GOSPODARKA NARODOWA

3
(277)
Rok LXXXV/XXVI
maj–czerwiec
2015
s. 27–47

Katarzyna FILIPOWICZ*
Tomasz TOKARSKI**
Mariusz TROJAK***

Złote reguły akumulacji kapitału w grawitacyjnym modelu wzrostu gospodarczego

Streszczenie: Artykuł ma na celu próbę wyznaczenia złotych reguł akumulacji kapitału w grawitacyjnym modelu wzrostu gospodarczego. Model ten jest rozszerzeniem neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa [1956] o tzw. efekty grawitacyjne. Na gruncie grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego rozważa się dwa warianty złotych reguł akumulacji kapitału. W pierwszym wariancie szuka się takiej kombinacji stóp inwestycji, która maksymalizuje średnią geometryczną z konsumpcji na pracującego we wszystkich gospodarkach w warunkach długookresowej równowagi modelu grawitacyjnego. W drugim zaś wyznacza się taką kombinację stóp inwestycji, która maksymalizuje długookresową konsumpcję na pracującego w każdej z analizowanych gospodarek.
Podjęte w artykule rozważania prowadzą do następujących wniosków. W pierwszym wariancie złotą regułą akumulacji kapitału są stopy inwestycji równe (w każdej z gospodarek) elastyczności produktu względem nakładów kapitałowych powiększonej o dwukrotność siły działania efektu grawitacyjnego. Natomiast w drugim wariancie optymalne stopy inwestycji zależne są (podobnie jak w pierwszym wariancie) od elastyczności produkcji względem kapitału, siły działania efektu grawitacyjnego oraz (co nie występuje w pierwszym wariancie) liczby gospodarek podlegających działaniu efektu grawitacyjnego. Ponadto w wariancie tym wzrost elastyczności produkcji względem kapitału i/lub siły działania efektów grawitacyjnych prowadzi do wzrostu optymalnych stóp inwestycji. Jeśli zaś liczba gospodarek, na które oddziałuje efekt grawitacyjny rośnie, to spadają stopy inwestycji, które maksymalizują długookresową konsumpcję na pracującego w każdej z gospodarek.
W obu rozważanych w artykule wariantach gasnące (do zera) efekty grawitacyjne powodują zbieżność uzyskanych złotych reguł akumulacji z oryginalnymi złotymi regułami

* Uniwersytet Jagielloński, Katedra Ekonomi Matematycznej; e-mail: mroczekka@gmail.com
** Uniwersytet Jagielloński, Katedra Ekonomi Matematycznej; e-mail: tomtok67@o2.pl
*** Uniwersytet Jagielloński, Katedra Globalizacji i Integracji Ekonomicznej; e-mail: mariusz.trojak@uj.edu.pl

Phelpsa. Oznacza to, iż wyznaczone przez autorów złote reguły akumulacji kapitału stanowią uogólnienie złotych reguł akumulacji kapitału Phelpsa na grawitacyjny model wzrostu gospodarczego.

Słowa kluczowe: model grawitacyjny, złote reguły akumulacji kapitału, wzrost gospodarczy, efekty grawitacyjne

Kody klasyfikacji JEL: C02, R11, E23, O47

Artykuł nadesłany 27 listopada 2014 r., zaakceptowany 20 maja 2015 r.

Wprowadzenie[1]

Celem artykułu jest próba wyznaczenia złotych reguł akumulacji kapitału w grawitacyjnym modelu wzrostu gospodarczego. Model ten jest kompilacją neoklasycznego modelu wzrostu gospodarczego Solowa [1956] z efektami grawitacyjnymi (wynikającymi z modeli makroekonomicznych prezentowanych m.in. w opracowaniach Tinbergena [1962], Pulliainena [1963] lub Linnemanna [1963], por. też np. Mroczek, Nowosad, Tokarski [2015], Mroczek, Tokarski [2014] lub Mroczek, Tokarski, Trojak [2014]) oraz ze złotą regułą akumulacji kapitału Phelpsa [1961] (por. też Phelps [1966] lub Tokarski [2009; 2011]).

Struktura prezentowanego artykułu przedstawia się następująco. Część druga zawiera założenia grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego, nawiązującego do neoklasycznego, jednokapitałowego modelu wzrostu Solowa [1956]. W części trzeciej znajduje się definicja złotych reguł akumulacji kapitału Phelpsa [1961] zarówno na gruncie modelu wzrostu Solowa, jak i na gruncie grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego. Na gruncie grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego analizuje się dwa warianty złotych reguł akumulacji kapitału. Po pierwsze, szuka się takiej kombinacji stóp inwestycji, które maksymalizują średnią (geometryczną) z konsumpcji na pracującego we wszystkich analizowanych krajach (regionach) w warunkach długookresowej równowagi modelu grawitacyjnego. Po drugie, wyznacza się taką kombinację stóp inwestycji, która maksymalizuje długookresową konsumpcję na pracującego w każdej z analizowanych gospodarek. Ponadto w tej części opracowania porównuje się także dwa uzyskane rozwiązania zarówno z oryginalnymi złotymi regułami akumulacji kapitału Phelpsa, jak i porównuje się te rozwiązania między sobą (z punktu widzenia długookresowej wydajności pracy oraz konsumpcji na pracującego). Artykuł kończy część czwarta, w której autorzy przedstawili podsumowanie prowadzonych w nim rozważań oraz ważniejsze wnioski.

[1] Autorzy dziękują Prof. Armenowi Edigarianowi z Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego oraz Prof. Krzysztofowi Maladze i Dr. Michałowi Konopczyńskiemu z Katedry Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu za uwagi do wstępnej wersji prezentowanego artykułu. Rzecz jasna, odpowiedzialność za ostateczną wersję artykułu ponoszą wyłącznie autorzy.

Model grawitacyjny

Założenia modelu

W prezentowanych dalej rozważaniach przyjmuje się następujące założenia:

1) Analizuje się funkcjonowanie pewnej, skończonej liczby $N>2$ ($N \in \mathbb{N}$) krajów (lub regionów)[2], między którymi istnieją przestrzenne interakcje rozwoju ekonomicznego. Interakcje te opisane są przez scharakteryzowane dalej (indywidualne i łączne) efekty grawitacyjne.

2) Proces produkcyjny w j-tej gospodarce opisany jest przez funkcję produkcji Cobba-Douglasa [1928]. Stąd zaś wynika, iż wydajność pracy y_j w owej gospodarce można zapisać wzorem (por. też np. Żółtowska [1997] lub Tokarski [2009; 2011])[3]:

$$\forall j \;\; y_j(t) = a_j(g_j(t))^{\beta}(k_j(t))^{\alpha}, \tag{1}$$

gdzie: $\forall j\, a_j > 0$, $\alpha, \beta \in (0;1)$ i $\beta < \frac{1-\alpha}{2}$ [4]. Wyrażenie y_j oznacza wydajność pracy w kraju (regionie) j, k_j – techniczne uzbrojenie pracy w owym kraju (regionie), zaś wielkość g_j^{β} w funkcji wydajności pracy (1) opisuje tę część łącznej produktywności czynników produkcji $(a_j g_j^{\beta})$ w gospodarce j, która wynika z działania efektu grawitacyjnego (efekt ów opisany jest zaś w założeniach 3–4). Natomiast $a_j>0$ jest częścią łącznej produktywności czynników produkcji wynikającą z działania pewnych czynników, które nie są uwzględnione w prowadzonych dalej rozważaniach[5]. Parametr α oznacza elastyczność wielkości produkcji (lub wydajności pracy) względem nakładów kapitału rzeczowego (lub technicznego uzbrojenia pracy). Natomiast parametr β to elastyczność łącznej produktywności czynników produkcji względem łącznego efektu grawitacyjnego, opisanego przez g_j.

---

2 Kraje (regiony) będą nazywane dalej również gospodarkami.

3 O wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych zakłada się, iż są różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \geq 0$. Zapis $x(t)$ będzie dalej oznaczał wartość zmiennej x w momencie t, zaś $\dot{x}(t) = dx/dt$ – pochodną zmiennej x po czasie t, czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości zmiennej x w momencie t. Natomiast zapis $\forall j$ będzie oznaczał $\forall j = 1,2,\ldots,N$, gdzie $N>2$ jest liczbą analizowanych krajów (regionów). Podobnie odczytuje się również wyrażenia $\sum_j x_j$ oraz $\prod_j x_j$.

4 Przyjęcie założenia, że $\beta < \frac{1-\alpha}{2}$ w równaniu (1) jest bardzo istotne dla pokazania stabilności nietrywialnego punktu stacjonarnego układu równań różniczkowych (7). Założenie to oznacza ekonomicznie tyle, iż elastyczność produkcji względem efektu grawitacyjnego jest mniejsza od połowy elastyczności produktu względem nakładów pracy.

5 Zróżnicowanie a_j może (jak to ma miejsce np. w modelu Lucasa [1988] lub Mankiwa, Romera, Weila [1992], por. też Malaga, Kliber [2007] lub Roszkowska [2013]) wynikać ze zróżnicowania kapitału ludzkiego pomiędzy analizowanymi krajami (regionami), bądź też może być skutkiem różnych instytucjonalnych lub sektorowych struktur badanych gospodarek.

3) Indywidualne efekty grawitacyjne, łączące kraj (region) *j* z krajem (regionem) *m* opisują zależności:

$$\forall j,m \wedge m \neq j \;\; g_{jm}(t) = \frac{k_j(t)k_m(t)}{d_{jm}^2}, \tag{2}$$

gdzie $\forall j,m \wedge m \neq j \;\; d_{jm} > 0$ oznacza odległość między stolicą gospodarki *j* a stolicą gospodarki *m*. Przez analogię do prawa powszechnej grawitacji Newtona przyjmujemy też, że siła działania indywidualnych efektów grawitacyjnych łączących dwa kraje (regiony) jest wprost proporcjonalna do ich potencjału ekonomicznego (mierzonego k_j i k_m) oraz odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi. Przyjęcie alternatywnego założenia, że indywidualne efekty grawitacyjne opisuje związek:

$$\forall j,m \wedge m \neq j \;\; g_{jm}(t) = \frac{k_j(t)k_m(t)}{d_{jm}^\gamma},$$

gdzie $\gamma > 0$ (czyli, że w mianowniku indywidualnych efektów grawitacyjnych – podobnie jak w analizach makroekonomicznych prowadzonych w grawitacyjnych modelach handlu – występuje d_{jm}^γ, a nie d_{jm}^2) nie ma większego wpływu ani na stabilność analizowanego modelu wzrostu, ani na wnioski płynące z równań (8–9), ani na złote reguły akumulacji kapitału w rozważanym modelu wzrostu gospodarczego.

4) Łączne efekty grawitacyjne (oddziałujące na gospodarkę *j*), są średnią geometryczną z indywidualnych efektów grawitacyjnych. Oznacza to, iż spełnione są związki:

$$\forall j \;\; g_j(t) = \sqrt[N-1]{\prod_{m \neq j} g_{jm}(t)}. \tag{3}$$

5) Podobnie jak w modelu wzrostu Solowa równania przyrostów technicznego uzbrojenia pracy w każdym z krajów (regionów) opisują następujące równania różniczkowe:

$$\forall j \;\; \dot{k}_j(t) = s_j y_j(t) - \mu_j k_j(t), \tag{4}$$

gdzie $\forall j \;\; s_j \in (0;1) \wedge \mu_j > 0$. Wyrażenia s_j oznaczają stopy inwestycji w *j*-tym kraju (regionie), zaś μ_j – stopy ubytku kapitału na pracującego w tym kraju (regionie). Stopy μ_j (dla kolejnych *j*) są sumami stóp deprecjacji kapitału i stopy wzrostu liczby pracujących.

Równowaga modelu

Z zależności (2–3) uzyskuje się równania łącznych efektów grawitacyjnych dane wzorami:

$$\forall j\ \ g_j(t) = \frac{k_j(t)\left(\prod_{m \neq j} k_m(t)\right)^{\frac{1}{N-1}}}{d_j^2}, \tag{5}$$

gdzie: $\forall j\ \ d_j = \sqrt[N-1]{\prod_{m \neq j} d_{jm}} > 0$. Wyrażenia d_j oznaczają średnią geometryczną z odległości stolicy *j*-tej gospodarki od stolic pozostałych gospodarek. Dlatego też im mniejszą wartość przyjmuje d_j, tym bardziej centralnie położona jest *j*-ta gospodarka, zaś wysokie wartości d_j są tożsame z peryferyjnym (w sensie geograficznym) charakterem *j*-tej gospodarki.

Wstawiając związki (5) do równań (1) mamy:

$$\forall j\ \ y_j(t) = \theta_j \left(\prod_{m \neq j} k_m(t)\right)^{\frac{\beta}{N-1}} (k_j(t))^{\alpha+\beta}, \tag{6}$$

gdzie: $\forall j\ \ \theta_j = \frac{a_j}{d_j^{2\beta}} > 0.$

Z zależności (4) i (6) dochodzi się do następującego układu równań różniczkowych:

$$\forall j\ \ \dot{k}_j(t) = s_j \theta_j \left(\prod_{m \neq j} k_m(t)\right)^{\frac{\beta}{N-1}} (k_j(t))^{\alpha+\beta} - \mu_j k_j(t). \tag{7}$$

Korzystając z twierdzenia Grobmana-Hartmana (por. Ombach [1999, s. 219–221]) można pokazać (Mroczek, Tokarski, Trojak [2014]), że układ równań różniczkowych (7) ma dokładnie jeden nietrywialny punkt stacjonarny $k^* = (k_1^*, k_2^*, \ldots, k_N^*)$ w przestrzeni fazowej $P = [0;+\infty)^N$, który charakteryzuje się asymptotyczną stabilnością[6]. Dlatego też punkt k^* będzie dalej traktowany jako punkt długookresowej równowagi grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego.

Można również pokazać (Mroczek, Tokarski, Trojak [2014]), że w nietrywialnym punkcie stacjonarnym k^* techniczne uzbrojenie pracy (k_j^*) oraz wydajność pracy (y_j^*) w *j*-tym kraju (regionie) opisane są przez równania:

$$\forall j\ \ \ln k_j^* = \frac{\frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)} \sum_m \ln \frac{s_m a_m}{\mu_m d_m^{2\beta}} + \ln \frac{s_j a_j}{\mu_j d_j^{2\beta}}}{1 - \alpha - \frac{N-2}{N-1}\beta}. \tag{8}$$

6 Układ równań różniczkowych (7) posiada także rozwiązanie trywialne (0,0,…,0), które dalej będzie jednak pomijane jako nieciekawe zarówno z ekonomicznego, jak i matematycznego punktu widzenia.

oraz:

$$\forall j \ \ln y_j^* = \ln \frac{a_j}{d_j^{2\beta}} + \frac{\alpha + \frac{N-2}{N-1}\beta}{1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta} \ln \frac{s_j a_j}{\mu_j d_j^{2\beta}} +$$

$$+ \frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)} \sum_m \ln \frac{s_m a_m}{\mu_m d_m^{2\beta}}. \qquad (9)$$

Z równań (8–9) płyną m.in. cztery następujące wnioski. Po pierwsze, długookresowy zasób technicznego uzbrojenia pracy i strumień wydajności pracy w kraju (regionie) j, podobnie jak ma to miejsce w oryginalnym modelu Solowa, są tym wyższe, im wyższa jest stopa inwestycji s_j oraz im niższa jest stopa ubytku kapitału na pracującego μ_j w tym kraju (regionie). Po drugie, im bardziej centralnie położona jest dana gospodarka, czyli im niższa jest średnia geometryczna z odległości d_{jm}, tym wyższy jest poziom zarówno technicznego uzbrojenia pracy, jak i wydajności pracy w warunkach długookresowej równowagi grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego. Po trzecie, poziomy rozważanych tu zmiennych makroekonomicznych w j-tym kraju (regionie) są tym wyższe, im wyższa jest średnia geometryczna $\sqrt[N-1]{\prod_{m \neq j} s_m}$ ze stóp inwestycji w pozostałych krajach (regionach) oraz im niższa jest średnia geometryczna $\sqrt[N-1]{\prod_{m \neq j} \mu_m}$ ze stóp ubytku kapitału na pracującego w tych krajach (regionach). Po czwarte, na poziom wydajności pracy oraz technicznego uzbrojenia pracy w j-tej gospodarce w warunkach długookresowej równowagi ma wpływ także pozagrawitacyjna część łącznej produktywności czynników produkcji a_j zarówno w tej gospodarce, jak i średnia geometryczna $\sqrt[N-1]{\prod_{m \neq j} a_m}$ z pozagrawitacyjnych części łącznych produktywności czynników produkcji w pozostałych krajach (regionach). Co więcej, im wyższe jest a_j lub $\sqrt[N-1]{\prod_{m \neq j} a_m}$, tym wyższe wartości przyjmują y_j^* oraz k_j^*.

Złote reguły akumulacji kapitału

Idea złotych reguł akumulacji kapitału po raz pierwszy pojawiła się w analizach makroekonomicznych w znanym artykule Phelpsa z 1961 r. W artykule tym przez złotą regułę akumulacji kapitału rozumie się taką stopę oszczędności/inwestycji, która maksymalizuje wielkość konsumpcji na pracującego w gospodarce znajdującej się w stanie długookresowej równowagi modelu wzrostu gospodarczego Solowa. Stopa oszczędności/inwestycji, zgodna ze złotą regułą akumulacji w modelu Solowa z funkcją produkcji Cobba-Douglasa

[1928], jest równa elastyczności strumienia wytworzonego produktu względem nakładów kapitału rzeczowego.

Jak już wspomniano, złotą regułę akumulacji kapitału z modelu Solowa można również uogólnić na neoklasyczne modele wzrostu gospodarczego Mankiwa, Romera, Weila [1992] oraz Nonnemana, Vanhoudta [1996] (por. np. Dykas, Sulima, Tokarski [2008] lub Tokarski [2011]). Wówczas złotą regułą akumulacji kapitału jest taka kombinacja stóp inwestycji w kolejne zasoby kapitałowe, która odpowiada kombinacji elastyczności produkcji względem owych nakładów kapitałowych[7].

W prezentowanych dalej analizach teoretycznych złotą regułę akumulacji kapitału w grawitacyjnym modelu wzrostu gospodarczego definiowana jest na dwa sposoby. W pierwszym wariancie przez złotą regułę akumulacji będzie się rozumieć taką kombinację stóp inwestycji w kolejnych krajach (regionach), która maksymalizuje średnią geometryczną z konsumpcji na pracującego w długookresowej równowadze modelu we wszystkich krajach (regionach). Natomiast w drugim wariancie reguła ta definiowana jest jako taka kombinacja stóp inwestycji, która maksymalizuje długookresową konsumpcję na pracującego w każdym z rozważanych krajów (regionów).

Wariant pierwszy – maksymalizacja średniej geometrycznej z konsumpcji na pracującego

W punkcie stacjonarnym k^* (przy $\dot{k}_1 = \dot{k}_2 = \ldots \dot{k}_N = 0$) zachodzą związki:

$$\left.\begin{aligned}
(1-\alpha-\beta)\ln k_1^* - \frac{\beta}{N-1}\ln k_2^* - \ldots - \frac{\beta}{N-1}\ln k_N^* &= \ln\frac{s_1\theta_1}{\mu_1} \\
-\frac{\beta}{N-1}\ln k_1^* + (1-\alpha-\beta)\ln k_2^* - \ldots - \frac{\beta}{N-1}\ln k_N^* &= \ln\frac{s_2\theta_2}{\mu_2} \\
&\vdots \\
-\frac{\beta}{N-1}\ln k_1^* - \frac{\beta}{N-1}\ln k_2^* - \ldots + (1-\alpha-\beta)\ln k_N^* &= \ln\frac{s_N\theta_N}{\mu_N}
\end{aligned}\right\},$$

co (po zsumowaniu powyższych równań) daje:

$$(1-\alpha-2\beta)\sum_j \ln k_j^* = \sum_j \ln\frac{s_j\theta_j}{\mu_j},$$

[7] Oznacza to, iż w dwukapitałowym modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila złotą regułą akumulacji kapitału jest kombinacja stóp inwestycji w zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego, która odpowiada kombinacji elastyczności produkcji względem owych zasobów kapitałowych produkcie. Natomiast w *N*-kapitałowym modelu wzrostu Nonnemana-Vanhoudta złotą regułą akumulacji kapitału jest kombinacja stóp inwestycji w *N* zasobów kapitałowych równa kombinacji elastyczności strumienia produktu względem tych nakładów.

a stąd:

$$\sum_j \ln k_j^* = \frac{\sum_j \ln \frac{s_j \theta_j}{\mu_j}}{1-\alpha-2\beta}. \tag{10}$$

Z zależności (6) wynika, iż:

$$\forall j \;\; \ln y_j(t) = \ln \theta_j + \frac{\beta}{N-1}\sum_{m \neq j} \ln k_m(t) + (\alpha+\beta)\ln k_j(t),$$

więc, w szczególności, w punkcie stacjonarnym k^*:

$$\forall j \;\; \ln y_j^* = \ln \theta_j + \frac{\beta}{N-1}\sum_{m \neq j} \ln k_m^* + (\alpha+\beta)\ln k_j^*,$$

czyli:

$$\sum_j \ln y_j^* = \sum_j \ln \theta_j + (\alpha+2\beta)\sum_j \ln k_j^*. \tag{11}$$

Z równań (10) i (11) wynika zaś, że:

$$\sum_j \ln y_j^* = \sum_j \ln \theta_j + \frac{\alpha+2\beta}{1-\alpha-2\beta}\sum_j \ln \frac{s_j \theta_j}{\mu_j},$$

co powoduje, iż:

$$\sum_j \ln y_j^* = \frac{1}{1-\alpha-2\beta}\sum_j \ln \theta_j + \frac{\alpha+2\beta}{1-\alpha-2\beta}\sum_j \ln \frac{s_j}{\mu_j}. \tag{12}$$

Niech $s = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ oznacza dowolną kombinację stóp inwestycji należącą do zbioru $(0;1)^N$, zaś $c^* = (c_1^*, c_2^*, \ldots, c_N^*) \in (0;+\infty)^N$ – kombinację konsumpcji na pracującego w punkcie stacjonarnym k^*. Wiadomo ponadto, że w długookresowej równowadze konsumpcję na pracującego w j-tym kraju (regionie) opisuje równanie:

$$\forall j \;\; c_j^* = (1-s_j)y_j^*. \tag{13}$$

Oznaczmy też przez $\overline{c}(s)$ średnią geometryczną z konsumpcji na pracującego (w długookresowej równowadze grawitacyjnego modelu wzrostu gospodarczego) odpowiadającą kombinacji stóp inwestycji s. Wówczas, po uwzględnieniu związków (13), mamy:

$$\overline{c}(s) = \sqrt[N]{\prod_j c_j^*(s)} = \sqrt[N]{\left(\prod_j (1-s_j)\right)\left(\prod_j y_j^*(s)\right)}. \tag{14}$$

Średnią geometryczną $\overline{c}(s)$ można traktować jako swego rodzaju (osadzoną w przestrzeni geograficznej) funkcję użyteczności, w której elastyczność użyteczności względem konsumpcji na pracującego w każdym z krajów (regionów) równa jest $1/N$.

Jak już wspomniano, w analizowanym tu wariancie przez złotą regułę akumulacji kapitału będzie rozumiana taka kombinacja stóp inwestycji $\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \ldots, \hat{s}_N) \in (0;1)^N$, która maksymalizuje średnią geometryczną z konsumpcji na pracującego we wszystkich gospodarkach. Średnia ta dana jest wzorem (14).

Maksymalizacja funkcji (14) względem kombinacji $s \in (0;1)^N$ tożsama jest z maksymalizacją funkcji:

$$\varphi(s) = N \ln \overline{c}(s) = \sum_j \ln(1 - s_j) + \sum_j \ln y_j^*(s), \tag{15}$$

względem $s \in (0;1)^N$. Funkcję (15), po uwzględnieniu równania (12), można zapisać następująco:

$$\varphi(s) = \sum_j \ln(1 - s_j) + \frac{\alpha + 2\beta}{1 - \alpha - 2\beta} \sum_j \ln s_j +$$

$$+ \frac{1}{1 - \alpha - 2\beta} \sum_j \ln \theta_j - \frac{\alpha + 2\beta}{1 - \alpha - 2\beta} \sum_j \ln \mu_j . \tag{16}$$

Warunki konieczne maksymalizacji funkcji (16) przedstawiają się następująco:

$$\forall j \ \frac{\partial \varphi}{\partial s_j} = -\frac{1}{1 - s_j} + \frac{\alpha + 2\beta}{(1 - \alpha - 2\beta) s_j} = 0, \tag{17}$$

zaś warunek dostateczny sprowadza się do tego, by hesjan:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \partial^2 \varphi / \partial s_1^2 & \partial^2 \varphi / \partial s_1 \partial s_2 & \ldots & \partial^2 \varphi / \partial s_1 \partial s_N \\ \partial^2 \varphi / \partial s_2 \partial s_1 & \partial^2 \varphi / \partial s_2^2 & \ldots & \partial^2 \varphi / \partial s_2 \partial s_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 \varphi / \partial s_N \partial s_1 & \partial^2 \varphi / \partial s_N \partial s_2 & \ldots & \partial^2 \varphi / \partial s_N^2 \end{bmatrix}$$

był ujemnie określony przynajmniej w punkcie, w którym zachodzą równania (17). Hesjan $H(s)$ można zapisać wzorem:

$$H(s) = \begin{bmatrix} -\Omega_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\Omega_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -\Omega_N \end{bmatrix},$$

gdzie: $\forall j\ \Omega_j = \frac{1}{(1-s_j)^2} + \frac{\alpha+2\beta}{1-\alpha-2\beta)s_j^2} > 0$. Dlatego też kolejne minory główne ($m_1, m_2, \ldots, m_N$) hesjanu H (s) określają wzory:

$$\forall j\ m_j = (-1)^j \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_j ,$$

czyli minory główne m_j hesjanu H (s) są ujemne dla j nieparzystych oraz dodatnie dla j parzystych. Płynie stąd wniosek, że hesjan H (s) ten jest ujemnie określony dla dowolnego $s \in (0;1)^N$, więc (w szczególności) jest także ujemnie określony w punkcie $\hat{s} \in (0;1)^N$. Punkt ten jest zaś rozwiązaniem układu równań złożonego z równań (17). A zatem:

$$\forall j\ \frac{1}{1-s_j} = \frac{\alpha+2\beta}{(1-\alpha-2\beta)s_j},$$

co prowadzi do wniosku, iż:

$$\forall j\ \hat{s}_j = \alpha + 2\beta. \tag{18}$$

Równania (18) wyznaczają pierwszy wariant złotych reguł akumulacji kapitału w rozważanym tu modelu wzrostu gospodarczego. Z równań tych można wyciągnąć kilka następujących wniosków. Po pierwsze, złote stopy inwestycji $\hat{s}_j$ zależne są od elastyczności produktu względem nakładów kapitału, czyli α, oraz od siły działania efektu grawitacyjnego, a więc od β. Po drugie, im wyższe są wartości α lub β, tym wyższa jest optymalna stopa inwestycji $\hat{s}_j$ w j-tej gospodarce. Po trzecie, jeśli gasną efekty grawitacyjne, czyli $\beta \to 0^+$, to złota stopa inwestycji $\hat{s}_j$ jest zbieżna do złotej reguły Phelpsa. Po czwarte, przy ekstremalnie silnym działaniu efektów grawitacyjnych, a więc przy $\beta \to \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^-$, stopy inwestycji $\hat{s}_j$ zbieżne są do 1^-.

Wariant drugi – maksymalizacja konsumpcji na pracującego w każdej z gospodarek

W tym wariancie przez złotą regułę akumulacji kapitału w analizowanym grawitacyjnym modelu wzrostu gospodarczego będzie rozumiana taka kombinacja stóp inwestycji $s \in (0;1)^N$, która maksymalizuje długookresową konsumpcję na pracującego w każdej z gospodarek. Szukając tej złotej reguły w j-tym kraju (regionie) przyjmie się także, że stopy inwestycji w pozostałych krajach (regionach) ukształtowały się na pewnych stałych poziomach (a zatem stopy te traktuje się wówczas jako zmienne egzogeniczne). Wynika stąd, iż szukając złotej reguły w j-tym regionie należy zmaksymalizować funkcję:

$$\forall j\ c_j^*(s_j) = (1-s_j)y_j^*(s_j) \ \text{względem}\ s_j \in (0;1).$$

Maksymalizacja ta tożsama jest z maksymalizacją funkcji:

$$\forall j \ \ \varphi_j(s_j) = \ln c_j^*(s_j) = \ln(1-s_j) + \ln y_j^*(s_j)\,,$$

względem $s_j \in (0;1)$. To zaś, wraz z równaniem (9), daje:

$$\forall j \ \ \varphi_j(s_j) = \ln(1-s_j) + \ln\frac{a_j}{d_j^{2\beta}} + \frac{\alpha + \frac{N-2}{N-1}\beta}{1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta}\ln\frac{s_j a_j}{\mu_j d_j^{2\beta}} +$$

$$+\frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)}\sum_m \ln\frac{s_m a_m}{\mu_m d_m^{2\beta}}$$

lub:

$$\forall j \ \ \varphi_j(s_j) = \ln(1-s_j) + \frac{\alpha + \frac{N-2}{N-1}\beta}{1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta}\ln s_j +$$

$$+\frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)}\ln s_j + \Theta_j\,, \tag{19}$$

gdzie dla kolejnych j [8]:

$$\Theta_j = \ln\frac{a_j}{d_j^{2\beta}} + \frac{\alpha + \frac{N-2}{N-1}\beta}{1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta}\ln\frac{a_j}{\mu_j d_j^{2\beta}} +$$

$$+\frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)}\ln\frac{a_j}{\mu_j d_j^{2\beta}} +$$

$$+\frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)}\sum_{m\neq j} \ln\frac{s_m a_m}{\mu_m d_m^{2\beta}}\,.$$

8 Wyrażenia Θ_j są niezależne od s_j, zatem nie wpływają również na maksimum funkcji (19–20).

Równanie (19) można zapisać także następująco:

$$\forall j \;\; \varphi_j(s_j) = \ln(1-s_j) + \frac{(N-1)\left(\alpha + \frac{N-2}{N-1}\beta\right)(1-\alpha-2\beta)+\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)} \ln s_j + \Theta_j,$$

lub:

$$\forall j \;\; \varphi_j(s_j) = \ln(1-s_j) + \lambda_N \ln s_j + \Theta_j, \tag{20}$$

gdzie:

$$\lambda_N = \frac{(N-1)\left(\alpha + \frac{N-2}{N-1}\beta\right) + \frac{\beta}{1-\alpha-2\beta}}{(N-1)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)} > 0. \tag{21}$$

Warunki (konieczny i dostateczny) maksymalizacji funkcji (20) względem $s_j \in (0;1)$, dla kolejnych j, przedstawiają się następująco:

$$\frac{d\varphi_j}{ds_j} = 0 \tag{22}$$

i:

$$\frac{d^2\varphi_j}{ds_j^2} < 0. \tag{23}$$

Z równania (20) wynika zaś, że:

$$\frac{d\varphi_j}{ds_j} = -\frac{1}{1-s_j} + \frac{\lambda_N}{s_j} \tag{24}$$

oraz:

$$\frac{d^2\varphi_j}{ds_j^2} = -\frac{1}{(1-s_j)^2} - \frac{\lambda_N}{s_j^2} < 0. \tag{25}$$

Ze związku (25) można wyciągnąć wniosek, iż dla dowolnego $s_j \in (0;1)$ spełniony jest warunek dostateczny (23) maksymalizacji funkcji (20). Wstawiając zaś zależność (24) do związku (22) sprowadza się warunek konieczny maksymalizacji analizowanej funkcji do równania:

$$\frac{\lambda_N}{s_j} = \frac{1}{1-s_j},$$

co powoduje, że:

$$\tilde{s}_j = \frac{\lambda_N}{1+\lambda_N}, \tag{26}$$

gdzie $\tilde{s}_j$ oznacza stopę inwestycji w *j*-tym kraju (regionie) odpowiadającą złotej regule akumulacji kapitału.

Z zależności (21) i (26) można wyciągnąć następujące wnioski:

- Złota stopa inwestycji $\tilde{s}_j$ w *j*-tym kraju (regionie) zależna jest od trzech następujących czynników. Elastyczności produktu względem nakładów kapitałowych (α), siły działania efektu grawitacyjnego (β) oraz liczby krajów (regionów), w których działa efekt grawitacyjny (czyli N).
- Ponieważ:

$$\frac{d\tilde{s}_j}{d\lambda_N} = \frac{1}{(1+\lambda_N)^2} > 0,$$

zatem monotoniczność $\tilde{s}_j$ względem α, β i N jest taka sama, jak monotoniczność λ_N względem owych zmiennych.
- Jeśli siła działania efektu grawitacyjnego spada do 0, czyli $\beta \to 0^+$, to $\lambda_N \to \frac{\alpha}{1-\alpha}$, co powoduje, że stopa inwestycji $\tilde{s}_j$ jest wówczas zbieżna do α, czyli dąży do złotej reguły akumulacji kapitału Phelpsa.
- Przy ekstremalnie silnym działaniu efektu grawitacyjnego, a więc przy $\beta \to \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^-$, $\lambda_N \to +\infty$, skąd wynika, że wówczas $\tilde{s}_j \to 1^-$.
- Ponieważ:

$$\ln\lambda_N = \ln\left((N-1)\left(\alpha + \frac{N-2}{N-1}\beta\right) + \frac{\beta}{1-\alpha-2\beta}\right) - \ln(N-1) - \ln\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right),$$

więc:

$$\frac{\partial \ln\lambda_N}{\partial\beta} = \frac{N-2+\dfrac{1-\alpha}{(1-\alpha-2\beta)^2}}{(N-1)\left(\alpha+\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)+\dfrac{\beta}{1-\alpha-2\beta}} + \frac{N-2}{(N-1)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)} > 0,$$

co powoduje, że także $\partial\lambda_N / \partial\beta > 0$. Oznacza to, że im silniej działają efekty grawitacyjne, tym wyższa powinna być stopa inwestycji $\tilde{s}_j$ odpowiadająca temu wariantowi złotej reguły akumulacji kapitału w analizowanym modelu wzrostu gospodarczego.

- Podobnie, stąd, że:

$$\frac{\partial \ln \lambda_N}{\partial \alpha} = \frac{N-1+\dfrac{\beta}{(1-\alpha-2\beta)^2}}{(N-1)\left(\alpha+\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)+\dfrac{\beta}{(1-\alpha-2\beta)}} + \frac{1}{1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta} > 0,$$

można wyciągnąć wniosek, iż $\partial \lambda_N / \partial \alpha > 0$, a zatem (podobnie jak w pracy Phelpsa [1961]) wysokiej elastyczności produkcji względem nakładów kapitału odpowiada wysoka stopa inwestycji maksymalizująca długookresową konsumpcję na pracującego w *j*-tym kraju (regionie).

- Stąd zaś, że dla dowolnego $N>2$, zachodzi:

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N = \frac{N\left(\alpha+\dfrac{N-1}{N}\beta\right)+\dfrac{\beta}{1-\alpha-2\beta}}{N\left(1-\alpha-\dfrac{N-1}{N}\beta\right)} - \frac{(N-1)\left(\alpha+\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)+\dfrac{\beta}{1-\alpha-2\beta}}{(N-1)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)},$$

co prowadzi do równości:

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N = \frac{\left(\alpha+\dfrac{N-1}{N}\beta\right)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)-\left(\alpha+\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)\left(1-\alpha-\dfrac{N-1}{N}\beta\right)}{\left(1-\alpha-\dfrac{N-1}{N}\beta\right)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)} +$$

$$+\frac{\beta\left((N-1)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)-N\left(1-\alpha-\dfrac{N-1}{N}\beta\right)\right)}{N(N-1)\left(1-\alpha-\dfrac{N-1}{N}\beta\right)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)(1-\alpha-2\beta)},$$

którą można zapisać również następująco:

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N = \frac{\beta}{N(N-1)\left(1-\alpha-\dfrac{N-1}{N}\beta\right)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)} +$$

$$-\frac{(1-\alpha-\beta)\beta}{N(N-1)\left(1-\alpha-\dfrac{N-1}{N}\beta\right)\left(1-\alpha-\dfrac{N-2}{N-1}\beta\right)(1-\alpha-\beta)}$$

a zatem:

$$\lambda_{N+1}-\lambda_N=\frac{-\beta^2}{N(N-1)\left(1-\alpha-\frac{N-1}{N}\beta\right)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)(1-\alpha-2\beta)}<0,$$

wynika, że dla każdego $N>2$ spełniona jest nierówność: $\lambda_{N+1}<\lambda_N$. Płynie stąd wniosek, iż im więcej gospodarek krajowych (regionalnych) korzysta z działania efektu grawitacyjnego, tym niższa jest stopa inwestycji $\tilde{s}_j$ gwarantująca j-tej gospodarce maksymalną konsumpcję na pracującego w długim okresie.

- Licząc zaś granicę (przy $N\to+\infty$) z λ_N mamy:

$$\lim_{N\to+\infty}\lambda_N=\lim_{N\to+\infty}\frac{\alpha+\frac{N-2}{N-1}\beta+\frac{\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)}}{1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta}=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta},$$

co wraz ze związkiem (26) daje:

$$\lim_{N\to+\infty}\tilde{s}_j=\alpha+\beta. \tag{27}$$

Z równania (27) wynika, że przy bardzo dużej liczbie gospodarek korzystających w efektu grawitacyjnego optymalna stopa inwestycji w każdym z krajów (regionów), czyli $\tilde{s}_j$, wyższa jest od phelpsowskiej złotej stopy inwestycji (równej α) oraz niższa od optymalnej stopy inwestycji w wariancie pierwszym (wynoszącej $\alpha+2\beta$).

Porównanie stanów długookresowej równowagi gospodarki przy różnych złotych regułach akumulacji kapitału

Niech p_j (dla kolejnych j) oznacza iloraz długookresowej wydajności pracy w pierwszym i drugim wariancie złotych reguł akumulacji kapitału w rozważanym modelu wzrostu gospodarczego. Zatem wówczas:

$$\forall j \;\; p_j=\frac{\hat{y}_j^*}{\tilde{y}_j^*},$$

gdzie $\hat{y}_j^*$ ($\tilde{y}_j^*$) oznacza długookresową wydajność pracy odpowiadającą kombinacji stóp inwestycji $\hat{s}$ ($\tilde{s}$). Oznaczmy też przez:

$$\overline{p}=\frac{\hat{\overline{y}}}{\tilde{\overline{y}}}$$

iloraz średniej geometrycznej z wydajności pracy w wariancie pierwszym i drugim złotych reguł akumulacji kapitału. Analogicznie zdefiniujmy także przez $\forall j \; q_j = \frac{\hat{c}_j^*}{\tilde{c}_j^*}$ oraz $\bar{q} = \frac{\hat{\bar{c}}}{\tilde{\bar{c}}}$ ilorazy długookresowych wielkości konsumpcji na pracującego w kolejnych gospodarkach w pierwszym i drugim wariancie analizowanych reguł i ilorazy ich średnich geometrycznych. Wówczas:

$$\forall j \; \ln p_j = \ln \hat{y}_j^* - \ln \tilde{y}_j^*, \tag{28}$$

$$\ln \bar{p} = \ln \hat{\bar{y}} - \ln \tilde{\bar{y}}, \tag{29}$$

$$\forall j \; \ln q_j = \ln \hat{c}_j^* - \ln \tilde{c}_j^* \tag{30}$$

oraz:

$$\ln \bar{q} = \ln \hat{\bar{c}} - \ln \tilde{\bar{c}}. \tag{31}$$

Ze związków (9) i (28) można wyciągnąć wniosek, że:

$$\forall j \; \ln p_j = \left(\frac{\alpha + \frac{N-2}{N-1}\beta}{1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta} + \frac{N\beta}{(N-1)(1-\alpha-2\beta)\left(1-\alpha-\frac{N-2}{N-1}\beta\right)} \right)(\ln \hat{s}_j - \ln \tilde{s}_j),$$

co (po kilku przekształceniach) daje:

$$\forall j \; \ln p_j = \frac{\alpha + 2\beta}{1-\alpha-2\beta}(\ln \hat{s}_j - \ln \tilde{s}_j). \tag{32}$$

Z równań (32) wynika, że ilorazy p_j zależne są od trzech czynników. Elastyczności produkcji względem nakładów kapitału α, siły działania efektu grawitacyjnego β oraz liczby krajów (regionów) korzystających z działania efektu grawitacyjnego N (należy bowiem pamiętać o tym, że stopy inwestycji $\hat{s}_j$ i $\tilde{s}_j$ są również funkcjami α, β oraz N). Ponieważ zróżniczkowanie równania (32) względem α i β, po uwzględnieniu równań $\hat{s}_j$ oraz $\tilde{s}_j$, jest mocno skomplikowane, zatem autorzy zdecydowali się na policzenie ilorazów p_j na podstawie (przedstawionej w pracy Mroczek, Tokarski [2014]) kalibracji parametrów α i β dla 28 krajów UE za lata 2002–2012. Zgodnie z tą kalibracją α=0,293, β=0,0868, co powoduje, iż $\hat{s}_j = 0{,}4666$ oraz $\tilde{s}_j \approx 0{,}3803$[9] i wówczas

9 Złote stopy inwestycji równe (odpowiednio) $\hat{s}_j \approx 46{,}7\%$ i $\tilde{s}_j \approx 38{,}0\%$, wynikające z prezentowanych tu złotych reguł akumulacji kapitału w grawitacyjnym modelu wzrostu gospodarczego i cytowanych kalibracji, mogą wydawać się znacząco przeszacowane, gdyż w krajach UE stopy te w latach 2002–2012 kształtowały się między 16,2% (w Wielkiej Brytanii) a 28,6% (w Estonii – za Mroczek, Tokarski [2014]). Należy jednak pamiętać, iż dążenie do uzyskania złotych reguł akumulacji kapitału wiąże się z radykalnym ograniczeniem bieżącej konsumpcji np. z 83,8% produktu w Wielkiej Brytanii lub z 71,4% produktu w Estonii do 53,3% produktu (zarówno w Wielkiej Brytanii, jak i w Estonii w wariancie pierwszym) lub do 62,0% produktu (w obu tych

$\ln p_j \approx 0{,}179$, a zatem: $p_j \approx 1{,}196$. Płynie stąd wniosek, że jeśli α=0,293, β=0,0868 i N=28, to w pierwszym badanym wcześniej wariancie złotych reguł akumulacji każda z gospodarek powinna osiągnąć o prawie 20% wyższą długookresową wydajność pracy, niż w wariancie drugim.

Co więcej, stąd, że dla każdego j ilorazy p_j są sobie równe oraz ze związków (28–29) płynie wniosek, iż dla dowolnych j $\overline{p} = p_j$. A zatem przy α=0,293, β=0,0868 i N=28 również średnia geometryczna z długookresowej wydajności pracy powinna być o prawie 20% wyższa w pierwszym wariancie złotych reguł akumulacji kapitału, niż w wariancie drugim.

Ponieważ:

$$\forall j \ \ln \hat{c}_j^* = \ln(1-\hat{s}_j) + \ln \hat{y}_j^*$$

oraz

$$\forall j \ \ln \tilde{c}_j^* = \ln(1-\tilde{s}_j) + \ln \hat{y}_j^*,$$

więc stąd oraz z równań (30) i (32) mamy:

$$\forall j \ \ln q_j = \ln \frac{1-\hat{s}_j}{1-\tilde{s}_i} + \ln \hat{y}_j^* - \ln \tilde{y}_j^* = \ln \frac{1-\hat{s}_j}{1-\tilde{s}_i} + \ln p_j. \tag{33}$$

Równania (33) interpretuje się ekonomicznie analogicznie do związków (32). Dlatego też, z równań tych wynika, że jeśli α=0,293, β=0,0868 i N=28, to dla każdego j $\ln q_j \approx 0{,}0289$, co powoduje, że $q_j \approx 1{,}029$. A zatem w pierwszym wariancie złotych reguł akumulacji kapitału długookresowa konsumpcja na pracującego w każdej z gospodarek powinna być o ok. 2,9% wyższa, niż w wariancie drugim. Wówczas również, przy $q_1 = q_2 = \ldots = q_N$, ze związku (31) wynika, że dla dowolnego j $\overline{q} = q_j$.

Odnosząc zaś złote reguły w wariancie pierwszym lub drugim w grawitacyjnym modelu wzrostu gospodarczego do oryginalnych złotych reguł akumulacji Phelpsa (przy α=0,293) okazuje się, że w wariancie pierwszym długookresowa wydajność pracy byłaby o ok. 50,2% wyższa, niż przy złotych regułach Phelpsa, natomiast długookresowa konsumpcja na pracującego – o ok. 13,3% wyższa. Jeśli zaś chodzi o porównanie długookresowych wielkości wydajności pracy i konsumpcji na pracującego – wielkości te byłyby w wariancie drugim o (odpowiednio) ok. 25,6% oraz 10,1% wyższe niż w oryginalnych złotych regułach Phelpsa.

---

gospodarkach w wariancie drugim). To zaś wymaga wyrzeczeń konsumpcji bieżącego pokolenia, na rzecz konsumpcji przyszłych pokoleń. Odchylenia bieżących stóp inwestycji od złotoregułowych stóp inwestycji można zaś stosunkowo prosto wytłumaczyć teoretycznie na gruncie modeli optymalnego sterowania (por. np. Tokarski [2009; 2011] lub Konopczyński [2015]), gdzie uwzględnienie subiektywnej stopy dyskonta konsumpcji przyszłej (w stosunku do konsumpcji bieżącej) typowych podmiotów w gospodarce prowadzi do kształtowania się rzeczywistych stóp inwestycji poniżej złotych reguł akumulacji kapitału Phelpsa.

Co więcej, jeśli zaś (przy powyższych założeniach) porówna się wydajność pracy i konsumpcję na pracującego w długookresowej równowadze grawitacyjnego modelu wzrostu w pierwszym i drugim wariancie złotych reguł akumulacji kapitału z wartościami tych zmiennych przy nieważonej średniej stóp inwestycji w krajach UE w latach 2002–2012 (wynoszącej 21,6%), to okazuje się, że w pierwszym wariancie długookresowa wydajność pracy w pierwszym wariancie powinna być o 96,2% wyższa niż przy 21,6% stopie inwestycji, w drugim zaś wariancie – o 64,0% wyższa. Natomiast długookresowa konsumpcja na pracującego winna być w wariancie pierwszym o 33,5% wyższa niż przy s_j=21,6%, zaś w drugim wariancie – o 29,7% wyższa niż przy średnich stopach inwestycji w krajach UE w latach 2002–2012.

Podsumowanie

Prowadzone w artykule rozważania można podsumować następująco:

I. Zaprezentowany w artykule grawitacyjny model wzrostu gospodarczego bazuje na modelu wzrostu Solowa. W modelu tym przyjmuje się również założenie, że na zróżnicowanie łącznej produktywności czynników produkcji (a tym samym także na zróżnicowanie wydajności pracy) w krajach (regionach) wypływają występujące między nimi interakcje przestrzenne. Interakcje te opisane są przez efekty grawitacyjne. Sposób kwantyfikacji siły działania efektów grawitacyjnych w tym modelu wzrostu gospodarczego nawiązuje do newtonowskiego prawa powszechnej grawitacji. Zakłada się zatem, że gospodarki oddziałują na siebie z określoną siłą, która jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich potencjałów gospodarczych oraz odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

II. Opisany model teoretyczny posiada nietrywialny, asymptotycznie stabilny punkt stacjonarny, który na gruncie ekonomicznym traktowany jest jako punkt długookresowej równowagi modelu. W warunkach długookresowej równowagi analizowanego modelu wzrostu techniczne uzbrojenie pracy oraz wydajność pracy w danym kraju (regionie) zależą od stopy inwestycji, stopy ubytku kapitału na pracującego, pozagrawitacyjnej części łącznej produktywności czynników produkcji w tym kraju (regionie), od średniej odległości tej gospodarki od pozostałych gospodarek, a także od stóp inwestycji, stóp ubytku technicznego uzbrojenia pracy oraz pozagrawitacyjnych części łącznej produkcyjności czynników produkcji w pozostałych krajach (regionach).

III. W teorii ekonomii przez złotą regułę akumulacji Phelpsa rozumie się taką stopę oszczędności/inwestycji, która maksymalizuje wielkość konsumpcji na pracującego w gospodarce znajdującej się w stanie długookresowej równowagi typu Solowa. Stopa oszczędności/inwestycji, zgodna ze złotą regułą akumulacji w modelu Solowa z funkcją produkcji Cobba-Douglasa, jest równa elastyczności strumienia produktu względem zasobu kapitału. Złotą regułę akumulacji kapitału z modelu Solowa można również uogólnić na neoklasyczne modele wzrostu gospodarczego Mankiwa, Romera, Weila oraz Nonnemana, Vanhoudta.

IV. W grawitacyjnym modelu wzrostu gospodarczego złota reguła akumulacji kapitału definiowana jest przez autorów na dwa sposoby. Regułę tę definiuje się albo jako taką kombinację stóp inwestycji w gospodarkach objętych działaniem efektu grawitacyjnego, która maksymalizuje średnią geometryczną z konsumpcji na pracującego (w długookresowej równowadze) we wszystkich gospodarkach, albo jako taką kombinację owych stóp, która maksymalizuje długookresową konsumpcję na pracującego w każdej gospodarek.

V. W pierwszym wariancie złotą regułą akumulacji kapitału są stopy inwestycji równe (w każdej z gospodarek) elastyczności produktu względem nakładów kapitałowych powiększonej o dwukrotność siły działania efektu grawitacyjnego.

VI. Natomiast w drugim wariancie optymalne stopy inwestycji zależne są (podobnie jak w pierwszym wariancie) od elastyczności produkcji względem kapitału, siły działania efektu grawitacyjnego oraz (co nie występuje w pierwszym wariancie) liczby gospodarek podlegających działaniu efektu grawitacyjnego. Co więcej, w wariancie tym wzrost elastyczności produkcji względem kapitału i/lub siły działania efektów grawitacyjnych prowadzi do wzrostu optymalnych stóp inwestycji. Jeśli zaś liczba krajów (regionów), na które oddziałuje efekt grawitacyjny rośnie, to spadają stopy inwestycji, które maksymalizują długookresową konsumpcję na pracującego w każdej z gospodarek.

VII. W obu rozważanych w artykule wariantach gasnące (do zera) efekty grawitacyjne powodują zbieżność uzyskanych złotych reguł akumulacji z oryginalnymi złotymi regułami Phelpsa. Oznacza to, iż wyznaczone przez autorów złote reguły akumulacji kapitału stanowią uogólnienie złotych reguł akumulacji kapitału Phelpsa na grawitacyjny model wzrostu gospodarczego.

Bibliografia

Cobb C.W., Douglas P.H. [1928], *A Theory of Production*, "American Economic Review", no. 18.

Dykas P., Sulima A., Tokarski T. [2008], *Złote reguły akumulacji kapitału w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, „Gospodarka Narodowa", nr 11–12.

Konopczyński M. [2015], *Optymalna polityka fiskalna w gospodarce otwartej w świetle teorii endogenicznego wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań (w druku).

Linnemann H. [1963], *An Econometric Study of International Trade Flows*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Lucas R.E. [1988], *On the Mechanics of Economics Development*, "Journal of Monetary Economics", July.

Malaga K., Kliber P. [2007], *Konwergencja i nierówności regionalne w Polsce w świetle neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N. [1992], *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, "Quarterly Journal of Economics", May.

Mroczek K., Nowosad A., Tokarski T. [2015], *Efekt grawitacyjny a zróżnicowanie wydajności pracy w krajach bałkańskich*, „Gospodarka Narodowa", nr 2.

Mroczek K., Tokarski T. [2014], *Efekt grawitacyjny a zróżnicowanie wydajności pracy w krajach UE*, referat na IV Ogólnopolską Konferencję im. prof. Z. Czerwińskiego, pt. *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii*, WIGE UEP, Poznań, 25.04.2014.

Mroczek K., Tokarski T., Trojak M. [2014], *Grawitacyjny model zróżnicowania rozwoju ekonomicznego województw*, „Gospodarka Narodowa", nr 3.

Nonneman W., Vanhoudt P. [1996], *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for the OECD Countries*, "Quarterly Journal of Economics", August.

Ombach J. [1999], *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo-maple*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Phelps E.S. [1961], *The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen*, "American Economic Review", September.

Phelps E.S. [1966], *Model of Technical Progress and the Golden Rule of Research*, "Review of Economic Studies", April.

Pulliainen K. [1963], *A World Trade Study. An Econometric Model of the Pattern of Commodity Flows in International Trade in 1948–1960*, "Ekonomiska Samfundet Tidskrift", no. 2.

Roszkowska S. [2013], *Kapitał ludzki a wzrost gospodarczy w Polsce*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

Solow R.M. [1956], *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, "Quarterly Journal of Economics", February.

Tinbergen J. [1962], *Shaping the World Economy: Suggestions for an International Economic Policy*, The Twentieth Century Fund, New York.

Tokarski T. [2009], *Matematyczne modele wzrostu gospodarczego (ujęcie neoklasyczne)*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Tokarski T. [2011], *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Żółtowska E. [1997], *Funkcja produkcji. Teoria, estymacja, zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.

THE GOLDEN RULES OF CAPITAL ACCUMULATION IN THE GRAVITY MODEL OF ECONOMIC GROWTH

Summary

The paper seeks to determine the so-called golden rules of capital accumulation in a model of economic growth known as the gravity model. This model combines Solow's neo-classical model of economic growth with what is defined as the gravity effect.

The authors consider two variants of the gravity model. The first variant seeks such a level of investment rates that would maximize the geometric average of consumption per employee in all economies, under the assumption of a long-term equilibrium. The second variant seeks such a level of investment rates that would maximize long-term consumption per employee in each economy.

The research shows that, in both variants, optimum investment rates depend on the elasticity of production with regard to capital and on the gravity effect, the authors say. In the second variant, the optimum investment rates additionally depend on the number of economies included in the model. If the number of economies subject to the gravity effect increases, investment rates decrease in each economy, the authors say.

In both variants, the gravity effect peters out and is eventually reduced to zero, but tends to have the same form as the original golden rules of capital accumulation posited by Edmund Phelps, the authors argue. They add that the golden rules of accumulation determined in the article are a generalization of Phelps' original golden rules of capital accumulation under the assumption of the existence of a gravity effect.

Keywords: gravity model, golden rules of capital accumulation, economic growth, gravity effect

JEL classification codes: C02, R11, E23, O47