Łukasz Kuźmiński
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wydział Inżynieryjno-Ekonomiczny
Katedra Metod Ilościowych w Ekonomii
lukasz.kuzminski@ue.wroc.pl

ZASTOSOWANIE TEORII WARTOŚCI EKSTREMALNYCH W PROGNOZOWANIU OSTRZEGAWCZYM W HYDROLOGII DLA CIĄGU NIEZALEŻNYCH ZMIENNYCH O ROZKŁADZIE LOGARYTMICZNO-NORMALNYM

Streszczenie: Opracowanie dotyczy zastosowań teorii granicznych rozkładów dla ekstremów w prognozach ostrzegawczych dla ciągu zmiennych losowych o rozkładzie logarytmiczno-normalnym. Początek pracy zawiera elementy teorii dotyczącej statystyk pozycyjnych. W dalszej części przedstawiono podstawowe twierdzenia związane z teorią rozkładów typów ekstremalnych i dziedzin przyciągania. Na koniec zaprezentowano badania empiryczne, w których zbudowano model prognoz ostrzegawczych dla charakterystyk hydrologicznych. Wykorzystane w pracy dane dotyczą stanów wód na wybranej rzece Dolnego Śląska.

Słowa kluczowe: statystyki pozycyjne, dystrybuanta graniczna, typy rozkładów ekstremalnych, prognoza ostrzegawcza, charakterystyki hydrologiczne.

Wprowadzenie

Ekstremalne wartości określonych charakterystyk w różnych dziedzinach życia są w większości przypadków zjawiskiem o niekorzystnym działaniu. Charakterystyki meteorologiczne i hydrologiczne, przyjmując ekstremalne wartości, przyczyniają się do wielu różnego rodzaju zjawisk o działaniu katastroficznym. Na rynkach finansowych ekstremalne wartości pewnych charakterystyk powodują straty finansowe. Wpływu wartości ekstremalnych nie da się powstrzymać.

Można jedynie przygotować się odpowiednio wcześnie na efekt ich działania. Do tego celu wykorzystuje się systemy prognoz ostrzegawczych.

W tym opracowaniu przedstawiono rozwiązanie procesu budowy prognoz ostrzegawczych oparte na granicznych rozkładach ekstremów monitorowanej zmiennej, przy założeniu, że zmienne losowe będą pochodzić z populacji o rozkładzie logarytmiczno-normalnym.

1. Ekstrema jako jedne ze statystyk pozycyjnych i ich rozkłady

Jeśli zmienne losowe $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ zostaną uporządkowane w kolejności i wtedy zapiszemy je jako:

$$\xi_{(1)} \leq \ldots \leq \xi_{(n)},$$

to $\xi_{(i)}$ będziemy określać jako i-tą statystykę pozycyjną zmiennych losowych, natomiast $F_{(i)}(x)$ będzie oznaczać dystrybuantę i-tej statystyki pozycyjnej. Zakładamy, że $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ będzie ciągiem n niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach lub inaczej mówiąc o wspólnej dystrybuancie $F(x)$. Przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczymy odpowiednio realizacje zmiennych losowych $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Przez M_n oznaczymy n-tą statystykę pozycyjną, będącą maksimum, którą określa wzór:

$$M_n = \max(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \tag{1}$$

Dystrybuanta największej statystyki pozycyjnej będzie oznaczona jako $F_{(n)}(x)$ i określona następującym wzorem:

$$F_{(n)}(x) = P\left\{M_n \leq x\right\} = P\left\{wszystkie\ \xi_i \leq x\right\} = F^n(x) \tag{2}$$

gdzie $F(x)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej ξ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Więcej na temat elementów teorii statystyk pozycyjnych można znaleźć w pracy [David, Nagaraja, 2003].

2. Asymptotyczne rozkłady ekstremów – elementy teorii

W punkcie tym przedstawiono zarys teorii asymptotycznych rozkładów dla ekstremów zmiennych losowych. Klasyczna teoria wartości ekstremalnych w szczególności określa możliwe postacie dystrybuant granicznych dla ekstremów (maksimów i minimów) w ciągach niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach. Z uwagi na asymptotyczny charakter tej teorii jej własności są utrzymane w szczególności, gdy $n \to \infty$. Oczywiście wszystkie wyniki uzyskane dla maksimów M_n prowadzą do otrzymania wyników dla minimów m_n poprzez prostą relację:

$$m_n = \min\left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right) = -\max\left(-\xi_1, \ldots, -\xi_n\right). \tag{3}$$

W skończonych warunkach dystrybuantę statystyki M_n określa wzór (2); dla warunków skończonych jest szeroko stosowana. W tym miejscu można sobie postawić pytanie: po co zgłębiać i stosować teorię rozkładów asymptotycznych dla ekstremów, skoro teoria w warunkach skończonych jest dobrze znana i daje dobre wyniki? Odpowiedź jest bardzo prosta: w teorii asymptotycznej nie musimy znać dystrybuanty rozkładu zbyt precyzyjnie, żeby swobodnie stosować ją do rozwiązywania rzeczywistych problemów. W rzeczy samej, niezdegenerowana dystrybuanta rozkładu M_n musi należeć do jednej z trzech możliwych rodzin dystrybuant, niezależnie od oryginalnej dystrybuanty $F(x)$ zmiennych ξ_i ($i = 1, \ldots, n$). Wystarczającym jest wiedzieć, do której dziedziny przyciągania (*domain of attraction*) trzech rodzin dystrybuant granicznych należy rozpatrywany rozkład ekstremum.

Na początku powinniśmy być zainteresowani warunkami, przy których, dla odpowiednio znormalizowanych stałych, $a_n > 0$ i b_n,

$$P\left\{a_n(X_{(n)} - b_n) \le x\right\} \xrightarrow{w} G(x) \tag{4}$$

(gdzie $\xrightarrow{w}$ oznacza, że zbieżność pojawia się przy ciągłych punktach funkcji G). Teoria ta ukazuje również, że niezdegenerowane dystrybuanty G, które mogą pojawić się jako ograniczenia we wzorze (4) mają jedną z trzech parametrycznych form podanych poniżej we wzorze (5), nazywanych *rozkładami wartości ekstremalnych*:

$$\begin{aligned}
&\text{Typ I: } G(x) = \exp\left(-e^{-x}\right), \quad -\infty < x < \infty \\
&\text{Typ II: } G(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right), & \text{dla pewnego } \alpha > 0,\ x > 0 \end{cases} \\
&\text{Typ III: } G(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(-x\right)^{\alpha}\right) & \text{dla pewnego } \alpha > 0,\ x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5}$$

Powyższe stwierdzenia wyraża teza twierdzenia, które zamieszczono w dalszej części pracy. Wykorzystując wzory (2) i (4), możemy zapisać że:

$$F^n(a_n^{-1}x + b_n) \xrightarrow{w} G(x) \tag{6}$$

Jeśli warunek ze wzoru (6) jest spełniony dla pewnych stałych $\{a_n > 0\}$, $\{b_n\}$, to oznacza, że F należy do obszaru przyciągania (dla maksimów) funkcji G i zapisuje się to jako $F \in D(G)$. Więcej szczegółowych informacji na temat tej teorii można znaleźć w pracach [Leadbetter i in., 1983; Galambos, 1978].

3. Ogólna teoria dziedzin przyciągania

Punkt ten rozpoczęto od przedstawienia dwóch istotnych twierdzeń związanych z dziedzinami przyciągania. Pierwsze z nich mówi, że dystrybuanta określonego rozkładu jest max-stabilna, jeśli i tylko jeśli jest takiego samego typu jak jedna z dystrybuant rozkładów wartości ekstremalnych.

Twierdzenie 1. Każdy max-stabilny rozkład jest typem wartości ekstremalnych (*extreme value type*), np. równa się $G(ax + b)$ dla pewnych $a > 0$ *i* b, gdzie dystrybuanty $G(x)$ są postaci jak we wzorze (5). Dowód twierdzenia jest zawarty w M.R. Leadbetter i in. [1983].

Twierdzenie 2. Niech $M_n = \max(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, gdzie ξ_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach. Jeśli dla pewnych stałych $a_n > 0$, b_n, mamy:

$$P\{a_n(M_n - b_n) \le x\} \xrightarrow{w} G(x) \tag{7}$$

dla pewnej niezdegenerowanej dystrybuanty G, wtedy G jest jedną z trzech dystrybuant granicznych typów wartości ekstremalnych danych wzorem (5). Odwrotnie, każda dystrybuanta G typów wartości ekstremalnych może występować jako ograniczenie w (7); faktycznie występuje, kiedy G sama sobie jest dystrybuantą każdej zmiennej ξ_i.

Zauważmy teraz, że twierdzenie 2 zakłada, że $a_n(M_n - b_n)$ ma niezdegenerowaną dystrybuantę graniczną i wtedy dowodzi, że G musi mieć jedną z trzech określonych form.

Praktycznym aspektem w teorii dziedzin przyciągania jest to, żeby wiedzieć, którą z trzech dystrybuant granicznych określonych wzorem (5) użyć, kiedy każda zmienna losowa ξ_n ma rozkład opisany przez dystrybuantę F, podkreślając, że postać dystrybuanty nie musi być precyzyjnie określona.

W omawianej teorii znane są praktyczne twierdzenia, które definiują pewne proste i użyteczne, a zarazem wystarczające warunki, które stosuje się kiedy dystrybuanta rozkładu F ma funkcję gęstości prawdopodobieństwa f do sprawdzenia, do której z trzech dziedzin przyciągania należy dystrybuanta maksimum rozpatrywanego ciągu zmiennych $\{\xi_n\}$. Z uwagi na ograniczone ramy tej pracy, pomijamy ich prezentacje i odsyłamy do pracy de Haan [1976].

Jeżeli określony rozkład prawdopodobieństwa posiada dystrybuantę graniczną dla ekstremum, to w myśl twierdzenia 2 jest ona jedną z trzech typów danych wzorem (5).

W niniejszej pracy będziemy zajmować się danymi o rozkładzie logarytmiczno-normalnym. W związku z tym w tym miejscu przedstawiono definicję rozkładu logarytmiczno-normalnego.

Definicja 1. Zmienna losowa X typu ciągłego ma rozkład logarytmiczno-normalny z parametrami μ i σ^2 $(\mu \in \mathrm{R}, \sigma > 0)$, który oznaczamy przez $LN(\mu, \sigma^2)$, jeżeli jej funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest postaci:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \text{ [por. Magiera, 2002].}$$

Wartość oczekiwana i wariancja dla tego rozkładu dane są wzorami:

$$E(X) = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 + \mu \right), \qquad V(X) = \exp\left(\sigma^2 + 2\mu\right)\left(\exp\sigma^2 - 1\right).$$

Poniżej przedstawiono twierdzenie pokazujące, do którego typu należy dystrybuanta graniczna rozkładu maksimum i jak wyznaczyć stałe normujące a_n i b_n w przypadku gdy zmienne losowe ξ_i mają rozkład logarytmiczno-normalny otrzymany przez monotoniczną transformację rozkładu normalnego.

Twierdzenie 3. Jeśli f jest monotoniczną rosnącą funkcją i $\xi_i^{'} = f(\xi_i)$, wtedy prosto otrzymujemy $M_n^{'} = \max(\xi_1^{'}, ..., \xi_n^{'}) = f(M_n)$. Jeśli $\{\xi_i\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach, takim że spełniona jest zbieżność (4), to wtedy mamy:

$$P\left\{ M_n \le \frac{x}{a_n} + b_n \right\} \to G(x) \text{ tak, że } P\left\{ M_n^{'} \le f\left(\frac{x}{a_n} + b_n \right) \right\} \to G(x).$$

W niektórych przypadkach funkcja f może być rozbudowana i utrzymanie liniowych warunków daje graniczną dystrybuantę G dla $M_n^{'}$ z przekształconymi stałymi normującymi $a_n^{'} = \frac{a_n}{f'(b_n)}$, $b_n^{'} = f(b_n)$. Jeśli zmienne losowe ξ_i mają rozkład normalny, wtedy stałe normujące a_n i b_n określają relacje (8) i (9) podane poniżej:

$$a_n = (2\log n)^{1/2} \tag{8}$$

$$b_n = (2\log n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2\log n)^{-1/2}(\log\log n + \log 4\pi) \tag{9}$$

Dowód znajduje się w pracach [Leadbetter i in., 1983; David, Nagaraja, 2003].

Biorąc $f(x) = e^x$ otrzymujemy zmienne losowe $\xi_n^{'}$ o rozkładzie logarytmiczno-normalnym, dla których:

$$P\left\{M_n^{'} \le \exp\left(\frac{x}{a_n} + b_n\right)\right\} \to G(x) = \exp(-e^{-x}). \tag{10}$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy wyrażenie:

$$P\left\{M_n^{'} \le \frac{e^{b_n}}{a_n}x + e^{b_n}\right\} \to G(x) = \exp(-e^{-x}), \tag{11}$$

z którego można określić, że zmienna losowa $M_n^{'}$ ma dystrybuantę graniczną I typu (patrz wzór (5)) ze stałymi normującymi postaci:

$$a_n^{'} = a_n e^{-b_n} \tag{12}$$

$$b_n^{'} = e^{b_n}. \tag{13}$$

Ostatecznie wyrażenie (11) możemy zapisać w postaci:

$$P\left\{M_n^{'} \le a_n^{'}x + b_n^{'}\right\} \to G(x) = \exp(-e^{-x}). \tag{14}$$

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w pracy M.R. Leadbetter i in. [1983].

4. Prognozy ostrzegawcze w hydrologii

W tej sekcji wprowadzono pojęcie prognozy ostrzegawczej jako zapowiedzi wystąpienia zdarzenia traktowanego przez odbiorcę jako niekorzystne. Precyzyjnie prognozę ostrzegawczą określa definicja 2, która jest jedną z wielu, jakie można spotkać w literaturze przedmiotu, ale najbardziej pasuje do problematyki niniejszego opracowania.

Definicja 2. Prognozą ostrzegawczą jest stan zmiennej w momencie lub okresie należącym do przyszłości, gdy przewiduje się niekorzystne kształtowanie się kontrolowanej zmiennej na podstawie informacji dostarczonej przez szereg czasowy [por. Siedlecka, 1996].

Zadaniem prognozy ostrzegawczej jest dostarczenie na czas informacji o wystąpieniu w przyszłości niekorzystnej wartości monitorowanej charakterystyki. Jak z tego wynika, prognozy ostrzegawcze stanowią specyficzny rodzaj przewidywania, nie dotyczą one bowiem wyznaczania przyszłej wartości monitorowanej zmiennej, lecz tylko faktu, że wartość monitorowanej zmiennej przekroczy wyznaczony poziom lub będzie niższa od danego poziomu w zależności od charakteru badanego zjawiska. W takim kontekście prognoza ostrzegawcza jest prognozą jakościową, ponieważ dotyczy zdarzenia lub sytuacji, które można zapisać w arytmetyce binarnej (+), (–) lub 0, 1 [por. Siedlecka, 1996].

Ograniczając szerokie zastosowanie prognoz ostrzegawczych jedynie do dziedziny hydrologii, należy również ograniczyć zbiór zmiennych kontrolowanych w procesie prognozowania ostrzegawczego. W hydrologii jednym z wielu zadań prognoz ostrzegawczych jest monitorowanie takiej charakterystyki, jak stany wód w rzekach w celu ochrony przeciwpowodziowej. Charakterystykę wymienionej zmiennej prezentuje definicja 3.

Definicja 3. Stan wody jest to wzniesienie zwierciadła wody w cieku ponad umowny poziom odniesienia (co nie jest równoznaczne z głębokością cieku).

Należy rozróżnić pojęcia „stan wody" i „poziom wody". Są to te same wielkości fizyczne, jednak podawane względem różnych odniesień. Poziomy terenu liczymy od przyjętego poziomu morza, dlatego wysokość, na której znajdują się obiekty na Ziemi wyrażamy w metrach nad poziomem morza. W Polsce sieć wodowskazowa jest obecnie odniesiona do poziomu morza w Kronsztadzie w Rosji. Dla uproszczenia zapisu wzniesienie zwierciadła wody liczymy od ustalonego „zera" wodowskazu. Taki pomiar nazywamy stanem wody, w odróżnieniu od poziomów liczonych względem przyjętego zera niwelacji. W praktyce zera są ustalane poniżej najniższego stanu wody w celu uniknięcia wartości ujemnych wynikających z możliwej erozji dennej pogłębiającej np. dno rzeki. Rzędna zera każdego wodowskazu jest określona w odniesieniu do państwowej sieci niwelacyjnej, dlatego też mając tę informację jesteśmy w stanie wyznaczyć poziom wody. Na podstawie wieloletnich pomiarów można określić charakterystyczny rozkład stanów wody dla danej rzeki w danym miejscu. Wyznacza się wówczas następujące strefy stanów wody: strefę stanów niskich, strefę stanów średnich, strefę stanów wysokich, stan ostrzegawczy, stan alarmowy.

Wymienionym powyżej opisom dla danej rzeki w określonym miejscu są przyporządkowane konkretne wartości liczbowe, według których identyfikuje się rodzaj stanu wody w punkcie pomiaru na podstawie zaobserwowanego stanu w danym czasie t.

W tym opracowaniu prognoza będzie budowana dla stanu wody obserwowanym na rzece Odra w stacji Oława.

5. Budowa modelu prognoz ostrzegawczych na podstawie danych empirycznych

W niniejszym artykule analizie zostały poddane stany wód na rzece Odra. Wykorzystamy dzienne dane dotyczące stanów wód, uzyskane ze stacji na wodach powierzchniowych w Oławie, pochodzące z Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej w Warszawie. Na potrzeby budowy prognoz ostrzegawczych dysponujemy dziennymi stanami wód za okres 01.1961–12.2011 r. (18 627 obserwacji) ze stacji w Oławie.

Z uwagi na fakt, iż w tej pracy zajmujemy się przypadkiem, w którym są analizowane ciągi niezależnych zmiennych losowych do budowy prognoz ostrzegawczych, wzięte zostały stany wód pochodzące z co 30 dnia. Taki zabieg miał na celu zminimalizowanie prawdopodobieństwa wystąpienia zależności pomiędzy danymi z sąsiadujących okresów.

Istotnym, a zarazem pierwszym punktem w praktycznym zastosowaniu teorii dystrybuant granicznych dla ekstremów jest ustalenie typu rozkładu danych analizowanej populacji.

W tej pracy przyjęto, że badany ciąg zmiennych losowych $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach logarytmiczno-normalnych. Zmienne losowe ξ_s i ξ_{s+1} są oddalone od siebie w czasie o 30 dni. Z uwagi na fakt, iż wstępny ciąg zmiennych losowych dotyczących dziennych stanów wód został na potrzeby analizy zastąpiony przez ciąg zmiennych losowych przedstawiający stany wód co 30 dni liczba zmiennych losowych zmniejszyła się 30-krotnie. Dla ciągu zmiennych losowych $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $n = 621$. Hipoteza o logarytmiczno-normalnym rozkładzie analizowanego ciągu zmiennych losowych została poddana testowaniu za pomocą dwóch dobrze znanych testów: testu zgodności chi-kwadrat i testu zgodności Kołmogorowa. Wartości *p-value* dla obu testów przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1. Wartości *p-value* dla testów na rozkład logarytmiczno-normalny

	Test zgodności chi-kwadrat	Test zgodności Kołmogorowa
$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$	$p_v = 0{,}214$	$p_v = 0{,}999$

Źródło: Opracowanie własne.

Wyniki z tab. 1 pokazują, że na poziomie istotności α = 0,1 można przyjąć, że stan wody w badanej stacji ma rozkład logarytmiczno-normalny.

W związku z tymi wynikami, do obliczenia prognoz ostrzegawczych dla badanego punktu pomiarowego wykorzystamy graniczną dystrybuantę typu I. Przekształcając relację (14), otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$P\left\{M_n^{'} \le \frac{x}{a_n^{'}} + b_n^{'}\right\} \to \exp\left(-e^{-\left(\frac{x}{a_n^{'}}+b_n^{'}\right)}\right), \tag{15}$$

z którego łatwo wyznaczymy prawdopodobieństwa dla określonych wartości maksimów badanych zmiennych. Prawdopodobieństwa osiągania przez badane zmienne określonych wartości będą stanowić prognozy ostrzegawcze. Stałe normujące $a_n^{'}$ *i* $b_n^{'}$ w wyrażeniu (15) dla badanego ciągu zmiennych losowych wyznaczamy, wykorzystując wzory (8), (9), (12) i (13). Wartości stałych normujących są przedstawione w tab. 2.

Tabela 2. Stałe normujące dla badanego ciągu

	$a_n^{'}$	$b_n^{'}$
$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $n = 621$	0,252	9,381

Źródło: Opracowanie własne.

Prognozy ostrzegawcze będą prawdopodobieństwami przekroczenia stanu ostrzegawczego i alarmowego przez maksima zmiennych ξ_i w ciągu o liczebności *n*. Stany ostrzegawcze i alarmowe oraz ich wartości standaryzowane badanej stacji pomiarowej są podane w tab. 3. Do standaryzacji wykorzystano parametry z prób: średnia i odchylenie standardowe dla analizowanego ciągu danych.

Tabela 3. Stany ostrzegawcze i alarmowe wraz z wartościami standaryzowanymi

	Stacja Oława
Stan ostrzegawczy	500 cm
Wartość standaryzowana dla stanu ostrzegawczego	2,41
Stan alarmowy	560 cm
Wartość standaryzowana dla stanu alarmowego	3,08

Źródło: Opracowanie własne.

Wyznaczone prognozy za pomocą wzoru (15) i danych z tab. 2 i 3 przedstawiono w tab. 4.

Tabela 4. Prognozy ostrzegawcze dla stacji Oława

	Stacja Oława
Prognoza stanu ostrzegawczego	$P\left(M_n^{'} > 500\right) = 0,00000000591$
Prognoza stanu alarmowego	$P\left(M_n^{'} > 560\right) = 0,000000000414$

Źródło: Opracowanie własne.

Analizując otrzymane wyniki, widać, że w stacji Oława na rzece Odrze prawdopodobieństwa przekroczenia stanu ostrzegawczego i alarmowego są bliskie zeru. Na uwagę zasługuje fakt, że wraz ze zmianą n w analizowanym ciągu zmiennych losowych prognozy w prosty sposób będą aktualizowane. Powoduje to, że przedstawiony model prognoz ostrzegawczych ma charakter dynamiczny i na bieżąco może być aktualizowany, dając rzeczywisty obraz sytuacji. Istotnym faktem jest również to, że jakość wyznaczanych prognoz jest wprost proporcjonalna do długości ciągu analizowanych zmiennych. Mówiąc wprost, im dłuższym szeregiem czasowym dysponujemy, tym uzyskiwane wyniki są lepsze. Oznacza to, że im dłużej prowadzimy monitoring, tym lepszej jakości prognozy uzyskujemy.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono podejście do prognozowania ostrzegawczego oparte na granicznych rozkładach dystrybuant ekstremów obserwowanych charakterystyk. Wyznaczono prognozy dotyczące stanu wody w wybranej stacji pomiarowej na rzece Odra. Zwrócono uwagę na to, że jedną z najważniejszych rzeczy przy takim podejściu do prognozowania ostrzegawczego jest odpowiednie dopasowanie rozkładu teoretycznego do analizowanych danych empirycznych. W rozpatrywanych przykładach poddano analizie ciągi zmiennych losowych o powszechnie znanym i stosowanym rozkładzie logarytmiczno-normalnym dla przypadku, w którym zmienne losowe są niezależne.

Istotnym faktem jest to, że zbudowany model prognoz ostrzegawczych ma charakter dynamiczny. Oznacza to, że może być na bieżąco aktualizowany. Daje to możliwość efektywnego monitoringu analizowanych charakterystyk i odpowiednio wczesne reagowanie na sygnały alarmujące.

Literatura

Galambos J. (1978), *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Wiley, New York.

David H.A., Nagaraja H.N. (2003), *Order Statistics*, John Wiley & Sons Inc.

Magiera R. (2002), *Modele i metody statystyki matematycznej*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław.

Leadbetter M.R., Lindgen G., Rootzén H. (1983), *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Siedlecka U. (1996), *Prognozy ostrzegawcze w gospodarce*, PWE, Warszawa.

THE APLICATION OF VALUE EXTREME THEORY IN WARNING FORECAST IN HYDROLOGY FOR SEQENCE OF INDEPENDENT LOGNORMAL RANDOM VARIABLES

Summary: The work applies to the application of the theory of limit distributions for extremes in warning predictions for the random variables sequences with lognormal distribution. The beginning of the work contains theory components concerned order statistics. In the next part of the work basic theorems connected to the theory of types distributions and gravity areas are presented. At the end of the work empirical research are presented, in which a model of warning predictions for hydrological characteristic is being built. Details, used in the work concern water conditions at one, selected river of Lower Silesia.

Keywords: warning forecast, order statistics, hydrology parameters, limit distribution function, types of extreme distributions.