Aleksander Gemel

Kwestia pojęciowej nieciągłości procesu nabywania dokładnych reprezentacji numerycznych w teorii bootstrappingu = The Issue of Conceptual Discontinuity of the Accurate Number Representation Acquiring Process in the Bootstrapping Theory

Humanistyka i Przyrodoznawstwo 22, 101-117

2016

HUMANISTYKA I PRZYRODOZNAWSTWO 22 Olsztyn 2016

Aleksander Gemel

Uniwersytet Łódzki University of Lodz

KWESTIA POJĘCIOWEJ NIECIĄGŁOŚCI PROCESU NABYWANIA DOKŁADNYCH REPREZENTACJI NUMERYCZNYCH W TEORII *BOOTSTRAPPINGU*

The Issue of Conceptual Discontinuity of the Accurate Number Representation Acquiring Process in the Bootstrapping Theory

Słowa kluczowe: *Bootstraping*, pojęcie liczby dokładnej, system paralelnej indywiduacji (PIS), system liczb przybliżonych (ANS), gramatyka generatywna, nieciągłość pojęciowa.

Key words: Bootstrapping, concept of exact number, parallel individuation system (PIS), approximate number system (ANS), generative grammar, conceptual discontinuity.

Streszczenie

Artykuł poświęcony jest analizie kwestii nieciągłości pojęciowej w zaproponowanej przez Susan Carey teorii nabywania reprezentacji liczby dokładnej, tzw. *bootstrapping theory*. Pierwsza część tekstu stanowi przegląd głównych stanowisk arytmetyki kognitywnej, druga przedstawia kluczowe założenia procesu *bootstrappingu*, zaś część poświęcona jest krytycznej analizie pojęcia nieciągłości w zaproponowanej przez Carey teorii uczenia. Zgodnie z centralną tezą, proces *bootstrappingu* nie daje się ująć jako procedura kształtowania systemu reprezentacji, który byłby nieciągły względem wrodzonych systemów wiedzy rdzennej.

Abstract

The purpose of this paper is to analyze the issue of conceptual discontinuity of Carey's model of acquiring the accurate number representations (i.e. bootstrapping). First part of the text is an overview of the key positions of cognitive arithmetic. Second part of the paper aims to present the main assumptions of the bootstrapping process, while third part is devoted to critical analysis of the concept of discontinuity of Carey's theory of learning. The aim of the paper is to prove that learning process proposed by Carey can't be accounted as a procedure of developing the system of representation, which is discontinuous to the innate systems of core knowledge.

Dałem znów susa, który i tym razem okazał się za krótki,
tak iż wpadłem w bagno aż po szyję.
Utonąłbym niechybnie, gdyby nie moja siła.
Trzymając bowiem konia krzepko kolanami, wyrwałem się
z bagna, ciągnąc się za własny harcap ręką.
Przygody barona Münchhausena, G. A. Bürger[1]

Wstęp

Jedną z kluczowych kwestii dotyczących procesu nabywania zdolności matematycznych jest pytanie o ich status. Problem, czy zdolności te mają charakter czysto kulturowy, czy też stoi za nimi rodzaj biologicznej dyspozycji, na wiele lat określił kierunek toczącej się w psychologii poznawczej dyskusji. Większość badaczy jest zgodna, że pochodzenie pojęć matematycznych nie może mieć czysto biologicznej genezy, gdyż są one silnie zależne kulturowo. Pojęcie liczby π, opisującej stosunek długości obwodu koła do długości jego średnicy, nie jest bowiem pojęciem wrodzonym i danym *a priori*, gdyż dzieci bez wątpienia nie dysponują żadną wiedzą na jego temat bez uprzedniej edukacji matematycznej. Z drugiej jednak strony, jak wykazały badania prowadzone od ponad 40 lat, niektóre rodzaje pojęć liczbowych stanowią efekt wrodzonego modułu poznawczego dostarczającego reprezentacji wielkości. Moduł ten jest elementem systemu wiedzy rdzennej (*core knowlage*) składającego się z trzech podstawowych subsystemów poznawczych (związanych odpowiednio z pojęciem obiektu, sprawstwa oraz liczebności)[2]. Ostatni z nich, odpowiadający za zdolność reprezentacji liczebności za pomocą systemu liczb przybliżonych (*Approximate Numer System* – ANS) oraz systemu śledzenia przedmiotów (*Object Tracking System* – OTS), zwany jest również systemem paralelnej indywiduacji (*Parallel Individuation System* – PIS). Pierwszy system dostarcza przybliżonej reprezentacji liczebności zbioru, drugi zaś pozwala na śledzenie do czterech obiektów i podtrzymywanie ich indeksowych reprezentacji w pamięci roboczej. Choć bez wątpienia oba systemy mają ścisły związek ze zdolnościami liczbowym człowieka, to żaden z nich nie może samodzielnie dostarczać reprezentacji pojęcia

[1] G.A. Bürger, *Przygody barona Münchhausena*, przeł. H. Januszewska, Nasza Księgarnia, Warszawa 1956.

[2] Zob. E. Spalke, K. Breinlinger, J. Macomber, K. Jacobson, *Origins of Knowledge*, „Psychological Review", 1992, nr 99(4), s. 605–632; E. S. Spelke, *Core knowledge*, „American Psychologist", nr 2000(55), s. 1233–1243 oraz S. Carey, *Bootstrapping and the Origins of Concepts*, „Daedalus" 2004, nr 133(1), s. 59–68. Ograniczenie liczby systemów wiedzy rdzennej do trzech jest spowodowane stanem współczesnych badań poznawczych, których zakres ogranicza się na obecnym etapie jedynie do sfer wchodzących w skład owych systemów. Nie jest to jednak lista wyczerpująca ich potencjalną liczbę.

liczby dokładnej[3]. Niemniej wydaje się całkowicie uzasadnione, aby próby zrozumienia poznania numerycznego człowieka brały swój początek właśnie od tych wspólnych wszystkim ludziom modułów poznawczych. I choć faktycznie znakomita większość dociekań poświęconych problematyce nabywania przez ludzi zdolności numerycznych bazuje na reprezentacjach dostarczanych przez systemy wiedzy rdzennej, to zdania na temat ich właściwej roli w procesie kształtowania kompetencji arytmetycznych człowieka są już podzielone. Teorie dotyczące procesu nabywania liczby dokładnej można podzielić na dwie podstawowe grupy.

W skład pierwszej grupy wchodzą konstruktywistyczne teorie genezy systemu dokładnych reprezentacji liczbowych[4]. Zgodnie z poglądem konstruktywistycznym, pojęcie liczby dokładnej jest konstruowane przez dzieci na bazie pojęć i reprezentacji dostarczanych przez dwa wrodzone niesymboliczne systemy wiedzy rdzennej. Co istotne, pojęcia te nie dają się jednak zredukować i adekwatnie wyrazić za pomocą niesymbolicznych reprezentacji systemów ANS i OTS. System liczb dokładnych jest zatem nieciągły względem reprezentacji dostarczanych przez systemy wiedzy rdzennej. Zgodnie z podejściem konstruktywistycznym, kategorie liczbowe nie są więc wrodzone, a co za tym idzie – automatycznie dostarczane przez ANS i OTS; pojęcie „jeden" nie odnosi się zatem początkowo do zbioru jednoelementowego, lecz po prostu oznacza jakiś obiekt (co w języku naturalnym w pewnym sensie korespondowałoby z „coś"). Podobnie pozostałe liczebniki nie desygnują początkowo kardynalności zbioru, lecz raczej pewne kolekcje obiektów o niezdefiniowanej liczebności. Pojęcie „jednostka numerycznie odrębna" może dopiero wyłonić się z systemu paralelnej indywi-

---

[3] Przedmiotem tekstu jest nabywanie pojęcia liczby dokładnej, które odnosi się tylko i wyłącznie do mentalnej reprezentacji dokładnych wielkości liczbowych. Dysponowanie zawartością pojęciową liczb dokładnych nie wiąże się więc z koniecznością posiadania wiedzy matematycznej na ich temat. Nie twierdzę więc – co szczególnie chcę podkreślić – że kilkuletnie dziecko posiada wiedzę matematyczną na temat liczb naturalnych. Założenie takie nie jest jednakże konieczne do utrzymania tezy o posiadaniu przez nie pojęcia liczebności zbioru; jak bowiem pokazują liczne eksperymenty, dzieci mają zdolność reprezentowania pojęć liczb naturalnych bez konieczności jednoczesnej wyraźnej reprezentacji ich formalnych właściwości jako zbioru w sensie dystrybutywnym. Warto również podkreślić, że w niniejszym artykule nie twierdzę, że pozyskanie zasady kardynalności związane jest z posiadaniem pewnego rodzaju metapoziomowej wiedzy o liczbach naturalnych, tj. np. formalnej reprezentacji ich aksjomatyki. Dysponowanie ową zasadą oznacza w moim ujęciu jedynie umiejętność posługiwania się określonym wyrażeniem liczbowym, np. „7" w celu reprezentacji określonej liczby obiektów, np. siedmiu kropek, nie wiąże się natomiast z koniecznością posiadania zawartości propozycjonalnej na temat kardynalności.

[4] Zob. S. Carey, *Evolutionary and Ontogenetic Foundations of Arithmetic*. „Mind and Language" 2001, nr 16(1), s. 37–55; eadem, *The Origin of Concepts*, Oxford University Press, New York 2009; E. S. Spelke, *Core Knowledge*, „American Psychologist" 2000, nr 55, s. 1233–1243; B.W. Sarnecka, *Learning to Represent Exact Numbers*, „Synthese" 2015, s. 1–18.

duacji[5], podobnie jak pojęcie „zbiór" może powstać np. na bazie systemu liczb przybliżonych[6].

W skład drugiej grupy teorii wchodzą koncepcje, które można określić mianem arytmetycznego natywizmu[7]. Zgodnie z nimi, dzieci w zasadzie od urodzenia dysponują rozumieniem podstawowych zasad rządzących logiką liczebników dokładnych. Zasady te są bowiem od urodzenia ucieleśnione w kategoriach pojęciowych dostarczanych im przez reprezentacje systemu wielkości przybliżonych. System ANS odpowiada zatem za dostarczanie dużych reprezentacji zbiorów, które zdaniem natywistów zawierają wszelkie cechy konieczne do rozumienia liczb naturalnych, tj. iteratywność, odpowiedniość pomiędzy ciągiem następujących po sobie reprezentacji a ciągiem kolejnych enumeracji oraz reprezentację liczebności jako wartości kardynalnej zbioru. Innymi słowy – dzieci pojmują, że każda reprezentacja dostarczana im przez ANS jest dużym zbiorem obiektów, który ma pewną określoną wartość kardynalną oraz że ulega ona zmianie, gdy dodamy element do zbioru lub go zeń odejmiemy. Sama konkretna wartość kardynalna zbioru nie jest jednak im znana, gdyż nie są one w stanie określić dokładnej liczebności dużych zbiorów z uwagi na nieostry charakter reprezentacji liczbowych w systemie ANS. Zdaniem zwolenników natywizmu, dzieci od początku dysponują pojęciem liczby dokładnej, lecz nie potrafią jej rozpoznać na skutek poznawczego funkcjonowania właściwego systemowi liczb przybliżonych.

Niestety, za teorią natywistyczną nie przemawiają żadne dowody empiryczne, które potwierdzałyby dostępność pojęć liczbowych od urodzenia. Trudno zresztą wyobrazić sobie możliwość weryfikacji tez natywistycznych, a co za tym idzie – ich potencjalną falsyfikację. Co więcej, wiele dowodów empirycznych zdaje się przeczyć prawdziwości stanowiska natywistycznego. Badania antropologiczne wykazały bowiem, że niektóre kultury nie wykształciły pojęcia liczby dokładnej. Zgodnie z predykcjami wysuwanymi na bazie poglądu naturalistycznego, sytuacja taka nie powinna mieć jednak miejsca, gdyż system wiedzy rdzennej jest *de facto* kulturowo niezależny. Gdyby zatem przewidywania natywistyczne były uzasadnione, a pojęcie liczby dokładnej wrodzone, to powinno ono się pojawić w każdej kulturze. Tymczasem np. kultury Indian Munduruku nie dysponują żadną procedurą liczenia, nie mają pojęcia zbioru ani pojęcia liczby do-

---

[5] Mechanizm ten silnie akcentuje w swojej teorii zwłaszcza Carey – zob. *The Origin of Concepts*.

[6] Rolę ANS w kształtowaniu pojęcia zbioru podkreśla zwłaszcza Spelke – zob. E. Spelke, S. Tsivkin, *Initial Knowledge and Conceptual Change: Space and Numer*, (w:) M. Bowerman, S. Levinson, *Language Acquisition and Conceptual Development*, Cambridge University Press, Cambridge 2001, s. 70–97.

[7] Zob. C.R. Gallistel, R. Gelman, *The What and How of Counting*, „Cognition" 1990, nr 44, s. 43–74; R. Gelman, C.R. Gallistel, *Language and the Origin of Numerical Concepts*. „Science" 2004, nr 306, s. 441–443; P. Pica, C. Lemer, V. Izard, S. Dehaene, *Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group*, „Science" 2004, nr 306, s. 499–503.

kładnej, a jedyne pięć wyrażeń funkcjonujących w ich języku jako liczebniki odpowiada wartościom przybliżonym, np. termin *ebapũg*, który jest trzecim z kolei liczebnikiem w języku Munduruku, oznacza liczby z przedziału 2 do 4[8].

Drugi podział koncepcji arytmetyki kognitywnej dotyczy kwestii udziału poszczególnych liczbowych systemów wiedzy rdzennej w procesie nabywania pojęcia liczby dokładnej. Teorie można podzielić na te, które uznają udział obu systemów, tj. ANS i PIS, w tym procesie[9] i te, które uznają jedynie jeden z nich, tj. albo ANS[10] albo PIS, za źródło konstytucji dokładnych pojęć liczbowych[11]. Przykładem jednej z najpopularniejszych teorii tego ostatniego typu jest lansowana przez Susan Carey koncepcja *bootstrapingu*[12]. Zdaniem Carey, proces kształtowania dokładnych pojęć liczbowych odbywa się jedynie przy udziale systemu śledzenia obiektów oraz struktury liczebnikowej dostarczanej przez wyrażenia języka naturalnego, które zostają scalone za sprawą rozumowania opartego na analogii. Teoria kształtowania struktury pojęciowej liczebników autorstwa Carey wydaje się jednak problematyczna. Z filozoficznego punktu widzenia zaproponowane przez Carey wzmocnienie siły wyrazu systemu pojęciowego wydaje się dokonywać w sposób logicznie nieuzasadniony, zaś sam proces nieciągłości konceptualnej nowego systemu pojęciowego względem reprezentacji wiedzy rdzennej zdaje się prowadzić do paradoksalnych wniosków.

Celem artykułu jest zwrócenie uwagi na wyżej wymienione trudności koncepcji *bootstrapingu*. W dalszej części pracy przedstawię podstawową charakterystykę dwóch kluczowych systemów subsymbolicznej reprezentacji liczbowej, wchodzących w skład wiedzy rdzennej, oraz główne założenia zaproponowanego przez Carey procesu kształtowania pojęcia liczby dokładnej. W ostatniej części zwrócę uwagę problematyczność pojęcia nieciągłości konceptualnej procesu uczenia w teorii *bootstrapingu*.

---

[8] Zob. P. Pica, A. Lecomte, *Theoretical Implications of the Study of Numbers and Numerals in Mundurucu*, „Philosophical Psychology" 2008, nr 21(4), s. 507–522 oraz V. Izard, P. Pica, E. Spelke, S. Dehaene, *Exact Equality and Successor Function: Two Key Concepts on the Path towards Understanding Exact Numbers*, „Philosophical Psychology" 2008, nr 21(4), s. 491–505.

[9] E. Spelke, *What Makes Us Smart? Core Knowledge and Natural Language*, (w:) D. Gentner, S. Goldin-Meadow (red.), *Language in Mind: Advances in the Investigation of Language and Thought*, MIT Press, Cambridge 2003, s. 277–311.

[10] M. Piazza, *Neurocognitive Start-up Tools for Symbolic Number Representations*, „Trends in Cognitive Sciences" 2010, nr 14(12) s. 542–551.

[11] S. Carey, *The Origin of Concepts...*

[12] Wyrażenie to jest trudne do przełożenia na język polski. Termin *bootstrap* oznacza pętlę zaczepioną przy cholewce buta, ułatwiającą jego wciąganie; *bootstraping* odnosi się zaś do określenia przenośnego: *to pull oneself up by one's bootstraps*, co dosłownie można przełożyć jako ‘wyciągnąć się za pętlę od butów'. Wyrażenie to stanowi metaforę sytuacji niemożliwej do rozwiązania bądź samoinicjującego się procesu bez pomocy czynników zewnętrznych. Polskim odpowiednikiem najbliższym angielskiemu idiomowi jest chyba – nawiązujące do fragmentu z motta do tego tekstu – powiedzenie „wyciągnąć się za włosy z bagna".

Koncepcja wiedzy rdzennej oraz dwa systemy reprezentacji liczbowej

Korzeni koncepcji wiedzy rdzennej można doszukiwać się w epistemologii neokantowskiej. Podobnie jak Kant, zwolennicy teorii wiedzy rdzennej postulują istnienie apriorycznych składników poznawczych, które wpływają na finalny kształt doświadczenia. Zgodnie z założeniami poczynionymi przez Carey, wszystkie systemy wiedzy rdzennej, w tym również ANS i PIS, są wrodzone. Jak zauważa ona w *Origin of Concepts*:

> W zgodzie z twierdzeniem racjonalistów, rzeczywiście istnieją wrodzone mechanizmy przetwarzania, które przeliczają percepcyjne reprezentacje – tj. wierne reprezentacje świata zewnętrznego. W przeciwieństwie do teorii empirystycznych, mechanizmy te nie są konstruowane na drodze procesu uczenia, który dokonuje się w oparciu o reprezentacje zmysłowe.[13]

Nie oznacza to jednak. zdaniem Carey, że od urodzenia dysponujemy konkretnymi reprezentacjami dostarczanymi przez owe systemy bądź że mamy dostęp do jakiejś wrodzonej zawartości propozycjonalnej pewnych pojęć. Wrodzony charakter systemów wiedzy rdzennej oznacza natomiast, że stoją za nimi natywne filogeniczne mechanizmy przetwarzające informacje, aktywowane pod wpływem bodźców dostępnych w otoczeniu:

> Pod pojęciem reprezentacji wrodzonej rozumiem, że nie stanowi ona produktu procesu uczenia się, lecz że mechanizmy przetwarzania, które odpowiadają za identyfikację reprezentowanych bytów, oraz przynajmniej niektóre spośród ich obliczeniowych funkcji stanowią produkt ewolucji.[14]

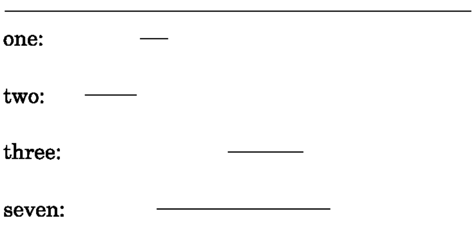
System wiedzy rdzennej jest jednak silnie ograniczony zarówno pod względem swej struktury, jak i poznawczego sposobu funkcjonowania. Po pierwsze, poszczególne systemy wiedzy rdzennej są przypisane określonym domenom poznawczym i silnie z nimi związane. Oznacza to, że każdy system ma swoje zastosowanie jedynie do określonego zbioru obiektów. Po drugie, każdy system wiedzy rdzennej jest powiązany jedynie z określoną aktywnością poznawczą, tj. służy do rozwiązywania jedynie ograniczonego zbioru problemów. Po trzecie, systemy te są informacyjnie ograniczone, każdy z nich przetwarza bowiem jedynie część postrzeganych i zapamiętywanych zasobów informacyjnych. Wreszcie są one również autonomiczne i wzajemnie odizolowane, co oznacza, że w ramach poszczególnego systemu nie można dokonać modyfikacji jego procedury operacyjnej tak, aby uzgodnić ją ze stanami innego systemu. W konsekwencji oznacza to, że każdy z nich dostarcza odmiennych reprezentacji środowiska. Systemy wiedzy rdzennej są zatem, zdaniem Carey, silnie ustrukturyzowane przez określone do-

[13] S. Carey, *The Origin of Concepts*..., s. 448–449.
[14] Ibidem, s. 453.

meny poznawcze, których reprezentacje zostają ukształtowane za pośrednictwem określonych przyporządkowanych im mechanizmów przetwarzania informacji.

Autorka na kartach *Origin of Concepts* zajmuje się jednak jedynie domenami, których istnienie jest potwierdzone przez badania empiryczne. Należy do nich domena związana z pojęciem obiektu, na którą składają się również pojęcia i mechanizmy związane z przetwarzaniem ruchu, w tym śledzeniem jego drogi, relacjami przestrzennymi, w jakich on pozostaje, oraz fizycznymi interakcjami, w jakich bierze on udział. Druga domena związana jest z pojęciem sprawstwa (*agency*), a w jej skład wchodzą pojęcia i mechanizmy związane z celem i planowaniem, interakcją, komunikacją, ukierunkowaniem uwagi oraz potencjałem sprawczym. Wreszcie ostatnia domena systemu wiedzy rdzennej dotyczy pojęcia liczby, a w jej skład wchodzą pojęcia i mechanizmy związane z językową kwantyfikacją zbiorowości oraz systemy paralelnej indywiduacji (PIS) i liczb przybliżonych (ANS).

Najprościej mówiąc, ANS jest systemem poznawczym, który dostarcza mentalnej reprezentacji przybliżonej liczby jednostek w zbiorze[15]. System ten reprezentuje liczbę za pośrednictwem wielkości fizycznej w umyśle, która jest proporcjonalna do liczby postrzeganych jednostek. Z tego powodu reprezentacje systemu ANS często są określane mianem reprezentacji wielkości analogowych, gdyż kodowanie liczebności zbioru ma charakter ciągły i jest ściśle skorelowane z wielkością skalarną. Innymi słowy – reprezentacja mentalna zbioru złożonego z 20 elementów będzie mniej więcej dwa razy większa od reprezentacji mentalnej zbioru złożonego z 10 elementów. Ponieważ domeną ANS są jedynie wartości przybliżone, to niemożliwe jest odróżnienie za jego pośrednictwem np. reprezentacji 9 obiektów od 8.9, 9.5 lub 10 obiektów. Schematyczny kształt reprezentacji dostarczanych przez ANS obrazuje poniższy rysunek:



Rys. 1. Liczebność reprezentowana przez ANS
Źródło: S. Carey, *Bootstrapping and the Origin of Concepts...*, s. 61.

[15] L. Feigenson, S. Dehaene, E. S. Spelke, *Core Systems of Number*. „Trends in Cognitive Sciences" 2004, nr 8(10), s. 307–314.

Drugim systemem poznawczym, który odgrywa zdaniem wielu badaczy istną rolę w procesie kształtowania zdolności matematycznych człowieka (w tym głównie pojęcia liczby dokładnej), jest system paralelnej indywiduacji (*Parallel Individuation System*), zwany również system śledzenia obiektów (*Object Tracking System* – OTS). System ten, jak sama nazwa wskazuje, nie jest systemem liczbowym *par excellence*, nie służy bowiem bezpośrednio do reprezentacji wielkości numerycznej, lecz ma na celu tworzenie i podtrzymywanie w pamięci roboczej modeli mentalnych złożonych z małej liczby obiektów (mogą nimi być przedmioty, dźwięki, zjawiska, etc.). Mała liczba indywiduów stanowiących reprezentację mentalną jest wynikiem ograniczenia poznawczego człowieka, a ściśle rzecz biorąc, pojemności jego pamięci roboczej i zwykle ogranicza się do maksymalnie czterech obiektów. System ten, w odróżnieniu od ANS, który odpowiadał za analogową przybliżoną reprezentację wielkości zbioru elementów, jest odpowiedzialny za reprezentację indywiduów. Nie dostarcza on zatem żadnego wspólnego symbolu dla „dwóch" lub „trzech", lecz trzy odrębne indeksy dla każdego elementu przetwarzanego przez system. Rzecz jasna, z owym pojedynczym indeksem również mogą wiązać się informacje dotyczące np. jego właściwości lub określające jego typ. Schematyczny kształt reprezentacji dostarczanych przez OTS obrazuje poniższy rysunek:

Number of boxes	Image	Abstract	Specific
1 box	□	obj	box
2 boxes	□ □	obj obj	box box
3 boxes	□ □ □	obj obj obj	box box box

Note: one symbol for each individual; no symbols for integres.

Rys. 2. „Liczebność" reprezentowana przez PIS
Źródło: S. Carey, *Bootstrapping and the Origin of Concepts...*, s. 62.

Co jednak istotne, żaden z wrodzonych systemów poznawczych nie może dostarczyć reprezentacji pojęcia liczby dokładnej. Reprezentacje ANS są nieostre i jedynie przybliżone, zaś PIS nie dostarcza żadnej bezpośredniej reprezentacji liczby (wspólnego symbolu dla reprezentacji), a ilość reprezentowanych przezeń przedmiotów ogranicza się jedynie do góra czterech. Ograniczenia obu systemów stwarzają zatem potrzebę opracowania teorii formowania liczby dokładnej.

Formowanie pojęć liczb dokładnych – *bootstraping*

Zaproponowana przez Susan Carey teoria *bootstrapingu* stanowi propozycję konstytucji systemu reprezentacji dla danej domeny wiedzy, który byłby nieciągły względem uprzednio występującego systemu reprezentacyjnego. Pojęcie nieciągłości oznacza, że zawartość nowego systemu pojęciowego nie może zostać wyrażona w słowniku systemu starego. Powody takiego stanu rzeczy mogą być dwa. Nowy system jest pojęciowo nieuzgadnialny ze starym, tj. większość pojęć starego systemu musi zostać odrzucona na rzecz nowych lub nowy system ma o wiele większą moc reprezentacyjną niż stary. Pojęcia liczb dokładnych spełniają oba te warunki. Proces formowania liczby dokładnej polega zatem na wyniesieniu własnego systemu pojęciowego na wyższy poziom przy jednoczesnym zwiększeniu jego mocy reprezentacyjnej. Zdaniem Carey, mechanizmem odpowiedzialnym za ów proces jest właśnie *bootstraping*.

Proces *bootstrapingu* składa się z kilku części. W pierwszej fazie dziecko zyskuje strukturę wyrażeń, które pełnią rolę pustych miejsc dla przyszłych znaczeń (tzw. *placeholders*). Ten ustrukturyzowany zbiór symboli nie odnosi się jednak w pierwszej kolejności do niczego na zewnątrz, tj. do żadnego z istniejących już słowników pojęciowych, lecz stanowi zestaw elementów jedynie strukturalnie powiązanych między sobą. Elementy są identyfikowane zatem formalnie poprzez relacje odróżniające je od siebie oraz poprzez miejsce zajmowane w porządku następowania po sobie. Porządek następowania po sobie symboli stanowi właśnie strukturę „miejsc znaczących”. W przypadku liczb porządek ten to po prostu lista kolejno wymienianych liczebników, tj. „jeden”, „dwa”, „trzy” itd., które dziecko zapamiętuje jako wyrażenia niepowiązane z żadnym konkretnym znaczeniem. Istotnym warunkiem pierwszej fazy *bootstrapingu* jest zdaniem Carey to, że słowa (symbole) dla numerów nie mogą być zdefiniowane w kategoriach istniejącego słownika pojęć liczbowych, tj. ani w kategoriach przybliżonych reprezentacji uzyskiwanych dzięki ANS, ani reprezentacji dostarczanych przez OTS. Pierwsza faza polega zatem na opanowaniu przez dziecko jedynie samej struktury pustych beztreściowych werbalnych symboli dla znaczeń.

Zgodnie z teorią Carey, w drugiej fazie procesu *bootstrapingu* dziecko sukcesywnie wypełnia znaczeniem symbole pełniące role miejsc zarezerwowanych na znaczenia. Proces ten przebiega równolegle z procesem nauki dokładnego znaczenia każdego numeru. Za wyznaczanie znaczenia dokładnego numeru dla numerów od jeden do czterech odpowiada OTS, który umożliwia reprezentacje do czterech obiektów. Proces wypełniania symboli znaczeniem polega zatem na przyporządkowywaniu określonej liczby obiektów do symbolu stanowiącego miejsce dla liczebnika. Proces ten jest skorelowany z nabywaniem kolejnych poziomów znajomości liczbowej[16]. Pierwszy poziom to tzw. poziom prenume-

[16] Zob. K. Wynn, *Children's Understanding of Counting*, „Cognition” 1990, nr 36, s. 155–193.

ryczny, na którym dziecko nie operuje żadnym pojęciem liczby dokładnej, nie rozumie również pojęcia jedności. Na poziomie drugim (*one-knower level*) dziecko zna znaczenie słowa „jeden", potrafi również odpowiednio zareagować na prośbę o wskazanie jednego przedmiotu na planszy podczas określanych zadań (tzw. *give-n tasks*). Kolejne poziomy, tj. od trzeciego (*two-knower level*) do piątego (*four-knower level*), wiążą się z poznaniem znaczenia wyrażeń odpowiednio od dwóch do czterech. Poziomy te zbiegają się, zdaniem Carey, z wykształceniem wzbogaconego systemu paralelnej indywiduacji (*Enchenced Paralel Individuation System*), który pozwala na reprezentację zbiorów od jednego do czterech elementów. Mechanizm wzbogacenia dokonuje się przy udziale kwantyfikatorów języka naturalnego, wchodzących w skład struktur gramatyki uniwersalnej. Poziom piąty (*four-knower level*) jest poziomem przełomowym, po nim następuje bowiem ostatni poziom zwany poziomem kardynalnym (*cardinal-knower level*), na którym dziecko operuje już znaczeniem liczb dokładnych. Granica wyznaczona przez liczbę cztery nie jest oczywiście przypadkowa, pokrywa się ona bowiem z granicą poznawczej przepustowości systemu OTS.

Zgodnie z teorią *bootsptrapingu*, przejście do poziomu liczb kardynalnych następuje dzięki opanowaniu kardynalnej zasady liczenia, która w gruncie rzeczy stanowi istotę logiki numerów dokładnych[17]. Opanowanie powyższej zasady wiąże się z rozumieniem koncepcji następstwa (tj. idei, że każdy kolejny numer jest kształtowany poprzez dodanie jedności do numeru poprzedniego) oraz pojęcia równoliczności, zgodnie z którym każdy zbiór o określonej liczbie może zostać jednoznacznie przyporządkowany innemu zbiorowi o tej samej liczbie elementów. Rzecz jasna, rozumienie pojęć następstwa oraz równoliczności nie pociąga za sobą zdolności ich formalizacji bądź nawet umiejętności konceptualizacji abstrakcyjnej zasady stojącej za owymi pojęciami. Można zatem powiedzieć, że dziecko rozumie owe reguły, o ile potrafi wykonywać określone działania i jest w stanie przewidzieć ich potencjalne konsekwencje.

Problemy teorii *bootstrapingu*

Teoria Carey, łącząc w sobie teoretyczne wyrafinowanie z empiryczną detalicznością, jest bez wątpienia ogromnym krokiem naprzód w dziedzinie dociekań dotyczących rozwoju pojęciowego człowieka. Niestety, nie jest ona propozycją wolną od teoretycznych problemów. Główny z nich dotyczy samego sedna procesu *bootstrapingu*, rozumianego jako proces nabywania nowych treści pojęciowych, dokonujący się w sposób nieciągły względem posiadanego uprzednio

[17] Zob. R. Gelman, C. Gallistel, *The Child's Understanding of Number,* Harvard University Press, Cambridge 1978.

systemu pojęciowego. Problem ten związany jest ze znanym paradoksem wiedzy Fodora, który *de facto* stanowi nowożytne powtórzenie znanego problemu nabywania wiedzy sformułowanego już w *Menonie* Platona[18].

W *Language of Thought* Fodor poddaje w wątpliwość możliwość uzyskania nowej zawartości pojęciowej zwiększającej siłę wyrazu posiadanego systemu wiedzy. Problem ten ma bezpośrednie przełożenie na teorię Carey. Jeżeli bowiem proces *bootstrapingu* jest procedurą uczenia się nowych pojęć, to zgodnie ze spostrzeżeniami Fodora, jako proces pozyskiwania nowej wiedzy pojęciowej formalnie stanowi procedurę formułowania i sprawdzania hipotez. Zdaniem Fodora, procedura ta jest bowiem jedyną możliwą formą nabywania nowych treści pojęciowych. Jeżeli jednak zgodzimy się na powyższe założenia, to *bootstraping* może zachodzić jedynie w oparciu o już posiadane pojęcia, gdyż tylko one mogą posłużyć za podstawę dla sformułowania nowej hipotez. Jeżeli zatem nowa hipoteza jest formułowana za pomocą już posiadanego słownika pojęciowego, to w istocie nie zwiększa ona w żaden sposób siły wyrazu wyjściowego systemu pojęciowego. W najlepszym wypadku procedura tego rodzaju prowadzi do zyskania nowego nośnika dla już istniejących treści. Innymi słowy – jeżeli testujemy hipotezę czy pojęcie x oznacza z i y, która na gruncie empirycznej weryfikacji okazuje się prawdziwa, to nie otrzymujemy w konsekwencji dostępu do żadnej nowej treści pojęciowej, której nie moglibyśmy do tej pory pomyśleć i wyrazić w ramach już istniejącego systemu (tj. jako koniunkcji z oraz y). Problem ten oczywiście występuje, jeżeli uznamy proces *bootstrapingu* za procedurę formułowania i testowania hipotez, zaś elementy struktury symboli znaczących (*placeholders*) wchodzące w skład tej procedury za wyrażenia kompozycjonalnie. Oczywiście Carey nie godzi się na uznanie swojej propozycji za procedurę testowania hipotez. Pierwsza faza *bootstrapingu* polega, jej zdaniem, na zapamiętaniu nośników znaczeń, druga zaś na wypełnianiu ich treścią. Proces ten nie ma więc charakteru dedukcyjnego, lecz nosi znamiona procedury konstruowania modelu i dobierania do niego odpowiedniej interpretacji. Jako taki opiera się on więc na indukcji i rozumowaniu przez analogię[19].

Jednakże propozycja Carey nie rozwiązuje problemu. Proces indukcji nie wykracza poza istniejący system pojęciowy, a co za tym idzie – nie dostarcza nowych pojęć atomowych. Wnioskowanie indukcyjne w istocie nie rozwija bowiem siły wyrazu posiadanego systemu pojęciowego poprzez wynalezienie nowego pojęcia, które byłoby jakościowo odmienne od pojęć już posiadanych. Formując wniosek indukcyjny (tj. np. gdy w oparciu o obserwację stu białych bocianów

---

[18] J.A. Fodor, *The Language of Thought.* Harvard University Press, Cambridge 1975; idem, *On the Impossibility of Acquiring "More Powerful" Structures: Fixation of Belief and Concept Acquisition*, (w:) M. Piatelli-Palmerini (red.), *Language and Learning*, Harvard University Press, Cambridge 1980, s. 142–162.

[19] S. Carey, *The Origin of Concepts*, s. 307 i 418.

stwierdzamy, że wszystkie bociany są białe), nie wychodzimy poza system pojęciowy, który już posiadamy, dokonujemy jedynie nowego powiązania już istniejących pojęć bazowych. Rozumowanie indukcyjne nie dostarcza nam pojęć „wszystkiego", „bociana" i „bieli", wybiera jedynie w oparciu o już istniejący system pojęciowy wniosek, który się nie zawiera w przesłankach (tj. nie daje się z nich dedukcyjne wyprowadzić), a zatem *de facto* nie poszerza systemu pojęciowego poprzez wprowadzenie nowych pojęć atomowych, które by nie były zawarte w już istniejącym systemie pojęciowym. Indukcja z pola możliwych hipotez wybiera jedną z nich, nie poszerzając przy tym samego tego pola. Problem ten dotyczy również rozumowania przez analogię. Trudno zatem sobie wyobrazić, jak puste symbole liczebnikowe mogą się stać liczebnikami dokładnymi bez uprzedniego zakładania ukrytego istnienia tych ostatnich. Wydaje się, że w pewnym sensie Carey w swojej propozycji teoretycznej takie ukryte istnienie *implicite* zakłada. Wychodzi to na jaw, gdy dokładniej przeanalizujemy proces *bootstrapingu*.

W gruncie rzeczy *bootstraping* składa się z dwóch podstawowych etapów. Pierwszy z nich polega na wypełnieniu znaczeniem symboli od jednego do czterech, drugi zaś na pozyskaniu zasady następnika, na skutek którego dziecko wkracza na poziom *cardinal-knower*. Zdaniem Carey, pierwszy etap odbywa się przy udziale reprezentacji wzbogaconego systemu paralelnej indywiduacji (*Enriched Paralel Individuation System* – EPIS). Wzmocnienie systemu śledzenia obiektów polega na wzbogaceniu jego przedstawień o pojęcia zbioru, zaczerpnięte z zasobów gramatyki uniwersalnej. Jak słusznie zauważa Carey, wzmocnienie jest konieczne, gdyż system śledzenia obiektów nie dostarcza reprezentacji zbioru, lecz jedynie reprezentacje kolekcji do czterech obiektów, a ściśle rzecz ujmując, tworzy mentalny model zbudowany z maksymalnie czterech odrębnych niepowiązanych między sobą symboli. Znaczenie pojęcia „jeden" stanowi zatem reprezentację systemu EPIS, która składa się z reprezentacji zbioru, dostarczanej przez reguły kwantyfikacji gramatyki uniwersalnej, oraz przedstawienia jednego symbolu dostarczanego przez system śledzenia obiektów. Jak pisze Carey i Le Corre: „Tak więc znaczeniem »jeden« byłby $\{i_a\}$ – model zawierający pojedynczy indywidualny obiekt. Znaczenie »jeden« byłoby więc na tym etapie tożsame ze znaczeniem określenia determinującego liczbę pojedynczą (ang. '*a*')"[20]. Znaczeniem terminu „dwa" byłby, w analogii do powyższej przytoczonego przykładu, model złożony z dwóch obiektów, który odpowiada językowemu określeniu liczby mnogiej, a więc jak przedstawia go Carey i La Corre: $\{i_a, i_b\}$.

W pewnym sensie EPIS dostarcza reprezentacji zbioru o określonej liczbie elementów, nie jest to jednak jeszcze tożsame z reprezentacją wartości kardynal-

---

[20] M. La Corre, S. Carey, *One, Two, Three, Four, Nothing More: An Investigation of the Conceptual Sources of the Verbal Counting Principles*, „Cognition" 2007, nr 105, s. 400.

nej zbioru, czyli, zgodnie ze słowami Cantora, własnością będącą efektem abstrakcji od wszystkich właściwości elementów i ich wzajemnych relacji. EPIS, mimo wzmocnienia systemu paralelnej indywiduacji o pojęcie zbioru, w dalszym ciągu dostarcza reprezentacji liczebności jedynie *implicite*. Domeną modeli wzbogaconego systemu śledzenia obiektów nie jest bowiem określona liczba, lecz grupa określonych obiektów rozumiana jako pewna jedność w wielości. Pojęcie zbioru ma więc w wypadku reprezentacji EPIS charakter potoczny. W zgodzie z postulowanym przez Carey zjawiskiem nieciągłości procesu uczenia, *bootstraping* stanowi proces, w którym nowo powstały system reprezentacyjny znacznie przewyższa siłą wyrazu systemy służące za komponenty jego konstytucji. Jeżeli system liczb dokładnych ma faktycznie wnosić coś do siły wyrazu posiadanych uprzednio systemów wiedzy rdzennej, a nie być jedynie kompozycjonalną koniunkcją składników uprzednio istniejących systemów, to nie może dawać się zredukować do reprezentacji owych systemów. Musi zatem dostarczać reprezentacji wykraczających poza potocznie rozumiane pojęcie zbioru. Innymi słowy – jeżeli system EPIS dostarcza reprezentacji grupy/zbioru trzech krzeseł, jabłek, kropek, itd., to system liczb dokładnych musi dostarczać reprezentacji pojęcia kardynalności wszystkich reprezentowanych przez EPIS zbiorów, w których system śledzenia obiektów mentalnie angażuje trzy symbole. Proces ten ma, zdaniem Carey, dokonywać się na drodze interpretacji przebiegającej w oparciu o reguły wnioskowania indukcyjnego. Formalnie zatem rzecz biorąc, stanowi on proces przechodzenia od przesłanek:

1. Symbol liczebnika „1” oznacza partykularną reprezentację EPIS $\{a\}$,
2. Symbol liczebnika „1” oznacza partykularną reprezentację EPIS $\{b\}$,
3. Symbol liczebnika „1” oznacza partykularną reprezentację EPIS $\{c\}$,

... (itd. dla n przypadków, gdzie $n \neq \infty$),

do wniosku:

$\forall_x$ „Symbol liczebnika 1” oznacza jednoelementową reprezentacje EPIS$\{x\}$.

Informacja zawarta we wniosku stanowi zatem efekt abstrakcji od wszystkich właściwości dostarczanych przez system śledzenia obiektów z wyjątkiem liczebności złożonego z nich zbioru i dodatkowo jest ona uogólnieniem tej właściwości na wszystkie partykularne reprezentacje dostarczane przez ów system. Innymi słowy – ciąg obserwacji szczegółowych przypadków zostaje podciągnięty pod ogólne prawo we wniosku.

Podstawowym problemem propozycji Carey okazuje się być więc problem ogólności wniosku. Na jakiej bowiem zasadzie z partykularnych obserwacji określonej liczy przesłanek następuje przejście do ogólnego prawa? Pojęcie ogólności nie występuje w żadnej z przesłanek, musimy zatem nim już uprzednio dysponować. Jakie jest więc jego źródło? Wydaje się, że jedynym źródłem, które może dostarczać pojęcia ogólności, są zasoby językowej kwantyfikacji, czerpane z rekursywnych funkcji gramatyki generatywnej. Oznacza to, że konstrukcja hipotezy, zgodnie z którą wszystkie partykularne przypadki reprezentacji EPIS {x} są desygnatami określonego symbolu liczebnika, dokonuje się w oparciu o ponowną rekursywną kwantyfikację zbiorowości, dokonywaną na wielości owych partykularnych reprezentacji. Zatem z kognitywnego punktu widzenia operacja kwantyfikacji w proponowanej przez Carey teorii jest ugruntowana w językowych zasobach gramatyki generatywnej, operujących na reprezentacjach dostarczanych przez pozostałe systemy wiedzy rdzennej. Pojęcia kwantyfikatorów są zatem w pewnym sensie wrodzone, gdyż stanowią pierwotny mechanizm przetwarzania informacji wszystkich istot wyposażonych w język. Jeżeli jednak dysponujemy „wrodzonym" pojęciem kwantyfikatora, to system reprezentacji liczby dokładnej, powstający przy udziale EPIS i językowych zasobów kwantyfikacji, stanowi jedynie kompozycjonalne złożenie elementów dostarczanych przez reprezentacje systemów wiedzy rdzennej. Jako taki nie wnosi on *de facto* nic nowego do siły wyrazu systemu liczb dokładnych. Nowy systemu reprezentacji jest zatem, wbrew postulatom Carey, ciągły w stosunku do uprzednio posiadanych systemów pojęciowych.

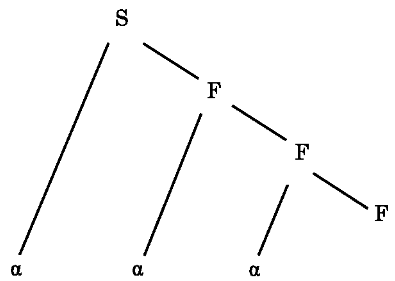
Co więcej, powyższe rozwiązanie w gruncie rzeczy dopuszcza możliwość całkowitej rezygnacji z udziału reprezentacji EPIS w procesie genezy systemu reprezentacji liczby dokładnej. Do jego ukształtowania wystarczają bowiem same mechanizmy gramatyki uniwersalnej, które dostarczają rekursywnych funkcji w pełni umożliwiających konstytucję systemu dokładnej reprezentacji numerycznej. Zgodnie z wysuwaną przez Chomsky'ego silną hipotezą językowego źródła genezy kompetencji matematycznych, „ludzkie zdolności numeryczne są w istocie »abstrakcją« z języka naturalnego, która zachowuje mechanizm dyskretnej nieskończoności, eliminując pozostałe cechy właściwe językowi"[21]. Propozycja Carey w dużym stopniu okazuje się być zbliżona, a być może wręcz redukowalna, do intuicji Chomskiego. Innymi słowy – zakładając, że zasoby gramatyki generatywnej odpowiadają za reprezentacje zbioru jednoelementowego (liczby pojedynczej) i zbioru więcej niż jednoelementowego (liczby mnogiej), mogą zostać opisane odpowiednio za pomocą zmiennych α i β, to pojęcie zbioru trzyele-

[21] N. Chomsky, *Language and Problems of Knowledge*, MIT Press, Cambridge 1988, s. 169. Gwoli ścisłości należy odnotować, że w późniejszym okresie Chomsky nieznacznie zmodyfikował swoje poglądy odnośnie do związku zdolności językowych i numerycznych, uznając system reprezentacji numerycznej za fenomen nie tyle ugruntowany w językowych funkcjach gramatyki generatywnej, ile w typowo ludzkiej umiejętnościach przeprowadzania rekursywnych komputacji – zob. M. Hauser, N. Chomsky, W. Fitch, *The Faculty of Language: What Is It, who has it, and How Did It Evolve?*, „Science" 2002, nr 298, s. 1569–1579. Reguły gramatyki generatywnej są więc takim samym efektem rekursywnych procesów obliczeniowych umysłu, co systemy reprezentacji liczbowej. Modyfikacja ta nie osłabia jednak w żaden sposób argumentu, zgodnie z którym zasoby wzbogaconego systemu paralelnej indywiduacji są w gruncie rzeczy zbędne do wyjaśnienia zdolności nabywania systemu reprezentacji numerycznych. Same rekursywne funkcje obliczeniowe umysłu są bowiem w zupełności wystarczające.

mentowego, a co za tym idzie – również n-elementowego można uzyskać dzięki pozyskaniu reguły następnika S. Tę ostatnią można zaś formalnie wyrazić pod postacią prostej gramatyki języka rekursywnego opartego na następujących regułach:

(1) $S \Rightarrow \alpha + F$
$F \Rightarrow \alpha + F$
$F \Rightarrow \varnothing$

Pierwsza reguła stanowi regułę następnika dla F, druga generuje zbiór jednoelementowy, trzecia zaś zbiór pusty. Zbiór powyższych reguł można przedstawić w postaci struktury zdaniowej, którą one generują:



Rys. 3. Reprezentacja struktury języka rekursywnego zgodnie ze zbiorem reguł (1)
Źródło: opracowanie własne.

Pojęcie zbioru jednoelementowego, reprezentowane przez zmienną α, jest pojęciem pierwotnym w powyższym języku, gdyż stanowi w istocie pochodną językowej operacji kwantyfikacji rozgrywającej się w głębokich warstwach gramatyki generatywnej. Operacje kwantyfikacji również mogą zostać opisane analogicznym zbiorem rekursywnych reguł:

(2) $\forall\{x\} + \forall$
$\forall\{x\} + \exists$
$\exists\{x\}$

Oznacza to, że pojęcie mocy zbioru, którego pozyskanie stanowi efekt końcowy procesu *bootstrapingu*, jest w istocie pojęciem pierwotnym reguł gramatyki generatywnej, będących punktem wyjścia opisanego przez Carey procesu. *Bootstraping* zatem nie jest w istocie procesem uczenia dostarczającym systemu reprezentacji nieciągłego względem systemów wiedzy rdzennej, gdyż nowe pojęcia, jakie mają w jego efekcie powstawać, są już *implicite* założone w komponentach, w oparciu o które postulowany przez Carey proces się dokonuje. Jeżeli zatem zakładane *implicite* przez autorkę *The Origin of Concepts* pojęcie zbioru wespół z powszechnymi dla gatunku ludzkiego rekursywnymi regułami gramatyki generatywnej całkowicie wystarczają do wygenerowania reprezentacji pojęcia liczby dokładnej, to propozycja Carey okazuje się być formą arytmetycznego natywizmu, nie zaś konstruktywistyczną teorią nabywania systemu reprezentacji liczbowej nieciągłej względem wrodzonych zasobów wiedzy rdzennej. Problem braku powszechności dokładnych systemów reprezentacji liczbowej we wszystkich kulturach dotyczy również teorii *bootstrapingu*. Skoro bowiem pojęcie zbioru, które jako produkt procesu uczenia ma wzbogacać siłę wyrazu nowo powstałego systemu reprezentacji, jest cały czas *implicite* obecne w powszechnych dla gatunku ludzkiego regułach gramatyki generatywnej, to kwestia kulturowego relatywizmu dokładnych reprezentacji liczbowych w dalszym ciągu pozostaje niewyjaśniona. Jak na ironię, okazuje się zatem, że Carey podcina gałąź, na której sama siedzi, gdyż krytyczne argumenty wysnuwane przez nią pod adresem propozycji natywistycznych uderzają również w jej teorię nabywania dokładnych reprezentacji liczbowych.

Literatura

Bürger G.A., *Przygody barona Münchhausena*, przeł. H. Januszewska, Nasza Księgarnia, Warszawa 1956.

Carey S., *Evolutionary and Ontogenetic Foundations of Arithmetic*, „Mind and Language" 2001, nr 16(1), s. 37–55.

Carey S., *Bootstrapping and the Origins of Concepts*, „Daedalus" 2004, nr 133(1), s. 59–68.

Carey S., *The Origin of Concepts*, Oxford University Press, New York 2009.

Chomsky N., *Language and Problems of Knowledge*, MIT Press, Cambridge 1988.

Feigenson L., Dehaene S., Spelke E., *Core Systems of Number*, „Trends in Cognitive Sciences" 2004, nr 8(10), s. 307–314.

Fodor J.A., *The Language of Thought*, Harvard University Press, Cambridge 1975.

Fodor J.A., *On the Impossibility of Acquiring "More Powerful" Structures: Fixation of Belief and Concept Acquisition*, (w:) M. Piatelli-Palmerini (red.), *Language and Learning*, Harvard University Press, Cambridge 1980, s. 142–162.

Gelman R., Gallistel C., *The Child's Understanding of Number*, Harvard University Press, Cambridge 1978.

Gallistel C., Gelman R., *The What and How of Counting*, „Cognition" 1990, nr 44, s. 43–74.

Gelman R., Gallistel C., *Language and the Origin of Numerical Concepts*, „Science" 2004, nr 306, s. 441–443.

Hauser M., Chomsky N., Fitch W., *The Faculty of Language: What Is It, Who Has It, and How Did It Evolve?*, „Science" 2002, nr 298, s. 1569–1579.

Izard V., Pica P., Spelke E., Dehaene S., *Exact Equality and Successor Function: Two Key Concepts on the Path towards Understanding Exact Numbers*, „Philosophical Psychology" 2008, nr 21(4), s. 491–505.

La Corre M., Carey S., *One, Two, Three, Four, Nothing More: An Investigation of the Conceptual Sources of the Verbal Counting Principles*, „Cognition" 2007, nr 105, s. 395–438.

Piazza M., *Neurocognitive Start-up Tools for Symbolic Number Representations*, „Trends in Cognitive Sciences" 2010, nr 14(12), s. 542–551.

Pica P., Lemer C., Izard V., Dehaene S., *Exact and Approximate Arithmetic in an Amazonian Indigene Group*, „Science" 2004, nr 306, s. 499–503.

Pica P., Lecomte A., *Theoretical Implications of the Study of Numbers and Numerals in Mundurucu*, „Philosophical Psychology" 2008, nr 21(4), s. 507–522.

Spalke E., Breinlinger K., Macomber J., Jacobson K., *Origins of Knowledge*, „Psychological Review" 1992, nr 99(4), s. 605–632.

Spelke E., *Core Knowledge*, „American Psychologist" 2000, nr 55, s. 1233–1243.

Spelke E., Tsivkin S., *Initial Knowledge and Conceptual Change: Space and Numer*, (w:) M. Bowerman, S. Levinson, *Language Acquisition and Conceptual Development*, Cambridge University Press, Cambridge 2001, s. 70–97.

Spelke E., *What Makes Us Smart? Core Knowledge and Natural Language*, (w:) D. Gentner, S. Goldin-Meadow (red.), *Language in Mind: Advances in the Investigation of Language and Thought*, MIT Press, Cambridge 2003, s. 277–311.

Sarnecka B.W., *Learning to Represent Exact Numbers*, „Synthese" 2015, s. 1–18.

Wynn K., *Children's Understanding of Counting*, „Cognition" 1990, nr 36, s. 155–193.