

**Dariusz Siudak**

Politechnika Łódzka

---

## **ANALIZA PRAWDOPODOBIENSTW ZMIANY STANU PROCESU MIGRACJI WARTOŚCI PRZEDSIĘBIORSTW Z WYKORZYSTANIEM ŁAŃCUCHÓW MARKOWA**

---

**Streszczenie:** W opracowaniu podjęto analizę zachodzących na polskim rynku kapitałowym procesów migracji wartości. Do tego celu wykorzystano aparat matematyczny analizy procesu w postaci łańcuchów Markowa. Oszacowano prawdopodobieństwa przejść procesu migracji wartości pomiędzy fazami przyływu, odpływu i stabilizacji, zgodnie z modelem trzech faz migracji. Określono oczekiwany czas powrotu od wyjścia łańcucha z danego stanu do jego pierwszego powrotu do tego samego stanu. W długim okresie obserwowane są większe prawdopodobieństwa znalezienia się w fazie przyływu niż w fazie odpływu wartości. Niezależnie od początkowego stanu migracji wartości, w jakim znajduje się aktualnie przedsiębiorstwo, w długim okresie może osiągnąć każdy z pozostałych stanów. Ponadto analizowany proces migracji wartości cechuje się zmiennością. W okresie do 1 roku proces ten charakteryzuje niestabilność.

**Słowa kluczowe:** migracja wartości, łańcuchy Markowa, prawdopodobieństwo przejścia, oczekiwany czas powrotu łańcucha.

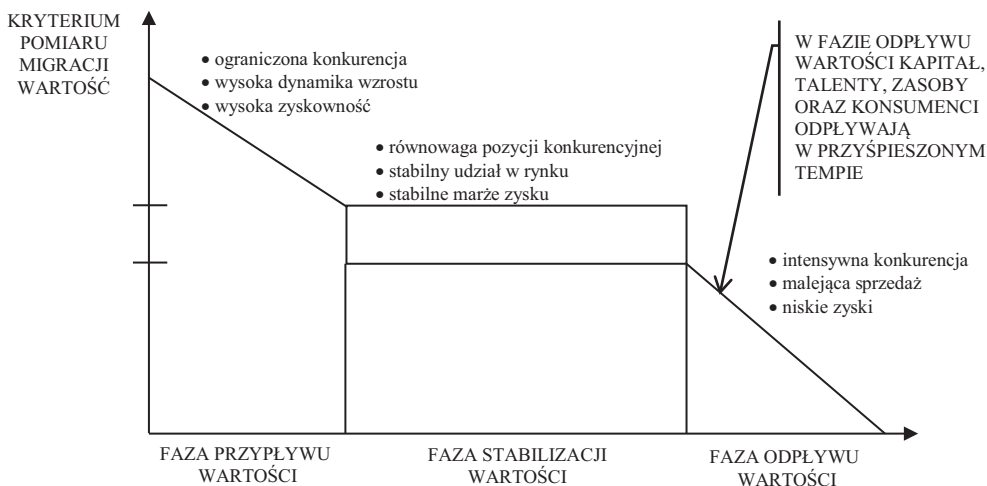
### **1. Wstęp**

Migracja wartości przedsiębiorstw jest to przepływ wartości pomiędzy przedsiębiorstwami w wyniku poszukiwania możliwości inwestycji w efektywne modele działalności biznesowej, kreujące właścicielom zaangażowanego weń kapitału możliwie najwyższą stopę zwrotu przy akceptowalnym przezeń ryzyku [Siudak 2013b, s. 33]. Według P. Phillipsa migracja wartości stanowi zmianę siły kreowania wartości [Phillips 2012, s. 36].

W latach 2002-2007 do przedsiębiorstw notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie nieprzerwanie napływała wartość spoza polskiego rynku giełdowego oraz z innych możliwości alokacji kapitału. Łączne saldo migracji wartości liczone jako suma zmian rynkowej wartości dodanej (MVA – *Market Value Added*) wszystkich spółek giełdowych w powyższym okresie wyniosło niespełna 409 mld złotych wartości (por. [Siudak 2013a]).

Pomiar i analiza procesu migracji wartości mogą być realizowane za pomocą modelu trzech faz migracji wartości, którego propozycję przedstawił A. Slywotzky w opracowaniu [Slywotzky 1996], którego graficzną prezentację zamieszczono na rys. 1. Istotą modelu jest założenie, że każde przedsiębiorstwo może znajdować się w jednej z trzech faz migracji wartości [Siudak 2001, s. 195]:

- *faza przyływu wartości* – firmy znajdujące się w tej fazie absorbują wartość z innych sektorów lub przedsiębiorstw tego samego sektora; mocna pozycja konkurencyjna, wysoka dynamika wzrostu oraz wysoka rentowność tych firm powiększa ich siłę rynkową, powiększając zarazem ich wartość;
- *faza stabilizacji wartości* – przedsiębiorstwa znajdujące się w tej fazie charakteryzuje stan równowagi i stabilności w zakresie pozycji konkurencyjnej i udziału w rynku; w fazie tej wartość przedsiębiorstwa podlega wahaniom krótkoterminowym i niewielkim zmianom długoterminowym;
- *faza odpływu wartości* – firmy, które znajdują się w tej fazie, charakteryzuje spadek sprzedaży, spadek pozycji konkurencyjnej, odpływ klientów do firm konkurencyjnych; konsekwencją tego jest ucieczka inwestorów (a więc przepływ kapitałów) do innych spółek i sektorów, czego następstwem jest odpływ wartości.



**Rys. 1.** Model trzech faz migracji wartości

Źródło: opracowanie na podstawie [Slywotzky 1996, s. 50].

A. Slywotzky, definiując model trzech faz migracji wartości, jednoznacznie stwierdza, że przejścia między poszczególnymi fazami są trudne do rozpoznania, ponieważ zachodzą w sposób subtelny. Przykładowo w fizyce przejście pomiędzy fizycznymi stanami są łatwe w identyfikacji, ponieważ pojawiają się w ściśle określonych temperaturach. W przypadku procesu migracji wartości przejścia pomiędzy

fazami można łatwo przeoczyć. Nie ma wyraźnie określonych punktów przejścia [Slywotzky 1996, s. 56].

Pomiar procesów migracji wartości został szeroko opisany w pracy [Siudak 2013b]. Cel ten zrealizowano z wykorzystaniem metod taksonomii numerycznej, a ściślej metod porządkowania liniowego. Utworzono zmienną syntetyczną, określoną mianem syntetycznego indeksu migracji wartości (*SIMW*), która stanowi podstawę algorytmu klasyfikacji przedsiębiorstw do poszczególnych trzech faz migracji, zgodnie z modelem teoretycznym. Wykazano także poprawności klasyfikacji na podstawie sformułowanego algorytmu podziału.

Do analizy procesów migracji wartości na polskim rynku kapitałowym za pomocą łańcuchów Markowa wykorzystane zostaną dane odnośnie do tego procesu z lat 2002-2006. Dane empiryczne uwzględniają wszystkie spółki notowane w okresie od końca 2002 do końca 2006 r., co stanowi analizowany układ przedsiębiorstw. W okresie tym panowała względna stabilność w zakresie rocznej stopy zwrotu z indeksu WIG (nie następowały naprzemiennie po sobie okresy roczne z dodatnią i ujemną stopą zwrotu).

Celem artykułu jest oszacowanie prawdopodobieństw przejść przedsiębiorstw między poszczególnymi fazami migracji wartości. Do realizacji tego celu wykorzystana zostanie analiza procesu za pomocą łańcuchów Markowa. Realizacja celu pracy wymaga przeprowadzenia badań empirycznych w odniesieniu do postawionych trzech hipotez.

W wyniku ciągłego napływu wartości spoza analizowanego układu przedsiębiorstw oraz z innych możliwości alokacji kapitału przejawiające się w postaci dodatniego salda migracji wartości (ok 409 mld złotych w okresie 2002-2007) powinien następować większy udział spółek z przyływem wartości niż z odpływem wartości. Stanowi to przesłankę dla postawionej hipotezy  $H_1$ .

Hipoteza ( $H_1$ ): W wyniku dodatniego salda migracji wartości, niezależnie od początkowego stanu migracji wartości, stałe prawdopodobieństwo przejścia (pozostania) do fazy (w fazie) przyływu wartości jest większe od przejścia (pozostania) do fazy (w fazie) odpływu wartości.

Migracja wartości jest procesem będącym wynikiem ciągłego poszukiwania przez inwestorów najlepszej możliwości alokacji kapitału. Jednocześnie migracja wartości jest wynikiem oceny wartości przedsiębiorstwa (por. [Siudak 2013, s. 38-40]). W ich wyniku proces migracji wartości danego przedsiębiorstwa może kształtować się płynnie, w kolejnych okresach z  $i$ -tego stanu (fazy migracji) może przejść do dowolnego stanu, włącznie z przejściami z pominięciem fazy pośredniej (stabilizacji), czyli z fazy przyływu do fazy odpływu lub odwrotnie. Wynika to bezpośrednio z modelu teoretycznego trzech faz migracji wartości, co stanowi przesłankę dla postawionych hipotez  $H_{2A}$  i  $H_{2B}$ .

Hipoteza ( $H_{2A}$ ): Niezależnie od początkowego stanu procesu migracji wartości, przedsiębiorstwo może znaleźć się z pewnym prawdopodobieństwem w dowolnym stanie (fazie) migracji wartości w długim okresie, zgodnie z modelem teoretycznym

trzech faz migracji wartości, tj. nie występują stany pochłaniające i stany bezpowrotne (chwilowe).

Hipoteza ( $H_{2B}$ ): Niezależnie od początkowego stanu procesu migracji wartości, przedsiębiorstwo może znaleźć się z pewnym prawdopodobieństwem w dowolnym stanie (fazie) migracji wartości w krótkim okresie.

## 2. Łańcuchy Markowa

Początkowo zastosowanie procesów Markowa miało miejsce w naukach fizycznych, z czasem użyteczne aplikacje znaleziono dla nauk ekonomicznych. Podstawowe właściwości procesów Markowa są następujące [Lawrence, Pasternack 2002, s. CD-73]:

1. Rozpatrywany proces składa się z policzalnej liczby etapów.
2. W każdym etapie proces może znajdować się w policzalnej liczbie możliwych stanów.
3. Prawdopodobieństwo przejścia procesu ze stanu  $i$  w etapie  $t$  do stanu  $j$  w etapie  $t + 1$  jest niezależne od sposobu, w jaki proces znalazł się w stanie  $i$ .

Procesy Markowa klasyfikowane są według natury parametru czasu i natury przestrzeni stanów. W odniesieniu do przestrzeni stanów procesy Markowa mogą być o charakterze dyskretnej lub ciągłej przestrzeni stanów. W odniesieniu do czasu procesy Markowa mogą być o charakterze dyskretnym lub z czasem ciągłym. Łańcuchami Markowa określane są procesy o dyskretnej przestrzeni czasu [Ibe 2009, s. 45].

Procesem stochastycznym  $\{X_t\}$  określa się rodzinę zmiennych losowych  $X_t$ , których rozkłady zależą od parametru  $t$ ,  $t \in T$  [Hellwig 1998, s. 282]. Rozważaniom będzie podlegał proces ekonomiczny, za który przyjmujemy proces migracji wartości przedsiębiorstw, gdzie zgodnie z modelem teoretycznym trzech faz migracji wartości A. Slywotzky'ego może w chwilach  $t = 0, 1, 2, \dots, N$  znajdować się w jednym ze stanów  $S = \{1, 2, s = 3\}$ . Przebieg procesu ma charakter stochastyczny ( $X_t$ ,  $t \in N$ ) i jest procesem Markowa, jeżeli zmienne  $X_t$  są zależne, tj. spełniają warunek Markowa, w przypadku gdy spełniona jest poniższa równość

$$P(X_t = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i) = P(X_t = j | X_{t-1} = i) \text{ dla } i, j \in S, t \in N \quad (1)$$

Dla poszczególnych momentów  $t \in N$  oraz dla poszczególnych stanów  $i, j \in S$ , prawdopodobieństwo, że proces znajdzie się w stanie  $j$  w chwili  $t$ , pod warunkiem że w chwili  $t - 1$  proces znajdował się w stanie  $i$ , jest niezależne od stanów, w jakich proces znajdował się w momentach poprzedzających chwilę  $t - 1$ .

Innymi słowy, proces Markowa jest to taki proces stochastyczny, którego przyszłość zależy tylko od teraźniejszości i nie zależy od przeszłości [Plucińska, Pluciński 2000, s. 360]. Procesy Markowa charakteryzuje własność braku pamięci procesu, tak więc wpływ przeszłości na przyszłą ewolucję procesu jest zależny tylko i wyłącznie od zaobserwowanego stanu procesu w ostatnim momencie. Sposób znalezienia się procesu w pewnym stanie nie ma wpływu na jego przyszłą ewolucję [Iosifescu 1988, s. 14].

Prawdopodobieństwo warunkowe przejścia procesu do stanu  $j$  w momencie  $t$ , ze stanu  $i$  w momencie  $t - 1$  określane jest jako

$$p_{ij}(t) = P(X_t = j | X_{t-1} = i), \text{ dla } i, j \in S, t \in N \quad (2)$$

Ponieważ proces migracji wartości charakteryzuje się dyskretnym (nieciągłym) parametrem czasowym oraz dyskretną przestrzenią stanów procesu, układ ten można analizować za pomocą łańcucha Markowa. Jeżeli prawdopodobieństwa warunkowe  $p_{ij}(t)$  przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$  w jednostce czasu od  $t - 1$  do  $t$  nie zależą od wyboru momentu  $t$ , to łańcuch Markowa  $\{X_t, t \in N\}$  o przestrzeni stanów  $S = \{1, 2, \dots, s\}$  nazywa się jednorodnym (stacjonarnym) łańcuchem Markowa, w którym zachodzi równość [Stawicki 2004, s. 13]

$$p_{ij}(t) = p_{ij} \quad (3)$$

gdzie elementy  $p_{ij}$  określają prawdopodobieństwo przejścia łańcucha Markowa ze stanu  $i$  do stanu  $j$  w jednej jednostce czasu (kroku) i stanowią elementy macierzy stochastycznej  $P = [p_{ij}]_{s \times s}$ . Równość (3) oznacza, że prawdopodobieństwa przejścia są niezależne od czasu ( $t$ ).

Macierz prawdopodobieństw  $P$  musi spełniać poniższe warunki

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \text{ dla } i \in S \quad (4)$$

$$p_{ij} \geq 0, \text{ dla } i, j \in S \quad (5)$$

Łańcuchy Markowa stanowią odrębną klasę procesów Markowa i wyróżniają się dobrymi właściwościami obliczeniowymi, co zwiększa możliwości ich praktycznych zastosowań [Radzikowski 1997, s. 470]. Jednorodne łańcuchy Markowa stosowane są szczególnie do opisu samoadaptujących się systemów, odzwierciedlone przez prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami  $p_{ij}$  i prawdopodobieństwa pozostania w dotychczasowych stanach  $p_{ii}$  [Kot, Jakubowski, Sokołowski 2007, s. 390].

### 3. Estymacja macierzy prawdopodobieństw

Estymację macierzy prawdopodobieństw przejść  $P$  łańcucha Markowa przeprowadzono na podstawie makrodanych, co jest najczęściej spotykane w praktyce<sup>1</sup>. Makrodane określa się w postaci zbioru wektorów frakcji jednostek analizowanego układu obiektów znajdujących się w poszczególnych stanach w chwili  $t$  (wektor struktury analizowanej zbiorowości w momencie  $t$ ,  $k(t) = [k_1(t), k_2(t), \dots, k_s(t)]$ , gdzie

<sup>1</sup> Macierz prawdopodobieństw przejść można szacować również na podstawie mikrodanych.

$$k(t) = [k_i(t)] = \left[ \frac{n_i(t)}{\sum_{i \in S} n_i(t)} \right] \text{ dla } i \in S, t \in N \quad (6)$$

zaś  $n_i(t)$  – liczba jednostek znajdujących się w stanie  $i$  w chwili  $t$ .

W celu oszacowania macierzy przejść  $P$  zastosowano metodę estymacji warunkowej ze względu na wymóg spełnienia warunków (4) i (5). Model ma następującą postać

$$y = Xp + \varepsilon \quad (7)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{s-1} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{s-1} \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_{s-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

zaś  $K$  jest macierzą o postaci

$$K = \begin{bmatrix} k_1(0) & k_2(0) & \dots & k_s(0) \\ k_1(1) & k_2(1) & \dots & k_s(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1(N-1) & k_2(N-1) & \dots & k_s(N-1) \end{bmatrix} \quad (9)$$

przy założeniu spełnienia warunku  $\text{rz } K = s$  oraz  $N \geq s$ .

Szacowanie prawdopodobieństw przejść wszystkich kolumn macierzy  $P$  sprowadza się do rozwiązania poniższego zadania programowania kwadratowego z kwadratową funkcją celu i liniowymi warunkami ograniczającymi [Podgórska i in. 2002, s. 79-80]

$$\min_p z_1(p) = (y - Xp)^T \Omega^{-1} (y - Xp) \quad (10)$$

przy warunkach ograniczających

$$\sum_{j=1}^{s-1} p_j \leq 1 \quad (11)$$

$$p \geq 0 \quad (12)$$

przy czym  $\Omega$  stanowi diagonalną macierz kowariancji składników losowych (wektora  $\varepsilon$ ) o postaci blokowej

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \dots & \Omega_{1,s-1} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \dots & \Omega_{2,s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{s-1,1} & \Omega_{s-1,2} & \dots & \Omega_{s-1,s-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

o elementach

$$\Omega_{ij} = \omega_{ij}I \quad \text{dla } i, j \in S \quad (14)$$

gdzie  $I$  jest jednostkową macierzą stopnia  $N$ ;  $\omega_{ij}$  oznacza kowariancje składników losowych dla  $i \neq j, i, j \in S$  oraz wariancje składników losowych dla  $i = j, i, j \in S$ , szacowane przy zastosowaniu nieobciążonego estymatora

$$\hat{\omega}_{ij} = \frac{1}{N-s} e_i^T e_j \quad \text{dla } i, j \in S \quad (15)$$

przy czym wektor  $e$  stanowi reszty

$$e = y - X\hat{p} \quad (16)$$

modelu

$$y' = X'p' + \varepsilon' \quad (17)$$

gdzie:

$$y' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_s \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix}, \quad p' = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_s \end{bmatrix}, \quad \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_s \end{bmatrix} \quad (18)$$

którego parametry określone są poprzez rozwiązanie zmodyfikowanego zadania programowania kwadratowego z liniowymi warunkami ograniczającymi

$$\min_p z_2(p) = (y - Xp)^T (y - Xp) \quad (19)$$

przy warunkach ograniczających

$$\sum_{j=1}^s p_j = 1 \quad (20)$$

$$p \geq 0 \quad (21)$$

W celu oszacowania parametrów modelu (7) należy najpierw rozwiązać zadanie (19)-(21) przy użyciu warunkowej metody najmniejszych kwadratów, polegającej

na minimalizacji sumy kwadratów reszt z jednoczesnym uwzględnieniem warunków ograniczających nałożonych na parametry strukturalne, gdzie na podstawie reszt modelu szacowana jest macierz kowariancji  $\Omega$ . Następnie należy rozwiązać zadanie (10)-(12) przy użyciu warunkowej uogólnionej metody najmniejszych kwadratów.

Po uzyskaniu rozwiązania zadania (10)-(12) pozostają do oszacowania prawdopodobieństwa z ostatniej  $s$ -tej kolumny macierzy przejść  $P$ , z wykorzystaniem własności sumy wszystkich prawdopodobieństw dla każdego wiersza równej jedności, tj.

$$p_s = 1 - \sum_{j=1}^{s-1} p_j \quad (22)$$

Liczbę przejść spółek pomiędzy określonymi fazami migracji wartości (zmiany stanu analizowanego procesu) w kolejnych etapach  $t \in N$  zamieszczono w tab. 1.

**Tabela 1.** Liczba przejść spółek pomiędzy wyszczególnionymi fazami migracji wartości

		2003			
	Stan	Faza przyływu	Faza stabilizacji	Faza odpływu	Razem
<b>2002</b>	Faza przyływu	23	14	12	49
	Faza stabilizacji	28	58	15	101
	Faza odpływu	11	28	8	47
	Razem	62	100	35	197
		2004			
	Stan	Faza przyływu	Faza stabilizacji	Faza odpływu	Razem
<b>2003</b>	Faza przyływu	18	26	16	60
	Faza stabilizacji	35	60	3	98
	Faza odpływu	6	24	6	36
	Razem	59	110	25	194
		2005			
	Stan	Faza przyływu	Faza stabilizacji	Faza odpływu	Razem
<b>2004</b>	Faza przyływu	26	20	15	61
	Faza stabilizacji	29	72	9	110
	Faza odpływu	14	26	9	49
	Razem	69	118	33	220
		2006			
	Stan	Faza przyływu	Faza stabilizacji	Faza odpływu	Razem
<b>2005</b>	Faza przyływu	37	21	13	71
	Faza stabilizacji	37	77	6	120
	Faza odpływu	18	33	3	54
	Razem	92	131	22	245

Źródło: opracowanie własne na podstawie badań empirycznych.



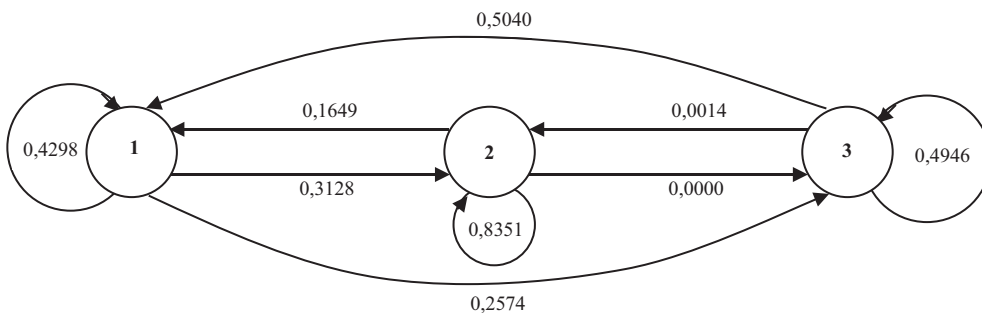
Suma elementów poszczególnych wierszy oznacza liczbę spółek w odpowiednich fazach migracji na początku danego okresu i jednocześnie na koniec okresu poprzedniego, a suma elementów poszczególnych kolumn wskazuje liczbę spółek w poszczególnych grupach na koniec analizowanego okresu.

Po rozwiązaniu zadań (19)-(21) oraz (10)-(12) uzyskano oszacowanie prawdopodobieństw przejść przedsiębiorstw pomiędzy trzema fazami procesu migracji wartości. Prawdopodobieństwa te, stanowiące elementy macierzy prawdopodobieństw przejść  $P$  łańcucha, przedstawiono w tab. 2, ich graficzną prezentację zaś w postaci grafu powiązań określonych stanów analizowanego procesu zamieszczono na rys. 2.

**Tabela 2.** Macierz prawdopodobieństw przejść spółek procesu migracji wartości

Stan	Faza przyływu	Faza stabilizacji	Faza odpływu	Razem
Faza przyływu	0,4298	0,3128	0,2574	1
Faza stabilizacji	0,1649	0,8351	0,0000	1
Faza odpływu	0,5040	0,0014	0,4946	1

Źródło: opracowanie własne na podstawie badań empirycznych.



1 – faza przyływu; 2 – faza stabilizacji; 3 – faza odpływu

**Rys. 2.** Graf powiązań między poszczególnymi fazami procesu migracji wartości przedsiębiorstw

Źródło: opracowanie własne na podstawie badań empirycznych.

Podkreślić należy dość wysokie prawdopodobieństwo pozostania w fazie stabilizacji wartości ( $p = 0,8351$ ) oraz zerowe lub bliskie zero prawdopodobieństwa przejścia z fazy odpływu wartości do fazy stabilizacji ( $p = 0,0014$ ) i w odwrotnym kierunku ( $p = 0,0000$ ). Oszacowane prawdopodobieństwa przejść dotyczą tylko pierwszego okresu, kwestia zaś ustalenia prawdopodobieństw przejść w kolejnych krokach (okresach) będzie przedmiotem rozważań w dalszej części opracowania.

Oszacowane prawdopodobieństwa zmiany faz migracji wartości można wykorzystać do analizy stabilności analizowanego procesu. Ocenę stopnia pozostawania

w wyspecyfikowanych stanach można realizować za pomocą dwóch mierników zaproponowanych przez Z. Pawłowskiego [1966, s. 41-51]

$$C_1 = \frac{\sum_{i=1}^s p_{ii}}{s} \quad (23)$$

oraz

$$C_2 = \frac{\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^s (p_{ij} - p_{ji})}{s} \quad (24)$$

Wskaźnik  $C_1$  przyjmuje wartości z zakresu  $(0; 1)$  i określa średnie prawdopodobieństwo pozostawania procesu w określonym stanie. Niskie wartości oznaczają wysoką zmienność analizowanego procesu, wysokie wartości wskazują na jego stabilność.

Natomiast wskaźnik  $C_2$  przyjmuje wartości z zakresu  $(-1; 1)$ . Dodatnia wartość bliska jedności wskazuje na szybkie przesuwanie się w kierunku wyższych stanów według ich ustalonego porządku, ujemna zaś, bliska wartości  $-1$ , wskazuje na tendencję zmiany stanów niżej uporządkowanych [Stawicki 2004, s. 47].

Dla rozpatrywanego procesu migracji wartości, na podstawie oszacowanych prawdopodobieństw przejść w tab. 2, wskaźnik  $C_1$  jest równy 0,587. Średnie prawdopodobieństwo pozostania procesu migracji wartości we wskazanych stanach wynosi 58,7%, dlatego proces migracji wartości nie jest względnie stabilny w czasie. Natomiast wskaźnik  $C_2$  wynosi  $-0,033$ , co można zinterpretować jako brak charakteryzowania się procesu migracji wartości tendencją w zakresie jednokierunkowych zmian w kierunku zarówno wyższych, jak i niższych stanów, tj. w kierunku odpowiednio fazy przyływu i fazy odpływu wartości.

## 4. Prawdopodobieństwa przejść łańcucha Markowa

Analiza prawdopodobieństw przejść łańcucha Markowa opisuje rozpatrywany proces w dwóch obszarach, (1) jak będzie się kształtował rozpatrywany proces migracji wartości po kilku krokach (okresach), oraz (2) jakie stany osiągnie proces po wielu okresach? Najpierw zajmiemy się pierwszym ze wskazanych obszarów badawczych.

### 4.1. Prawdopodobieństwa przejść łańcucha Markowa w poszczególnych okresach

Dla dowolnego momentu  $t \in N$  można wyznaczyć bezwarunkowy rozkład prawdopodobieństwa łańcucha  $d_t$  na bazie znajomości macierzy prawdopodobieństw warunkowych zmian stanu procesu  $P$  oraz rozkładu początkowego  $d_0$  na podstawie wzoru

$$d_t = d_0 \times P^t \text{ dla } t \in N \quad (25)$$

gdzie  $P^t$  jest macierzą prawdopodobieństw przejścia łańcucha w  $t$  krokach (jednostkach czasu). Elementy tworzące  $i$ -ty wiersz macierzy  $P^t$  stanowią warunkowy rozkład prawdopodobieństwa trafienia łańcucha do dowolnego stanu  $j \in S$  w momencie  $t$ , jeżeli  $t$  okresów wcześniej łańcuch był w stanie  $i$ . Oszacowana macierz prawdopodobieństw przejścia  $P$  oraz rozkład początkowy  $d_0$  pozwala na wyznaczenie bezwarunkowych rozkładów prawdopodobieństwa  $d_t$  łańcucha Markowa dla dowolnego momentu  $t \in N$  [Podgórska i in. 2002, s. 13-14].

Na podstawie bezwarunkowego rozkładu prawdopodobieństwa  $d_t$  można obliczyć średnie prawdopodobieństwo znalezienia się analizowanego procesu w określonym stanie  $j$  w chwili  $t$

$$\text{średnia } p_j(t) = \frac{\sum_{i=1}^s p_{ij}}{s} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, s, t \in N \tag{26}$$

oraz liczbę spółek w momencie  $t$  znajdujących się w stanie  $j$ , przy znanym początkowym rozkładzie

$$h_j(t) = \sum_{i=1}^s h_0 \cdot p_{ij} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, s, t \in N \tag{27}$$

gdzie  $h_0$  – początkowa liczba przedsiębiorstw w określonych stanach.

Na tej podstawie można oszacować rozkłady prawdopodobieństwa przejść łańcucha Markowa w kolejnych okresach, jak również liczbę spółek, które znajdują się w poszczególnych fazach migracji wartości.

W tabeli 3 zaprezentowano rozkłady prawdopodobieństw zmian faz migracji wartości w kolejnych 8 okresach. Za początkową liczbę przedsiębiorstw w określonych stanach przyjęto liczbę spółek występujących w poszczególnych fazach migracji (stanach procesu) na koniec ostatniego okresu (2006 rok) odczytaną z ostatniego wiersza tab. 1, co stanowi wektor

$$h_0 = [92 \ 131 \ 22]$$

łącznie układ 245 analizowanych przedsiębiorstw.

**Tabela 3.** Rozkłady prawdopodobieństw przejść procesu migracji wartości dla kolejnych 8 etapów

Specyfikacja		Faza przyływu	Faza stabilizacji	Faza odpływu
1		2	3	4
Koniec okresu $t = 1$	Faza przyływu	0,4298	0,3128	0,2574
	Faza stabilizacji	0,1649	0,8351	0,0000
	Faza odpływu	0,5040	0,0014	0,4946
	Liczba spółek $h_j(1)$ *	72	138	35
	Średnia $p_j$	0,3662	0,3831	0,2507

Tabela 3, cd.

	1	2	3	4
Koniec okresu $t = 2$	Faza przyływu	0,3660	0,3960	0,2379
	Faza stabilizacji	0,2086	0,7490	0,0424
	Faza odpływu	0,4661	0,1595	0,3744
	Liczba spółek $h_j(2)$ *	71	138	36
	Średnia $p_j$	0,3469	0,4348	0,2182
Koniec okresu $t = 3$	Faza przyływu	0,3425	0,4455	0,2119
	Faza stabilizacji	0,2345	0,6908	0,0747
	Faza odpływu	0,4153	0,2795	0,3051
	Liczba spółek $h_j(3)$ *	71	138	36
	Średnia $p_j$	0,3308	0,4719	0,1972
Koniec okresu $t = 4$	Faza przyływu	0,3275	0,4795	0,1930
	Faza stabilizacji	0,2524	0,6503	0,0973
	Faza odpływu	0,3784	0,3638	0,2578
	Liczba spółek $h_j(4)$ *	72	137	36
	Średnia $p_j$	0,3194	0,4979	0,1827
Koniec okresu $t = 5$	Faza przyływu	0,3171	0,5032	0,1797
	Faza stabilizacji	0,2647	0,6222	0,1131
	Faza odpływu	0,3526	0,4225	0,2249
	Liczba spółek $h_j(5)$ *	72	137	36
	Średnia $p_j$	0,3115	0,5160	0,1726
Koniec okresu $t = 6$	Faza przyływu	0,3098	→→→0,5196	0,1705
	Faza stabilizacji	0,2734	0,6025	0,1241
	Faza odpływu	0,3346	0,4634	0,2020
	Liczba spółek $h_j(6)$ *	72	137	36
	Średnia $p_j$	0,3059	0,5285	0,1655
Koniec okresu $t = 7$	Faza przyływu	0,3048	0,5311	0,1641
	Faza stabilizacji	0,2794	0,5889	0,1317
	Faza odpływu	0,3220	0,4920	0,1860
	Liczba spółek $h_j(7)$ *	72	137	36
	Średnia $p_j$	0,3021	0,5373	0,1606
Koniec okresu $t = 8$	Faza przyływu	0,3013	0,5391	0,1596
	Faza stabilizacji	0,2836	0,5793	0,1371
	Faza odpływu	0,3133	0,5118	0,1749
	Liczba spółek $h_j(8)$ *	72	137	36
	Średnia $p_j$	0,2994	0,5434	0,1572

\* Zaokrąglone do całości.

Źródło: opracowanie własne na podstawie badań empirycznych.

Dla każdego kolejnego okresu w przód od 2006 r., kiedy zostały zebrane ostatnie dane empiryczne, określone zostały prawdopodobieństwa znalezienia się procesu w poszczególnych fazach migracji wartości w zależności od stanu wyjściowego (czyli fazy migracji, w jakiej proces poprzednio się znajdował). Przykładowo prawdopodobieństwo znalezienia się po 8 okresach rocznych w fazie przyływu wartości, pod warunkiem że przedsiębiorstwo znajdowało się w fazie odpływu, wynosi 0,3133, prawdopodobieństwo zaś pozostania w fazie przyływu to 0,3013. Natomiast prawdopodobieństwo znalezienia się w fazie odpływu przy początkowym znajdowaniu się przedsiębiorstwa w fazie przyływu wartości wynosi blisko dwukrotnie mniej – 0,1596.

Prawdopodobieństwa te sumują się do jedności względem wyjściowego stanu (dla każdego wiersza osobno). Dla każdej kolumny, czyli stanu końcowego (względem przejścia procesu do określonej fazy), można wyliczyć średnie prawdopodobieństwa znalezienia się w jednej z trzech faz migracji wartości po określonej liczbie kroków – zgodnie z formułą (26). Przykładowo po 8 krokach prawdopodobieństwo znalezienia się w fazie przyływu, stabilizacji i odpływu wynosi odpowiednio: 30%; 54%; 16%, niezależnie od tego, w jakiej fazie migracji początkowo znajdowało się przedsiębiorstwo.

Dla wszystkich 8 etapów prawdopodobieństwo znalezienia się w fazie przyływu wartości jest większe od prawdopodobieństwa przejścia do fazy odpływu – zarówno dla poszczególnych faz wyjściowych, jak i dla wartości uśrednionych.

Obliczono także oczekiwaną liczbę przedsiębiorstw znajdujących się w poszczególnych fazach migracji wartości po przejściu kolejnych 8 kroków (na podstawie formuły (27)), przy początkowym rozkładzie. Po przejściu kolejnych 8 okresów rocznych liczebności spółek znajdujących się w poszczególnych fazach migracji wartości wynoszą z dokładnością do  $\pm 1$  spółki odpowiednio: faza przyływu 72 spółki; faza stabilizacji 137; faza odpływu 36. Podkreślić należy dwukrotnie większą oczekiwaną liczbę spółek w fazie przyływu wartości w odniesieniu do liczby spółek w fazie odpływu.

## 4.2. Stałe prawdopodobieństwa przejść łańcucha

Ponieważ wyznaczona macierz prawdopodobieństw przejść  $P$  (por. tab. 2) skończonego jednorodnego łańcucha Markowa jest nierozkładalna i niecykliczna, macierz  $P$  jest macierzą regularną, łańcuch zaś jest erodyczny. Dla bezwarunkowego rozkładu prawdopodobieństwa łańcucha  $d_t$  przy  $t$  dążącym do nieskończoności ( $t \rightarrow \infty$ ) istnieje granica (por. [Podgórska i in. 2002, s. 16])

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_t = \lim_{t \rightarrow \infty} d_0 P^t = d_0 \lim_{t \rightarrow \infty} P^t = d_0 E = e \quad (28)$$

gdzie:  $e = [e_j]$ , dla  $j \in S$ , stanowi wiersz stochastycznej macierzy erodycznej  $E$ , będącej granicą regularnej macierzy przejść łańcucha  $P^t$  dla  $t$  dążącego do nieskończoności ( $t \rightarrow \infty$ )

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^t = E \quad (29)$$

Dla odpowiedniej wielkości liczby kroków ( $t$ ), co stanowi odpowiedni upływ czasu, prawdopodobieństwo osiągnięcia przez proces poszczególnych stanów jest równe odpowiadającym im elementom granicznego wektora stacjonarnego  $e$ , niezależnie od zaistniałego początkowego stanu procesu

$$e = [0,2932 \ 0,5575 \ 0,1493]$$

Ponieważ graniczny wektor  $e > 0$ , macierz prawdopodobieństw  $P$  jest nieprzywiedlna i w konsekwencji, po odpowiednio długim upływie czasu, każde przedsiębiorstwo może znaleźć się w jednej z trzech faz migracji wartości, co jest zgodne z teoretycznym modelem trzech faz migracji wartości dla długiego okresu.

Ponieważ rozpatrywany łańcuch jest erodyczny, prawdopodobieństwo przejścia procesu do poszczególnych stanów (faz migracji) jest niezależne od stanu początkowego. Graniczna macierz erodyczna ma postać

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^t = E = \begin{bmatrix} 0,2932 & 0,5575 & 0,1493 \\ 0,2932 & 0,5575 & 0,1493 \\ 0,2932 & 0,5575 & 0,1493 \end{bmatrix}$$

Niezależnie od początkowego stanu, tj. fazy migracji, w jakiej znajduje się obecnie przedsiębiorstwo, prawdopodobieństwo znalezienia się w długim okresie w fazie przyływu wartości wynosi niespełna 30%; w fazie stabilizacji niewiele ponad 55%, a w fazie odpływu niespełna 15%. Tak więc, rozpatrując dostatecznie duży układ przedsiębiorstw w dostatecznie długim okresie (kilkunastu lat), można stwierdzić, że w powyższych proporcjach przedsiębiorstwo spędza czas w poszczególnych trzech fazach migracji wartości (30% czasu w fazie przyływu; 55% czasu w fazie stabilizacji i 15% w fazie odpływu wartości).

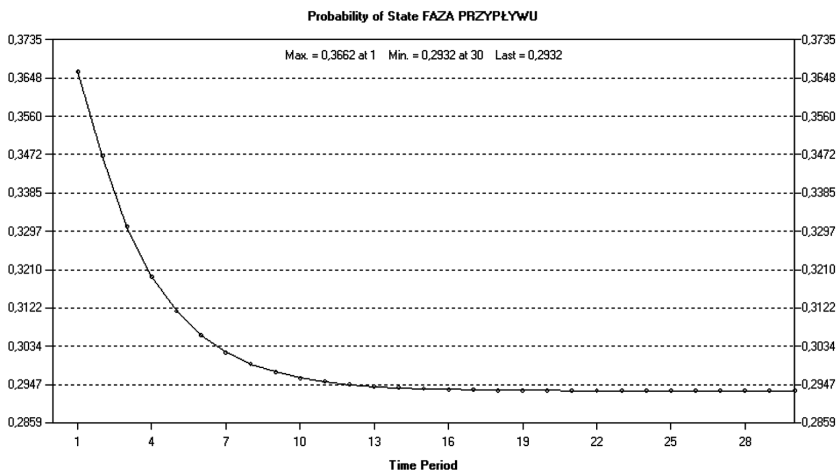
Natomiast liczba spółek w poszczególnych fazach migracji wartości po przejściu dostatecznie dużej liczby kroków kształtowałyby się w sposób następujący (na podstawie równości (27))

$$h(N) = [72 \ 137 \ 36]$$

co daje 72 spółki w fazie przyływu wartości, 137 w fazie stabilizacji i 36 przedsiębiorstw w fazie odpływu wartości. Jednakże na podstawie analizy zamieszczonej w tab. 3 zauważamy, że liczba spółek w poszczególnych fazach migracji określona powyżej, dokładnie w tych samych wielkościach jest już osiągalna w czwartym okresie. Ponadto różnice w liczbach spółek we wcześniejszych okresach są nieznaczne, wynoszą do 1 obiektu.

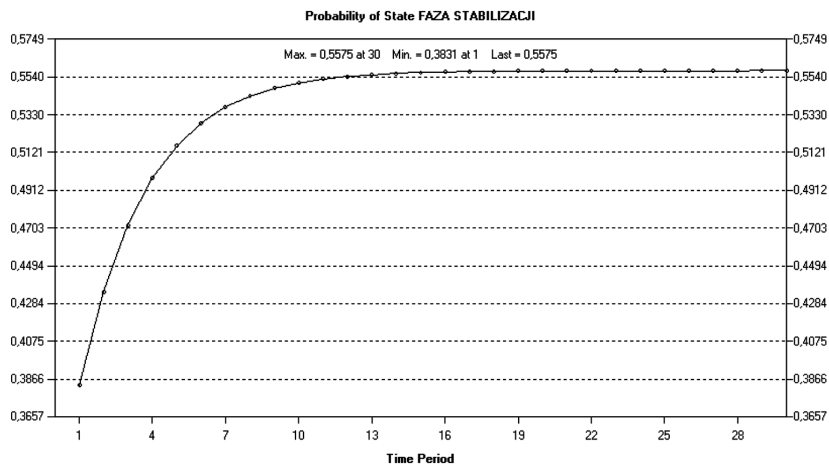
Podkreślić należy, że dwukrotnie większy procent czasu przebywania przedsiębiorstw w fazie przyływu w stosunku do procentu czasu znajdowania się w fazie odpływu wartości, a także dwukrotnie większa liczba spółek w fazie przyływu od

spółek w fazie odpływu po odpowiednio długim czasie świadczy o tym, że oprócz przechwytywania wartości pomiędzy spółkami, do pewnej części spółek przyplwy wartości następuje spoza analizowanego układu przedsiębiorstw, czyli od innych przedsiębiorstw (nie notowanych na giełdzie papierów wartościowych) i/lub z innych instrumentów finansowych. Oznacza to kształtowanie się dodatniego salda migracji wartości analizowanego układu przedsiębiorstw.



**Rys. 3.** Prawdopodobieństwo przejścia łańcucha do fazy przyplwy wartości względem czasu

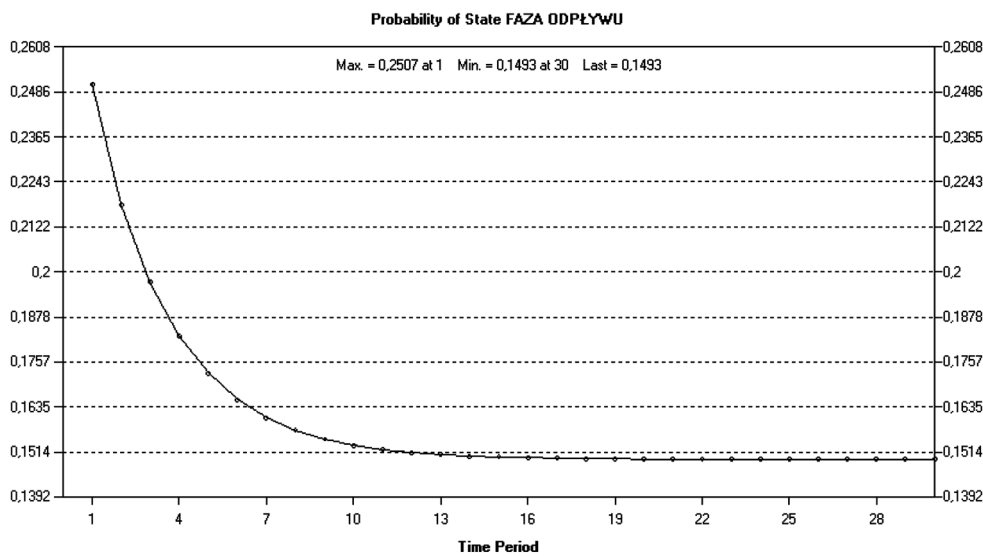
Źródło: opracowanie własne na podstawie badań empirycznych.



**Rys. 4.** Prawdopodobieństwo przejścia łańcucha do fazy stabilizacji wartości względem czasu

Źródło: opracowanie własne na podstawie badań empirycznych.

Na rys. 3-5 zaprezentowano graficznie zmiany prawdopodobieństw przejścia procesu odpowiednio do fazy przyływu wartości (rys. 3); do fazy stabilizacji wartości (rys. 4); do fazy odpływu wartości (rys. 5).



**Rys. 5.** Prawdopodobieństwo przejścia łańcucha do fazy odpływu wartości względem czasu

Źródło: opracowanie własne na podstawie badań empirycznych.

Prawdopodobieństwa osiągnięcia stanu fazy przyływu i fazy odpływu wartości w kolejnych okresach są funkcją malejącą, a prawdopodobieństwo przejścia do fazy stabilizacji jest funkcją rosnącą. Podobne zależności można było zaobserwować na podstawie średnich wartości prawdopodobieństw dla odpowiednich faz i kolejnych 8 kroków zawartych w tab. 3 (dla pierwszych 8 okresów wartości z powyższych wykresów zawarte są w tab. 3). Ponadto prawdopodobieństwa przejść między poszczególnymi fazami migracji wartości stabilizują się po ponad 10 okresach. Graniczny wektor stacjonarny  $e$  łańcucha Markowa jest więc uzyskiwany po kilkunastu okresach rocznych.

## 5. Oczekiwany czas powrotu łańcucha

Dla erodycznego i nieprzewiedlnego łańcucha Markowa można określić oczekiwany czas powrotu od wyjścia łańcucha ze stanu  $i$  do jego pierwszego powrotu do stanu  $i$ . Czas ten określa oczekiwaną liczbę kroków. Jeżeli w określonym momencie łańcuch Markowa przebywa w stanie  $i$ , to w kolejnym momencie czasu (czas jest tu dyskretny) może albo pozostać w stanie  $i$ , co oznacza, że proces powrócił do tego stanu



w jednym kroku, albo przejść do innego stanu. Ponieważ erodyczna macierz przejść jest regularna oraz wszystkie stany należą do klasy stanów istotnych komunikujących się (brak zer dla elementów  $e_i$  granicznego wektora  $e$ ), istnieje skończony czas (liczba kroków), po którym łańcuch powróci do wyjściowego stanu  $i$ . Oczekiwany czas powrotu łańcucha wynosi

$$r_i = \frac{1}{e_i} \text{ dla } i \in S \quad (30)$$

gdzie:  $e_i$  – elementy wektora  $e$ .

W tabeli 4 przedstawiono oczekiwany czas powrotu łańcucha do wyspecyfikowanych faz migracji wartości.

**Tabela 4.** Oczekiwany czas powrotu łańcucha Markowa do poszczególnych stanów (faz migracji wartości przedsiębiorstw)

Faza migracji	Oczekiwany czas powrotu ( $t = \text{rok}$ )
Faza przyływu	3,41
Faza stabilizacji	1,79
Faza odpływu	6,70

Źródło: opracowanie własne na podstawie badań empirycznych.

Oczekiwany czas powrotu przedsiębiorstwa do fazy odpływu jest niespełna dwukrotnie dłuższy od oczekiwanego czasu powrotu do fazy przyływu i prawie czterokrotnie dłuższy w stosunku do fazy stabilizacji. Ponadto oczekiwany czas powrotu mierzony jest w krokach o jednostce czasu jednego roku.

Blisko siedmioletni okres powrotu do fazy odpływu wartości, pod warunkiem znajdowania się początkowo w tej fazie, wydaje się obserwacją pozytywną. Jednak należy zaznaczyć, że dotyczy to przedsiębiorstw, które początkowo znajdując się w fazie odpływu wartości, są w stanie kontynuować swą działalność operacyjną i w wyniku odpowiednich decyzji zarządu przedsiębiorstwo przesuwa się do fazy stabilizacji i/lub do fazy przyływu wartości. Wówczas powrót do fazy odpływu nastąpi przeciętnie po ok. 6,7 okresach rocznych. Należy jednak uwzględnić, że dość długi oczekiwany okres powrotu przedsiębiorstw do fazy odpływu może być spowodowany bankructwem spółki lub jej przejściem przez inny podmiot. Brak możliwości kontynuacji działalności przedsiębiorstwa samoistnie uniemożliwia dalsze obserwacje. Zwłaszcza znaczny odpływ wartości z przedsiębiorstwa może się stać przyczyną wrogiego przejęcia, bankructwo spółki zaś zapewne zostanie poprzedzone również szybkim, dość znacznym odpływem wartości z przedsiębiorstwa. Natomiast w przypadku przetrwania przedsiębiorstwa i opuszczenia przezeń fazy odpływu wartości przeciętny blisko siedmioletni okres powrotu do tej fazy wyznacza horyzont rewizji strategii inwestycyjnych i ewentualnego przeprojektowania modelu działalności biznesowej.

## 6. Podsumowanie

Na podstawie granicznego wektora stacjonarnego  $e$  należy stwierdzić, że niezależnie od początkowego stanu procesu migracji wartości, w długim okresie obserwujemy większe prawdopodobieństwa znalezienia się w fazie przyływu niż w fazie odpływu wartości. Jednocześnie czas pozostawania w fazie przyływu wartości jest również dłuższy w porównaniu z fazą odpływu wartości. Oznacza to tendencję do kształtowania się dodatniego salda migracji wartości na polskim rynku kapitałowym. Potwierdza to również analiza prawdopodobieństw przejść łańcucha w kolejnych 8 etapach (okresach rocznych). Prawdopodobieństwo przejścia do fazy przyływu przewyższa prawdopodobieństwo przejścia do drugiego skrajnego stanu – fazy odpływu – a w konsekwencji dwukrotnie większa jest oczekiwana liczba spółek w fazie przyływu wartości. Zweryfikowano zatem postawioną w pracy hipotezę  $H_1$ .

Potwierdzenie hipotezy  $H_1$  stanowi analiza oczekiwanych czasów powrotu łańcucha Markowa do poszczególnych stanów – faz migracji (por. tab. 4). Blisko dwukrotnie krótszy oczekiwany czas powrotu łańcucha Markowa do fazy przyływu wartości (3,41 roku) w porównaniu do oczekiwanego okresu powrotu do fazy odpływu (6,7 roku) wskazuje na częstsze przejścia (lub pozostawanie) do fazy (w fazie) przyływu wartości.

Ponieważ elementy granicznego wektora stacjonarnego są większe od zera ( $e > 0$ ), to niezależnie od początkowego stanu migracji wartości, w jakim znajduje się aktualnie przedsiębiorstwo, w długim okresie może osiągnąć każdy z pozostałych stanów (przejść do dowolnej fazy migracji wartości lub pozostać w dotychczasowej). Tym samym zweryfikowano hipotezę  $H_{2A}$ .

Oczekiwany czas powrotu łańcucha Markowa do poszczególnych stanów również potwierdza hipotezę  $H_{2A}$ . Okresy te ze względu na fazy są co prawda zróżnicowane, lecz nie na tyle długie, aby w długim okresie dany stan (faza migracji wartości) był nieosiągalny dla przedsiębiorstwa.

Pozostaje kwestia zachowania się procesu migracji wartości w okresie krótkim. Analiza oszacowanej macierzy prawdopodobieństw przejść łańcucha Markowa w pierwszym kroku wskazuje, że nie wszystkie stany komunikują się ze sobą. Brak jest możliwości przejścia z fazy stabilizacji do fazy odpływu ( $p = 0,0000$ ). Bliskie zeru jest również prawdopodobieństwo przejścia w odwrotnym kierunku –  $p = 0,0014$ . Przyjmując zatem za okres krótki 1 rok, trzeba hipotezę  $H_{2B}$  zweryfikować negatywnie. Na tej podstawie należy stwierdzić, że model teoretyczny trzech faz migracji wartości zaproponowany przez A. Slywotzky'ego [1996] nie spełnia założenia możliwości znalezienia się każdego przedsiębiorstwa po upływie okresu pierwszego roku w dowolnej z trzech faz migracji wartości. Dotyczy to przedsiębiorstw, które znajdując się w fazie stabilizacji, nie mają możliwości przejścia bezpośrednio w 1 kroku do fazy odpływu, przejście zaś w odwrotnym kierunku jest możliwe, ale z bardzo niskim prawdopodobieństwem. Wskazać przy tym należy (na podstawie tab. 2) na dość wysokie prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy skraj-

nymi stanami – fazą przyływu i fazą odpływu – z pominięciem fazy pośredniej (stabilizacji). Wskazuje to na brak stabilności procesu migracji wartości na polskim rynku kapitałowym w okresie 1 roku. Potwierdzeniem tego wniosku jest miernik średniego prawdopodobieństwa pozostawania procesu w wyszczególnionych stanach ( $C_1 = 0,587$ ). Analizowany proces migracji wartości charakteryzuje się zmiennością.

Natomiast brak jest stanów pochłaniających oraz bezpowrotnych (chwilowych). Stąd prawdopodobieństwa przejść w kolejnych okresach  $\langle 2 \div 8 \rangle$  są możliwe pomiędzy wszystkimi stanami, łącznie z możliwością pozostania w tej samej fazie procesu migracji wartości. Powoduje to, że w okresie co najmniej dwóch lat stochastyczny proces migracji wartości kształtuje się w sposób swobodny, potwierdzając hipotezę  $H_{2A}$ .

Należy podkreślić zmniejszające się w kolejnych okresach prawdopodobieństwa przejścia do fazy przyływu oraz do fazy odpływu wartości, w odniesieniu zaś do fazy stabilizacji prawdopodobieństwa te ulegają zwiększeniu. Ponieważ łączna suma prawdopodobieństwa dla wszystkich trzech stanów wynosi 1, zwiększające się wraz z upływem czasu prawdopodobieństwo dla fazy stabilizacji wartości jest konsekwencją zmniejszających się prawdopodobieństw dla stanów skrajnych – fazy przyływu i odpływu.

Prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych stanach stabilizują się ok. 13 okresu rocznego. Może to świadczyć, że proces migracji wartości we wcześniejszych okresach charakteryzuje się pewną niestabilnością, swobodnie przechodząc pomiędzy fazami przyływu i fazą odpływu, a w długim horyzoncie czasu następuje stabilizacja tego procesu. Konsekwencją tego jest dość krótki okres powrotu łańcucha do stanu fazy stabilizacji – przeciętnie 1,79 roku. W tak kształtującym się procesie migracji wartości zarządy spółek stoją przed wymagającym zadaniem w postaci odpowiedniej identyfikacji momentu (*ex ante*) przejścia zarządzanego przedsiębiorstwa pomiędzy poszczególnymi fazami, zwłaszcza w kierunku fazy odpływu wartości, oraz jeszcze trudniejszym zadaniem właściwej reakcji czasowej.

## Literatura

- Hellwig Z., *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, PWE, Warszawa 1998.
- Ibe O.C., *Markov Processes for Stochastic Modeling*, Elsevier 2009.
- Kot S., Jakubowski J., Sokołowski A., *Statystyka*, Difin, Warszawa 2007.
- Lawrence J.A., Pasternack B.A., *Applied Management Science. Modeling, Spreadsheet Analysis, and Communication for Decision Making*, John Wiley & Sons 2002.
- Pawłowski Z., *Kilka uwag o wskaźnikach stabilności i zmian dochodów*, „Przegląd Statystyczny” 1966, nr 1.
- Phillips P., *Time to Revisit Value Migration*, “Business Corner. Strategies & Analysis”, Rodman Publishing, July 2012.
- Plucińska A., Pluciński E., *Probabilistyka. Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna. Procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa 2000.

- Podgórska M., Śliwka P., Topolewski M., Wrzosek M., *Łańcuchy Markowa w teorii i w zastosowaniach*, Oficyna Wydawnicza Szkoły Głównej Handlowej, Warszawa 2002.
- Radzikowski W., *Badania operacyjne w zarządzaniu przedsiębiorstwem*, Toruńska Szkoła Zarządzania, Toruń 1997.
- Siudak D., *Analiza jednokierunkowej migracji wartości*, Studia ekonomiczne, 2013a, (w druku).
- Siudak D., *Pomiar procesów migracji wartości przedsiębiorstwa na polskim rynku kapitałowym*, C.H. Beck, Warszawa 2013b.
- Slywotzky A.J., *Value Migration. How to Think Several Moves Ahead of the Competition*, Harvard Business School Press, Boston, Massachusetts 1996.
- Stawicki J., *Wykorzystanie łańcuchów Markowa w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2004.

## THE ANALYSIS OF THE PROBABILITIES OF THE TRANSITIONS BETWEEN VALUE MIGRATION STAGES BASED ON MARKOV CHAINS

**Summary:** The paper analyzes processes of value migration on the Polish market. It employed mathematical methods of process analysis in the form of Markov chain and estimated the probability of the migration between stages of inflow, outflow and stability according to the three stages of value migration. The article estimated the length of period of getting back from the distinct state of the chain to its first return to the same state. In the long period there are observed higher probability of being in the state of inflow than outflow of value. Regardless of the initial state of value migration in which a company currently is, every remaining state can be achieved. Moreover, the considered value migration process is variable. Thus within 1 year time, the processes is unstable.

**Keywords:** value migration, Markov chain, probability of transition, estimated return time for Markov chain.