1 > \alpha_2, \tag{31}$$

co prowadzi ostatecznie do:

$$C_{0,1} = PV\big((t, C)\big|\alpha_1\big) < PV\big((t, C)\big|\alpha_2\big) = C_{0,2}. \tag{32}$$

Widzimy, że częściowo subiektywnie szacowana cena równowagi maleje wraz ze wzrostem awersji do ryzyka.

Oboje inwestorzy obserwują tę samą wartość $\check{C}$ ceny rynkowej. Jeśli wartość ta będzie spełniać warunek:

$$C_{0,1} < \check{C} < C_{0,2}, \tag{33}$$

to wtedy inwestor $\mathcal{P}_1$ zamierza sprzedać instrument finansowy $\mathcal{Y}$. Równocześnie ten sam instrument planuje kupić inwestor $\mathcal{P}_2$. Popyt na instrument finansowy $\mathcal{Y}$ zgłaszany przez inwestora $\mathcal{P}_2$ jest równoważony przez podaż instrumentu $\mathcal{Y}$ oferowaną przez inwestora $\mathcal{P}_1$.

Podsumowanie

Nierówność (33) i jej interpretacja wyjaśniają paradoks utrzymywania się równowagi rynkowej na silnie efektywnym rynku finansowym. W artykule w formalny sposób wykazano, że przesłanką do wyjaśnienia tego paradoksu może być zróżnicowanie awersji poszczególnych inwestorów do ryzyka. Dodatkowo warto zauważyć, że popyt zgłaszany przez inwestora o mniejszej awersji do ryzyka zawsze jest zaspakajany przez podaż zgłaszaną przez inwestora o większej awersji do ryzyka. Wniosek ten sugeruje, że na silnie efektywnych rynkach finansowych kapitał koncentruje się w rękach inwestorów charakteryzujących się dużą skłonnością do ryzyka. Wniosek ten jest swoistym komentarzem do obserwowanego w tej chwili globalnego kryzysu finansowego, gdyż jednej z przyczyn kryzysu jego komentatorzy dopatrują się w powszechnym stosowaniu wysoce ryzykownych instrumentów finansowych.

Stworzenie możliwości wysnucia takich wniosków w pełni dowodzi przydatności skonstruowanych w tej pracy modeli dyskontowania.

Literatura

Arrow K.J. (1971), *Essays in the Theory of Risk-bearing*, North-Holland Pub., Amsterdam.

Chrzan P. (2001), *Matematyka finansowa. Podstawy teorii procentu*, Oikonomos, Katowice.

Dacey R., Zielonka P. (2005), *A Detailed Prospect Theory Explanation of the Disposition Effect*, „Journal of Behavioral Finance", Vol. 2/4.

Peccati L. (1972), *Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell'attualizzazione*, Studium Parmense, Parma.

Piasecki K. (2007), *Modele matematyki finansowej. Instrumenty podstawowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Piasecki K. (2012), *Basis of Financial Arithmetic from the Viewpoint of the Utility Theory*, „Operations Research and Decisions", Vol. 22, No. 3.

Pratt J.W. (1964), *Risk Aversion in the Small and in the Large*, „Econometrica", Vol. 32, No. 1/2.

Siegel A.F., Nelson Ch.R. (1987), *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, „Journal of Business", Vol. 60, Iss. 4.

Svensson L. (1994), *Estimating and Interpreting forward Interest Rates: Sweden 1992-1994*, NBER, Cambridge.

DISCOUNT AND AVERSION TO LIQUIDITY RISK

Summary: Present value is considered as the utility of cash flow. Therefore discount rate is presented as a trend dependent on risk aversion. Obtained model was applied for behavioural finance.

Keywords: risk aversion, discount, behavioural finance, paradox of market equivalency, strict effective financial market, utility, present value.