METODY ILOŚCIOWE W BADANIACH EKONOMICZNYCH
Tom XI/2, 2010, str. 151–160

RÓŻNICZKOWY MODEL INFLACJI REJESTROWANEJ W POLSCE

Joanna Kisielińska
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego - Wydział Nauk Ekonomicznych
e-mail: joanna_kisielinska@sggw.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono addytywny model z amplitudą oscylacji zmieniającą się według dowolnej funkcji czasu. Wykazano, że stanowi on uogólnienie zwykłego modelu addytywnego i multiplikatywnego. Jeśli założona zostanie wykładnicza postać amplitudy i oscylacje w postaci pojedynczej harmoniki szeregu Fouriera, można wyznaczyć współczynniki równania różniczkowego drgań harmonicznych tłumionych opisującego proces. Model zastosowano dla inflacji rejestrowanej od stycznia 1991 do grudnia 2009.

Słowa kluczowe: prognozowanie, model inflacji

WSTĘP

Modele szeregów czasowych z wahaniami w czasie tworzone są w dwóch podstawowych wersjach - addytywnej i multiplikatywnej. Model addytywny jest odpowiedni w przypadku stałej amplitudy oscylacji, multiplikatywne zaś, jeśli jest ona zmienna w sposób wprost proporcjonalny do trendu. Nie wszystkie jednak drgania spełniają te warunki. Przykładem mogą być znane z fizyki drgania harmoniczne tłumione, stanowiące przy pewnych warunkach rozwiązanie liniowego równania różniczkowego rzędu drugiego. W takim przypadku właściwym jest model addytywny z nieliniowo zmienną amplitudą oscylacji. W artykule pokazane zostanie, że przyjęcie stałej amplitudy sprowadza model ten do zwykłego modelu addytywnego, natomiast założenie amplitudy wprost proporcjonalnej do trendu – do modelu multiplikatywnego. Oznacza to, że model addytywny z nieliniowo zmienną amplitudą oscylacji jest uogólnieniem tradycyjnych modeli: addytywnego i multiplikatywnego.

Jeśli dla oscylacji założy się amplitudę jako wykładniczą funkcję czasu, zmienność procesu wyjaśni jednorodne równanie różniczkowe rzędu drugiego z czynnikiem tłumiącym (równanie drgań harmonicznych z tłumieniem). Aby uwzględnić trend wprowadzany addytywnie do modelu wystarczy równanie jednorodne zastąpić równaniem niejednorodnym.

Na podstawie miesięcznych danych o inflacji rejestrowanej od stycznie 1991r. do grudnia 2009 oszacowany zostanie addytywny model inflacji z amplitudą zmieniającą się według wykładniczej funkcji czasu. Pozwoli to obliczyć współczynniki równania różniczkowego oraz określić na podstawie trendu funkcję czasu występująca w równaniu niejednorodnym.

MODELE SZEREGÓW CZASOWYCH Z WAHANIAMI W CZASIE

Dana jest zmienna y(t) zależna od czasu, którą cechuje okresowość. Można wyodrębnić w niej trzy elementy: trend (tendencja rozwojowa), składową okresową i składową losową. Trend y*(t) reprezentuje poziom zjawiska[1] i może być przedstawiony jako funkcja czasu. Składową okresową o(t) cechuje powtarzalność w czasie według określonych cykli. Składowa losowa obrazuje zakłócenia o czysto losowym charakterze, których zmienności nie wyjaśnia tworzony model.

Do prognozowania zjawisk charakteryzujących się wahaniami periodycznymi stosowane są dwa podstawowe typy modeli: addytywny i multiplikatywny ([DeLurgio 1998], [Dittmann 2004], [Witkowska 2005] i wielu innych). W modelu addytywnym wahania okresowe dodawane są do trendu, w multiplikatywnym zaś są przez niego mnożone. Modele addytywne stosuje się, gdy wahania są stałe w czasie, natomiast multiplikatywne, jeśli wahania zmieniają się w czasie w sposób wprost proporcjonalnym do trendu.

Model addytywny zapisywany jest jako:

$$y(t) = y^*(t) + o_a(t) + \xi_t \tag{1}$$

multiplikatywny zaś dany jest formułą:

$$y(t) = y^*(t) \cdot o_m(t) + \xi_t \tag{2}$$

gdzie: $y^*(t)$ to trend, $o_a(t)$ jest składową okresową w modelu addytywnym, natomiast $o_m(t)$ składową okresową w modelu multiplikatywnym, ξ_t jest składową losową – zakłóceniem.

Załóżmy, że składowa okresowa w modelu (1) jest ilorazem trendu i pewnej funkcji czasu w(t):

$$o_a(t) = y^*(t) \cdot w(t) \tag{3}$$

Wstawiając (3) do wzoru (1) otrzymujemy:

$$y(t) = y^*(t) + y^*(t) \cdot w(t) + \xi_t = y^*(t) \cdot (1 + w(t)) + \xi_t \tag{4}$$

Podstawiając $o_m(t) = 1 + w(t)$ do wzoru (4) uzyskujemy formułę na model multiplikatywny. Przekształcenia te pokazują, że model multiplikatywny jest równoważny modelowi addytywnemu, jeżeli założona zostanie postać (3) składowej okresowej.

[1] W niniejszym artykule założono trend deterministyczny. Takie podejście pozwala na jego uwzględnienie w niejednorodnym równaniu różniczkowym.

W niektórych pozycjach literatury ([DeLurgio 1998], [Dittmann 2004], [Witkowska 2005]) w modelu multiplikatywnym składowa losowa jest przemnażana przez część deterministyczną. Formuła określająca model jest wówczas następująca:

$$y(t) = y^*(t) \cdot o_m(t) \cdot \xi_t \tag{5}$$

Aby uzyskać addytywnie wprowadzany składnik losowy konieczne jest obustronne zlogarytmowanie wzoru (5):

$$\ln(y(t)) = \ln(y^*(t)) + \ln(o_m(t) + \ln(\xi_t) \tag{6}$$

Multiplikatywny składnik losowy wprowadza pewne niedogodności. Zmienna y(t) w modelu postaci (5) ma zakłócenia wzmacniane (lub tłumione) przez iloczyn trendu i składnika okresowego. Związek taki trudno jest uzasadnić. Kolejny problem to znak zakłóceń. Aby model był poprawny, zakłócenia losowe ξ_t muszą być dodatnie, bowiem w przeciwnym razie wpływałyby na znak y(t). Argumenty te przemawiają za przewagą zapisu (2) nad (5). Addytywnie wprowadzany składnik losowy w modelu multiplikatywnym stosują np. [Durbin i Murphy 1975], [Chatfield 1996], [Abraham i Ledolter 2005].

Pierwszy etap tworzenia modelu szeregu czasowego zarówno w wersji addytywnej, jak i multiplikatywnej polega na wyznaczeniu tendencji rozwojowej. Wykorzystuje się w tym celu metodę najmniejszych kwadratów, przy czym trend może być zarówno liniowy jak i nieliniowy.

Etap kolejny to eliminacja trendu z szeregu. Sposób eliminacji zależy od typu modelu. W modelu addytywnym trend jest odejmowany od rzeczywistych wartości zmiennej, w multiplikatywnym natomiast wartości rzeczywiste są przez trend dzielone. Funkcja, uzyskana po usunięciu trendu oznaczona zostanie jako o(t), zawiera w sobie element okresowy i losowy. Oblicza się ją w modelu addytywnym jako:

$$o(t) = y(t) - y^*(t) \tag{7}$$

a w modelu multiplikatywnym:

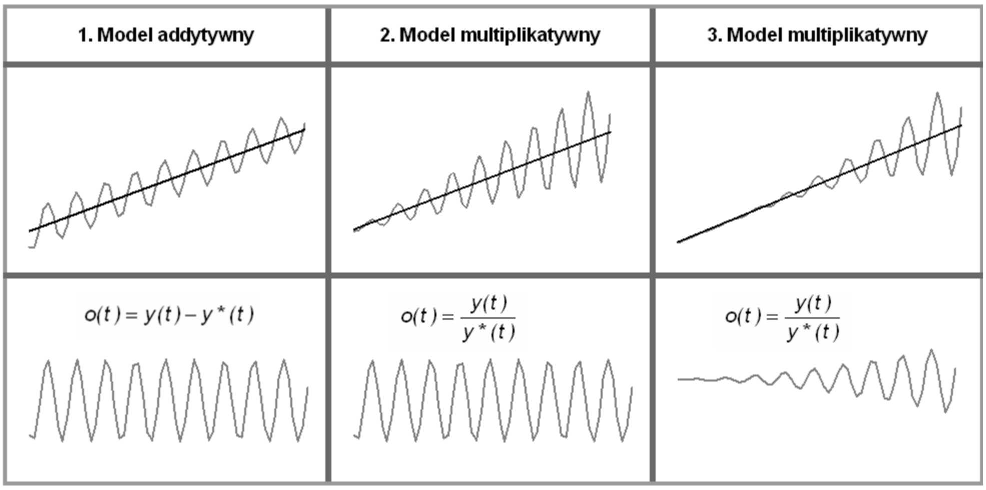
$$o(t) = \frac{y(t)}{y^*(t)} \tag{8}$$

Przekształcenie (7) lub (8) powinno doprowadzić do uzyskania funkcji okresowej, w której nie występują zmiany wahań w kolejnych okresach lub inaczej mówiąc amplituda wahań nie ulega zmianom w czasie[2]. Jest to możliwe, jeśli w funkcji źródłowej y(t) amplituda wahań była stała i zastosowano model addytywny lub, gdy amplituda była wprost proporcjonalna do trendu i przyjęto model multiplikatywny. Jeżeli jednak wahania zmieniają się w czasie i nie są wprost proporcjonalne do trendu, modele (1) i (2) nie pozwolą prawidłowo opisać zjawiska. Ilustrację takiego przypadku zawiera rysunek 1. W kolumnie pierwszej przedstawiono szereg, w którym wahania nie zmieniają się w czasie. Właściwy w takim

[2] Jeżeli o(t) traktujemy jako szereg czasowy, proces stochastyczny go generujący powinien być stacjonarny przynajmniej słabo.

przypadku jest model addytywny, a eliminacja trendu poprzez odjęcie go od wartości modelowanego zjawiska pozwala uzyskać składową okresową, o stałej amplitudzie. W kolumnie drugiej znajduje się ilustracja szeregu, w którym wahania są wprost proporcjonalne do trendu. Jego eliminacja właściwa dla modelu multiplikatywnego daje również składową okresową o stałej amplitudzie. Jeżeli jednak wahania ulegają w czasie zmianom, lecz nie są wprost proporcjonalne do tendencji rozwojowej, podzielenie wartości modelowanego zjawiska przez trend nie stabilizuje wahań składowej okresowej. Ilustracja takiego przypadku znajduje się w kolumnie trzeciej. Jedynym rozwiązaniem jest wówczas zastosowanie modelu addytywnego, w którym amplituda oscylacji zmieniać się będzie według dowolnej funkcji czasu a(t).

Rysunek 1. Eliminacja trendu w modelach szeregów czasowych



Źródło: Opracowanie własne

W modelu addytywnym z amplituda zmieniającą się według dowolnej funkcji czasu po eliminacji trendu według formuły addytywnej należy opracować model składowej okresowej o(t). Wymaga to wyodrębnienia amplitudy a(t) i wahania w(t) o odchyleniach stałych w czasie (niezależnych od rozpatrywanego cyklu). Składowa okresowa o(t) jest określona jako:

$$o(t) = a(t) \cdot w(t) \tag{9}$$

Zarówno a(t) jak i y*(t) są funkcjami czasu. Jeżeli istnieje funkcja odwrotna do y*(t), amplitudę można przedstawić jako funkcję trendu, zamiast funkcji czasu. Można również szacować amplitudę bezpośrednio jako funkcję trendu, a nie czasu.

Wyodrębnienie stałych w czasie wahań w(t) wymaga eliminacji amplitudy, którą należy określić. W artykule [Kisielińska 2008] przedstawiono metodę wyznaczania amplitudy poprzez obliczenie wartości bezwzględnej o(t). Smolik [Smolik 2003] przedstawił wzory na współczynniki przy założeniu wykładniczej zmienności amplitudy przy pomocy metody najmniejszych kwadratów i w konsekwencji stosując warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji.

W badaniach prezentowanych w niniejszej publikacji przyjęto amplitudę jako największą, co do wartości bezwzględnej składową okresową w całym cyklu[3]. Dopasowując najlepszą funkcję do otrzymanych wielkości otrzymuje się funkcję a(t).

Eliminacja amplitudy wymaga podzielenia o(t) przez oszacowaną funkcję a(t):

$$w(t) = \frac{o(t)}{a(t)} \tag{10}$$

Funkcja w(t) reprezentuje wahania, których amplituda jest stała. Do jej modelowania można użyć metody wskaźników lub analizy Fouriera. Porównanie obydwu metod dla inflacji przedstawiono w pracy [Kisielińska 2003].

Model addytywny z amplitudą zmieniającą się według dowolnej funkcji czasu (lub trendu) można zapisać jako:

$$y(t) = y^*(t) + a(t) \cdot w(t) + \xi_t \tag{11}$$

Jeżeli a(t) = const = a, wprowadzając oznaczenie $o_a(t) = a \cdot w(t)$ do wzoru (11) otrzymujemy prosty model addytywny o postaci (1). Zakładając natomiast $a(t) = const \cdot y^*(t) = a \cdot y^*(t)$ i wprowadzając do wzoru (12) oznaczenie $o_m(t) = 1 + a \cdot w(t)$ otrzymujemy model multiplikatywny. Udowodnione więc zostało, że model addytywny z amplitudą zmieniającą się według dowolnej funkcji czasu, jest uogólnieniem prostego modelu addytywnego i multiplikatywnego.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE DRGAŃ HARMONICZNYCH

Opracowany model procesu, który cechuje okresowość może być wykorzystany do prognozowania jego wartości. Nie zawiera jednak w sobie wyjaśnienia przyczyn okresowości. Z pewnością cykliczny charakter niektórych zjawisk może być konsekwencją oddziaływania innego procesu o naturalnie cyklicznym charakterze, wynikającym np. z pór roku. Z drugiej strony wiadomo, że funkcje okresowe stanowią rozwiązanie pewnego typu równań różniczkowych. W charakterze tych równań można poszukiwać również przyczyn okresowości.

Równania drgań harmonicznych prostych i drgań harmonicznych z tłumieniem są równaniami liniowymi rzędu drugiego. W zastosowaniach fizycznych drania pojawiają się, gdy działają na pewien obiekt fizyczny dwa przeciwstawne czynniki. Np. klocek na rozciągniętej sprężynie. Na klocek działa z jednej strony siła ciężkości, z drugiej natomiast w kierunku przeciwnym siłą sprężystości proporcjonalna do rozciągnięcia sprężyny. Jeśli dodatkowo występuje jakiś czynnik tłumiący (np. opór ośrodka, w jakim odbywa się ruch, czy odkształcenie sprężyny)

---

[3] Dla inflacji cykl jest 12 miesięczny, co potwierdzono stosując analizę Fouriera [Kisielińska 2003], [Kisielińska 2008].

drgania będą miały coraz mniejsze odchylenia – będą to drgania tłumione. W przypadku inflacji można poszukiwać analogicznych związków. Z jednej strony występuje dążenie różnych grup do powiększania wydatków z budżetu, którego konsekwencją jest rosnący deficyt. Z drugiej natomiast Rada Polityki Pieniężnej w przypadku narastania inflacji podejmuje różnorakie działania zaradcze. Działania te są proporcjonalne do rozmiarów inflacji.

Równanie drgań harmonicznych prostych jest następujące:

$$o''(t) + \omega^2 \cdot o(t) = 0 \quad (12)$$

gdzie: o(t) – przebieg czasowy o oscylacyjnym charakterze, ω - parametr (częstotliwość kołowa).

Rozwiązaniem równania różniczkowego (12) jest funkcja:

$$\mathrm{o}\ (\mathrm{t}) = \mathrm{A} \cdot \cos(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi) \quad (13)$$

gdzie: A – amplituda, a z częstotliwości kołowej ω wynika długość okresu $T = \frac{2\pi}{\omega}$, φ to przesunięcie fazowe. Amplituda i przesuniecie fazowe wynikają z warunków początkowych

Równanie (12) jest równaniem jednorodnym. Jeżeli chcemy uzyskać funkcje $y(t)$ jako sumę składowej okresowej $o(t)$ i trendu $y^*(t)$, równanie jednorodne (12) należy zastąpić równaniem niejednorodnym. Wiadomo bowiem, że całka ogólna równania niejednorodnego jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego i dowolnej całki szczególnej równania niejednorodnego. Niejednorodne równanie różniczkowe dla funkcji $y(t)$ jest wobec tego określone formułą:

$$y''(t) + \omega^2 \cdot \mathrm{y}(t) = f(t) \quad (14)$$

Postać funkcji $f(t)$ wynika z postaci trendu i musi spełniać warunek:

$$f(t) = y^{*\prime\prime}(t) + \omega^2 \cdot \mathrm{y}^*(t) \quad (15)$$

Równanie drgań harmonicznych z tłumieniem zawiera tzw. czynnik tłumiący w postaci pierwszej pochodnej:

$$o''(t) + p \cdot o'(t) + q \cdot o(t) = 0 \quad (16)$$

Parametry p i q musza spełniać warunek $p^2 - 4 \cdot q < 0$, aby rozwiązanie miało charakter oscylacyjny.

Rozwiązaniem równania (16) jest funkcja:

$$o(t) = \mathrm{e}^{\alpha \cdot t} \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (17)$$

gdzie: $\alpha = -\frac{p}{2}$, a $\omega = \frac{\sqrt{-\mathrm{p}^2 + 4 \cdot q}}{2}$. Tak jak dla drgań prostych, amplituda A i przesunięcie fazowe φ wynikają z warunków początkowych.

Wprowadzenie trendu wymaga zastąpienia równania jednorodnego równaniem niejednorodnym Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$y''(t) + p \cdot y'(t) + q \cdot \mathrm{y}(t) = f(t) \quad (18)$$

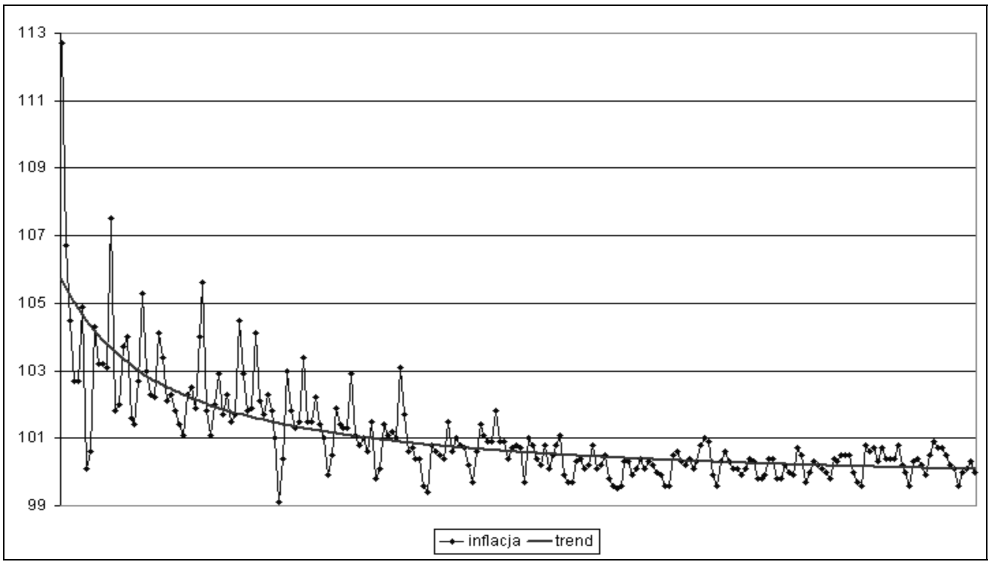
przy czym funkcja $f(t)$ musi spełniać warunek:

$$f(t) = y^{*\prime\prime}(t) + p \cdot y^{*\prime}(t) + q \cdot \mathrm{y}^*(t) \quad (19)$$

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE INFLACJI W POLSCE

Na rys. 2 przedstawiono wykres obrazujący zmiany indeksu cen towarów i usług konsumpcyjnych w Polsce od stycznia 1991 r. do grudnia 2009. Wykres ten wyraźnie pokazuje, że wahania inflacji nie są stałe w czasie, wobec czego niecelowe jest do modelowania zjawiska użycie zwykłego modelu addytywnego. Ponieważ amplituda wahań zmniejsza się w czasie, odpowiednim jest model drgań harmonicznych tłumionych z trendem.

Rysunek 2. Wartości indeksu cen towarów i usług konsumpcyjnych od stycznia 1991 do grudnia 2009



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych GUS

Dla inflacji w badanym okresie najlepszym[4] okazał się trend odwrotny do liniowego, o następującej postaci:

$$y^*(t) = 99{,}90 + \frac{90{,}50}{t+12} \tag{20}$$

We wzorze powyższym t = 1 dla stycznia 1990 r. Inflacja w Polsce miała wartość największą w styczniu 1990 r. Wobec tego miesiąc ten został przyjęty jako pozycja asymptoty pionowej (t = -12).

Modelując amplitudę przyjęto, jako jej podstawę dla każdego roku największą, co do wartości bezwzględnej różnicę y(t) - y*(t). Aby doprowadzić model procesu do postaci równania różniczkowego drgań harmonicznych tłumionych

[4] Oceny dokonano na podstawie wartości błędu średniokwadratowego.

założono amplitudę jako funkcję wykładniczą. Ostatecznie otrzymano następującą formułę:

$$a(t) = 4{,}30 \cdot \exp(-0{,}0103 \cdot t) \tag{21}$$

Amplituda została następnie wyeliminowana w celu wyłonienia składowej okresowej. Przeprowadzona analiza Fouriera pokazała, że najważniejsze składowe harmoniczne odpowiadają kolejno okresom 4 miesiące, 12 miesięcy i 6 miesięcy. Pojedyncze równanie różniczkowe jest właściwym modelem dla jednej składowej harmonicznej (długość okresu oraz wykładnik amplitudy określają współczynniki p i q w równaniu (18)). Konieczne jest więc wybranie właściwej częstotliwości. Wprawdzie najważniejsza jest składowa 4 miesięczna, jednak jako najbardziej reprezentatywną wybrano składową 12 miesięczną. Prowadzone wcześniej badania (przedstawione w pracy [Kisielińska 2003]) wskazywały, jako najważniejszą składową 12 miesięczną. Cykl tej składowej jest ponadto wielokrotnością zarówno składowej 4 jak i 6 miesięcznej, co jest istotne, jeśli zastosowana zostanie metoda wskaźników wprowadzająca poprawki wynikające z cykliczności dla każdej fazy. W celu weryfikacji poprawności takiego modelu, opracowano także wariant 4 miesięczny. Okazało się, że nie był on wyraźnie lepszy od wariantu 12 miesięcznego.

Pojedyncza składowa harmoniczna jest zwykle podawana jako suma sinusa i cosinusa, chociaż można również przedstawić ją jedynie przy pomocy pojedynczego cosinusa (lub sinusa). Ponieważ chcemy uzyskać rozwiązanie równania drgań w postaci (17) wybrano drugi wariant, czyli pojedynczy cosinus. Ostatecznie otrzymano składową okresową (o stałych wahaniach) postaci:

$$w(t) = 0{,}2578 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{12} \cdot t + 0{,}1494\right) \tag{22}$$

Model inflacji zawierający trend, amplitudę i składową okresową jest wobec tego następujący:

$$\hat{y}(t) = 99{,}90 + \frac{90{,}50}{t+12} + 1{,}1077 \cdot \exp(-0{,}0103 \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{12} \cdot t + 0{,}1494\right) \tag{23}$$

Formuła (23) pozwala już wyznaczyć elementy niejednorodnego równania różniczkowego. Współczynniki maja wartości odpowiednio p = 0,0205, ω = 0,5236, a q = 0,2743. Model inflacji określa wobec tego równanie:

$$y''(t) + 0{,}0205 \cdot y'(t) + 0{,}2743 \cdot y(t) = f(t) \tag{24}$$

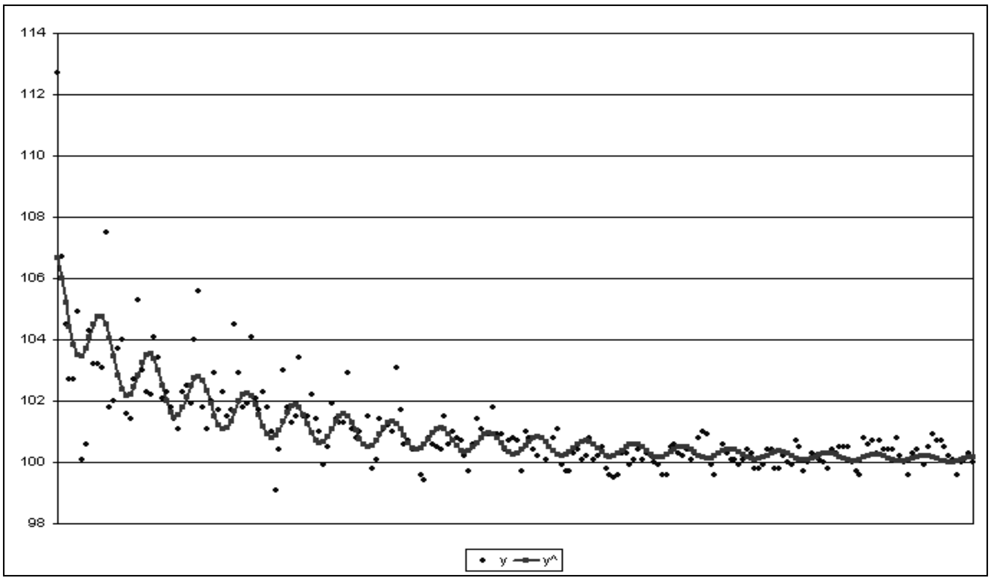
gdzie funkcja f(t) wynika ze wzoru (19):

$$f(t) = 27{,}40 + \frac{24{,}82}{t+12} - \frac{1{,}86}{(t+12)^2} + \frac{181{,}00}{(t+12)^3} \tag{25}$$

Na rysunku 3 przedstawiono wskazania modelu określonego wzorem (23) na tle rzeczywistych wartości inflacji w okresie od stycznia 1991 do grudnia 2009. Ponieważ użyto jedynie jednej składowej harmonicznej stwierdzić należy, że występują wyraźne rozbieżności między faktycznym kształtowaniem się inflacji, a tym, co wynika z modelu. Podkreślić należy jednak, że model (23) ma charakter ideowy - służący do wyznaczenia równania różniczkowego (24). Model prognostyczne najlepiej budować metodą wskaźników, która wprowadza poprawki wynikające z okresowości dla każdej fazy cyklu (patrz [Kisielińska 2003]). Modele wskaźnikowe nie pozwalają jednak tworzyć formuł wyjaśniających mechanizmy kształtowania się rozpatrywanego zjawiska okresowego.

Wyraźne niedoszacowanie oscylacji w okresie początkowym może wskazywać na konieczność podziału analizowanego odcinka czasu. Lepsze efekty uzyskano by prawdopodobnie startując z późniejszej chwili, „zapominając” niejako o bardzo niestabilnym okresie początkowym.

Rysunek 3. Wskazania modelu indeksu cen towarów i usług konsumpcyjnych na tle wartości rzeczywistych od stycznia 1991 do grudnia 2009



Źródło: Opracowanie własne

PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono koncepcję oraz sposób szacowania bardziej uniwersalnego od dotychczas stosowanych modelu, pozwalającego analizować zjawiska, które cechuje cykliczność. Jest to model addytywny z amplitudą oscylacji zmieniającą się według dowolnej nieliniowej funkcji czasu. Pokazano, że model ten stanowi uogólnienie powszechnie stosowanych modeli addytywnych i multiplikatywnych. Jeżeli założymy stałą amplitudę zaproponowany model sprowadza się do zwykłego modelu addytywnego. Przyjęcie amplitudy wprost proporcjonalnej do trendu pozwala uzyskać model multiplikatywny.

Następnie pokazano, że założenie amplitudy oscylacji jako funkcji wykładniczej pozwala określić współczynniki niejednorodnego liniowego równania różniczkowego rzędu drugiego. Równanie to zwane równaniem drgań harmonicznych tłumionych opisuje procesy, w których wyróżniamy składową okresową o zmiennej amplitudzie oraz trend.

Następnie dla okresu od stycznia 1991 do grudnia 2009 opracowany został model inflacji w postaci drgań harmonicznych z tłumieniem i trendem. Wyznaczone współczynniki pozwoliły obliczyć parametry równania różniczkowego, które obrazuje mechanizm kształtowania się inflacji w warunkach stabilizacji gospodarki po okresie głębokiego kryzysu gospodarczego.

LITERATURA

Abraham B, Ledolter J. (2005) Statistical methods for forecasting. John Wiley & Sons: New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.

Chatfield C. (1996) The analysis of time series. An introduction. Chapman & Hall: London, Weinheim, New York, Tokyo, Melbourne, Madras.

DeLurgio S. A. (1998), Forecasting principles and applications. The McGraw-Hill Company, Boston, Burr Ridge, Dubuque, Madison, New York, San Francisco, St. Louis.

Dittmann P. (2004), prognozowanie w przedsiębiorstwie. Oficyna Ekonomiczna, Kraków.

Durbin J, Murphy MJ. (1975) Seasonal adjustment based on a mixed additive-multiplicative models. Journal of the Royal Statistical Society Series A 1975.

Kisielińska J. (2003), Wykorzystanie metody wskaźników i analizy Fouriera do prognozowania inflacji rejestrowanej w Polsce. Acta Scientarum Polonarum seria Oeconomia 2 (1).

Kisielińska J. (2008), Modelowanie szeregów czasowych z okresowością o nieliniowo zmiennej amplitudzie na przykładzie inflacji rejestrowanej. Wiadomości Statystyczne 12.

Smolik S. (2003), Opis składowej okresowej w szeregu czasowym. W: Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – III. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.

Witkowska D. (2005), Postawy ekonometrii i teorii prognozowania, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.

Differential model of inflation in Poland

Abstract: In the article is shown additive model with amplitude of oscillation changing in any function of time. It was proven that this model is generalization of the ordinary additive and multiplicative models. Establishment of the amplitude as an exponential function and oscillations as single harmonics of Fourier's series will let to write the inflation variability as a homogeneous second order differential equation with damping factor (equation of harmonic vibration damping). The model was used for monthly inflation from January 1991 to December 2009.

Key words: forecasting, model of inflation