Tomasz TOKARSKI*

Efekty skali a wzrost gospodarczy

Wprowadzenie[1]

Celem opracowania jest próba odpowiedzi na pytanie, na ile uchylenie neoklasycznego założenia o stałych efektach skali makroekonomicznej funkcji produkcji wpływa na długookresowe rozwiązanie modelu wzrostu gospodarczego [Mankiwa, Romera i Weila, 1992] będącego rozszerzeniem neoklasycznego modelu [Solowa, 1956]. Prowadzone analizy koncentrują się na wpływie efektów skali funkcji produkcji zarówno na długookresowe stopy wzrostu i ścieżki czasowe podstawowych zmiennych makroekonomicznych (takich, jak produkcja, kapitał rzeczowy i ludzki oraz konsumpcja na pracującego), jak i na złote reguły akumulacji kapitału [Phelpsa, 1961, 1966].

Stałe efekty skali utożsamiane są dalej z jednorodnością stopnia pierwszego makroekonomicznej funkcji produkcji. Wynika to stąd, iż jeśli funkcja produkcji jest jednorodna stopnia pierwszego względem nakładów czynników produkcji, to dowolne, ζ-krotne ($\zeta > 1$) zwiększenie nakładów każdego z tych czynników prowadzi do ζ-krotnego wzrostu strumienia wytworzonego produktu. Natomiast malejące (rosnące) efekty skali występują wówczas, gdy makroekonomiczna funkcja produkcji jest jednorodna stopnia mniejszego (większego) od jedności. Oznacza to, iż przy malejących (rosnących) efektach skali skutkiem dowolnego, ζ-krotnego ($\zeta > 1$) zwiększenia nakładów czynników produkcji jest mniej (więcej) niż ζ-krotny wzrost produktu.

Struktura opracowania przedstawia się następująco. W pierwszej części pracy scharakteryzowany jest oryginalny model Mankiwa, Romera, Weila. Druga część przedstawia rozszerzenie owego modelu przy jednorodności makroekonomicznej funkcji produkcji Cobba-Douglasa dowolnego stopnia $\Theta + \alpha + \beta > 0$. W następnej części wyznaczone są złote reguły akumulacji Phelpsa zarówno w warunkach stałych efektów skali, jak i przy malejących lub rosnących efektach skali. Pracę kończy podsumowanie prowadzonych w nim rozważań i ważniejsze wnioski.

---

* Autor jest pracownikiem Instytutu Ekonomii i Zarządzania Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie. Artykuł wpłynął do redakcji w sierpniu 2006 r.

[1] Opracowanie to stanowi fragment przygotowywanej przez autora książki pt. *Efekty skali a wzrost gospodarczy*.

Model wzrostu Mankiwa-Romera-Weila

W modelu wzrostu gospodarczego [Mankiwa, Romera, Weila, 1992] czyni się następujące założenia (por. też [Tokarski, 2005, s. 50-52]):

1. Strumień produktu Y opisany jest przez rozszerzoną funkcję produkcji C.W. Cobba-P.H. Douglasa daną wzorem[2]:

$$Y = K^{\alpha} H^{\beta} \tilde{L}^{1-\alpha-\beta} = K^{\alpha} H^{\beta} (AL)^{1-\alpha-\beta} \tag{1}$$

gdzie K jest zasobem kapitału rzeczowego, H to łączny zasób kapitału ludzkiego w skali całej gospodarki, zaś $\tilde{L} \equiv AL$ to tzw. jednostki efektywnej pracy. Parametry α, β, $1 - \alpha - \beta \in (0;1)$ można interpretować ekonomicznie na dwa sposoby. Parametry te są bowiem zarówno elastycznościami produktu Y względem (odpowiednio) nakładów kapitału rzeczowego K, ludzkiego H oraz jednostek efektywnej pracy $\tilde{L}$, jak i (na gruncie marginalnej teorii podziału J.B. Clarka) udziałami K, H oraz $\tilde{L}$ w produkcie Y.

2. Strumień produktu rozkłada się na konsumpcję $C = (1 - s)Y$ (gdzie $s \in (0;1)$) i oszczędności $S = sY$ (a zatem s jest stopą oszczędności w gospodarce Mankiwa-Romera-Weila). Oszczędności determinują inwestycje ($I = S$), te zaś rozkładają się na inwestycje w kapitał rzeczowy $I_K = s_K Y$ ($s_K \in (0;1)$) i ludzki $I_H = s_H Y$ ($s_H \in (0;1)$, przy czym $s = s_K + s_H$. Płynie stąd wniosek, iż s_K i s_H są stopami inwestycji w zasoby kapitału rzeczowego oraz ludzkiego i traktowane są jako zmienne egzogeniczne.

3. Przyrosty zasobów kapitału rzeczowego $(\dot{K})$ i ludzkiego $(\dot{H})$ stanowią różnice między inwestycjami w owe zasoby (I_K i I_H) a ich deprecjacją. Oznacza to, że:

$$\dot{K} = s_K Y - \delta_K K \tag{2a}$$

$$\dot{H} = s_H Y - \delta_H H \tag{2b}$$

gdzie $\delta_K, \delta_H \in (0;1)$ są stopami deprecjacji kapitału rzeczowego i ludzkiego. Stopę deprecjacji kapitału ludzkiego δ_H, analogicznie jak stopę deprecjacji wiedzy w modelu wzrostu [Shella, 1966] (por. też [Sato, 1966] lub [Tokarski, 1996]), można traktować jako odsetek kapitału ludzkiego, który ulega zużyciu wskutek odchodzenia z zasobu pracujących starszych, bardziej doświadczonych pracowników. Ponadto o stopach δ_K i δ_H zakłada się, iż mają charakter zmiennych egzogenicznych.

4. Liczba pracujących L rośnie według stopy $n > 0$, zaś zasób wiedzy A (który nie jest związany z akumulacją kapitału ludzkiego) wzrasta zgodnie ze stopą egzogenicznego postępu technicznego w sensie R.F. Harroda równą

---

[2] O wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych *implicite* zakłada się, iż są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \in [0; +\infty)$. Zapis $\dot{x} \equiv \dot{x}(t) \equiv dx/dt$ oznaczał będzie pochodną zmiennej x po czasie t, czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości zmiennej x w momencie t.

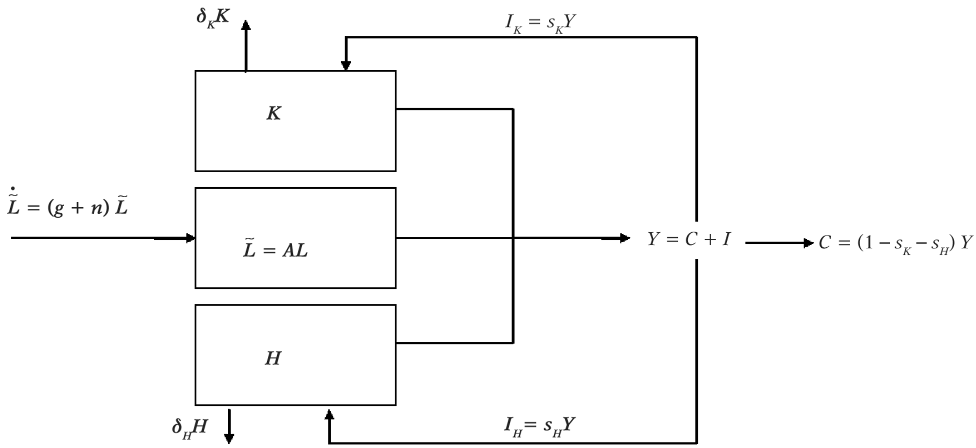
$g > 0$. Oznacza to, iż zasób efektywnej pracy $\tilde{L}$ rośnie według stopy $g + n$, co można zapisać równaniem:

$$\frac{\dot{\tilde{L}}}{\tilde{L}} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} = g + n \tag{3}$$

przy czym $A(0) = A_0 > 0$ i $L(0) = L_0 > 0$ (A_0 i L_0 to zasoby wiedzy i pracy w momencie $t = 0$).

Relacje zachodzące pomiędzy zasobami (zaznaczonymi prostokątami) i strumieniami (oznaczonymi strzałkami) w modelu Mankiwa, Romera, Weila zilustrowane są na rysunku 1.

Rysunek 1. Zależność pomiędzy zasobami i strumieniami w modelu wzrostu gospodarczego Mankiwa, Romera, Weila



Dzieląc stronami funkcję produkcji (1) przez jednostki efektywnej pracy $\tilde{L}$ uzyskuje się funkcję produktu na jednostkę owej pracy daną wzorem:

$$\tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}\tilde{h}^{\beta} \tag{4}$$

gdzie $\tilde{y} \equiv Y/\tilde{L}$ jest strumieniem produktu na jednostkę efektywnej pracy, zaś $\tilde{k} \equiv K/\tilde{L}$ i $\tilde{h} \equiv H/\tilde{L}$ to zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego przypadające na jednostkę efektywnej pracy. Z równania (4) płynie wniosek, iż w modelu Mankiwa, Romera, Weila produkt na jednostkę efektywnej pracy $\tilde{y}$ jest rosnącą funkcją zarówno kapitału rzeczowego na jednostkę efektywnej pracy $\tilde{k}$, jak i kapitału ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy $\tilde{h}$.

Dzieląc stronami równania (2ab) przez $\tilde{L}$ uzyskuje się następujące związki:

$$\frac{\dot{K}}{\tilde{L}} = s_K\tilde{y} - \delta_K\tilde{k} \tag{5a}$$

$$\frac{\dot{H}}{\tilde{L}} = s_H \tilde{y} - \delta_H \tilde{h} \tag{5b}$$

Ponieważ $K = \tilde{k}\tilde{L}$ i $H = \tilde{h}\tilde{L}$, zatem $\dot{K} = \dot{\tilde{k}}\tilde{L} + \tilde{k}\dot{\tilde{L}}$ oraz $\dot{H} = \dot{\tilde{h}}\tilde{L} + \tilde{h}\dot{\tilde{L}}$ a stąd i z równania (3) wynika, iż:

$$\frac{\dot{K}}{\tilde{L}} = \dot{\tilde{k}} + (g + n)\tilde{k} \tag{6a}$$

$$\frac{\dot{H}}{\tilde{L}} = \dot{\tilde{h}} + (g + n)\tilde{h} \tag{6b}$$

Równania (5ab) oraz (6ab) implikują następujący układ równań:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{k}} &= s_K \tilde{y} - (\delta_K + g + n)\tilde{k} \\ \dot{\tilde{h}} &= s_H \tilde{y} - (\delta_H + g + n)\tilde{h} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Układ równań (7) jest rozszerzeniem równania Solowa $\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (\delta + g + n)\tilde{k}$. Równania układu równań (7) można interpretować ekonomicznie w ten sposób, iż przyrost zasobu kapitału rzeczowego (ludzkiego) na jednostkę efektywnej pracy $\dot{\tilde{k}}(\dot{\tilde{h}})$ jest różnicą między inwestycjami w kapitał rzeczowy $s_K\tilde{y}$ (ludzki $s_H\tilde{y}$), które przypadają na jednostkę efektywnej pracy, a ubytkiem kapitału rzeczowego (ludzkiego) na jednostkę owej pracy wynikającym, po pierwsze, z jego deprecjacji $\delta_K\tilde{k}(\delta_H\tilde{h})$ oraz, po drugie, ze wzrostu jednostek efektywnej pracy $[g + n]\tilde{k}([g + n]\tilde{h})$.

Wstawiając funkcję (4) do układu równań (7) dochodzi się do układu równań ruchu modelu Mankiwa-Romera-Weila postaci:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{k}} &= s_K \tilde{k}^\alpha \tilde{h}^\beta - (\delta_K + g + n)\tilde{k} \\ \dot{\tilde{h}} &= s_H \tilde{k}^\alpha \tilde{h}^\beta - (\delta_H + g + n)\tilde{h} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Układ równań ruchu (8) opisuje zmiany (w czasie) zasobów $\tilde{k}$ i $\tilde{h}$ w rozważanej w tej części pracy gospodarce.

Układ równań (8) można „rozwiązać" za pomocą diagramu fazowego (por. np. [Romer, 1996, s. 129-131] lub [Tokarski, 2005, s. 52-57]). Z kolejnych równań ruchu wynika bowiem, że:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{k}} \geq 0 \Leftrightarrow \tilde{k} \leq \left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (\tilde{h})^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \\ \dot{\tilde{h}} \geq 0 \Leftrightarrow \tilde{h} \leq \left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} (\tilde{k})^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

oraz:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{k}} \leq 0 \Leftrightarrow \tilde{k} \geq \left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (\tilde{h})^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \\ \dot{\tilde{h}} \leq 0 \Leftrightarrow \tilde{h} \geq \left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} (\tilde{k})^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \end{aligned}\right\} \tag{9b}$$

co implikuje równania[3]:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{k}(\tilde{h})\big|_{\dot{\tilde{k}}=0} = \left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (\tilde{h})^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \\ \tilde{h}(\tilde{k})\big|_{\dot{\tilde{h}}=0} = \left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} (\tilde{k})^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Równania (10) wyznaczają krzywe podziału diagramu fazowego modelu Mankiwa-Romera-Weila. Krzywe te pokazują różne struktury zasobów $(\tilde{k},\tilde{h}) \in \Re^2_+$, którym towarzyszą zerowe przyrosty, odpowiednio, $\dot{\tilde{k}}$ i $\dot{\tilde{h}}$.

Licząc pierwsze i drugie pochodne funkcji (10) okazuje się, że:

$$\left.\frac{d\tilde{k}}{d\tilde{h}}\right|_{\dot{\tilde{k}}=0} = \frac{\beta}{1-\alpha}\left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (\tilde{h})^{\frac{-(1-\alpha-\beta)}{1-\alpha}} > 0$$

$$\left.\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{k}}\right|_{\dot{\tilde{h}}=0} = \frac{\alpha}{1-\beta}\left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} (\tilde{k})^{\frac{-(1-\alpha-\beta)}{1-\beta}} > 0$$

$$\left.\frac{d^2\tilde{k}}{d\tilde{h}^2}\right|_{\dot{\tilde{k}}=0} = -\frac{\beta(1-\alpha-\beta)}{(1-\alpha)^2}\left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (\tilde{h})^{\frac{-(1-\alpha-\beta)}{1-\alpha}} < 0$$

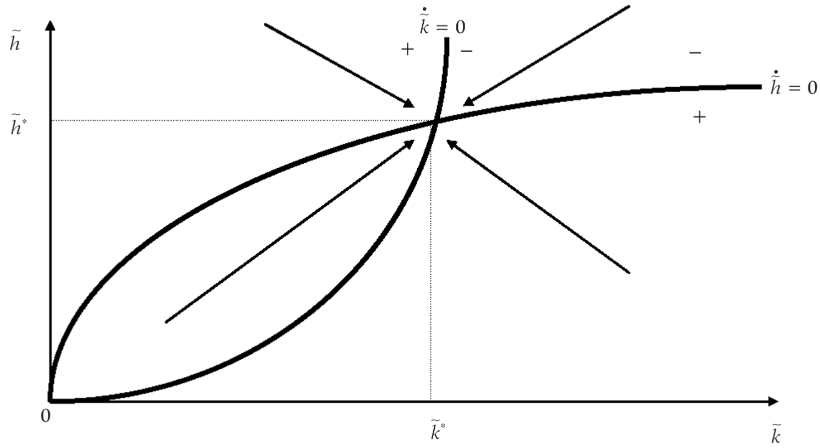
oraz:

$$\left.\frac{d^2\tilde{h}}{d\tilde{k}^2}\right|_{\dot{\tilde{h}}=0} = -\frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{(1-\beta)^2}\left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} (\tilde{k})^{\frac{-(1-\alpha-\alpha)}{1-\beta}} < 0$$

Płynie stąd wniosek, że krzywe podziału $\dot{\tilde{k}} = 0$ i $\dot{\tilde{h}} = 0$ są dodatnio nachylone i wklęsłe względem osi, odpowiednio, $\tilde{k}$ i $\tilde{h}$. Krzywe te zilustrowane są na rysunku 2 (krzywe bez strzałek na owym rysunku).

[3] Zapis postaci $a|_b$ oznaczał będzie dalej „a przy warunku, że zachodzi b”.

Rysunek 2. Diagram fazowy modelu wzrostu gospodarczego Mankiwa-Romera-Weila



Nierówności (9ab) implikują, że na lewo od krzywej podziału $\dot{\tilde{k}} = 0$ (poniżej krzywej podziału $\dot{\tilde{h}} = 0$) występują dodatnie przyrosty $\tilde{k}(\tilde{h})$, zaś na prawo od krzywej podziału $\dot{\tilde{k}} = 0$ (powyżej krzywej podziału $\dot{\tilde{h}} = 0$) przyrosty owych zasobów są ujemne (por. też rysunek 2).

Ponadto na rozważanym diagramie fazowym strzałkami zaznaczono trajektorie. Trajektorie te obrazują przesunięcia (w czasie) zasobów $\tilde{k}$ i $\tilde{h}$ z dowolnej wyjściowej struktury $\left(\tilde{k}_0, \tilde{h}_0\right) \in \Re^2_+$ owych zasobów.

Ponieważ wszystkie trajektorie w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych (poza osiami owego układu) na rysunku 2 zmierzają w kierunku punktu przecięcia krzywych podziału, zatem punkt ten jest punktem stabilnej długookresowej równowagi Mankiwa-Romera-Weila[4]. Płynie stąd wniosek, iż gospodarka Mankiwa-Romera-Weila (podobnie jak gospodarka Solowa) ma naturalne tendencje do dążenia do stabilnego punktu długookresowej równowagi. Punktem tym jest punkt $\left(\tilde{k}^*, \tilde{h}^*\right)$, który zostanie osiągnięty przez analizowaną tu gospodarkę najpóźniej przy $t \to +\infty$.

Punkt długookresowej równowagi Mankiwa-Romera-Weila $\left(\tilde{k}^*, \tilde{h}^*\right)$ jest rozwiązaniem układu równań ruchu (8) przy $\dot{\tilde{k}} = 0$ i $\dot{\tilde{h}} = 0$. Oznacza to, iż ów punkt jest rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\left.\begin{array}{l} s_K (\tilde{k}^*)^{\alpha} (\tilde{h}^*)^{\beta} - (\delta_K + g + n)\tilde{k}^* = 0 \\ s_H (\tilde{k}^*)^{\alpha} (\tilde{h}^*)^{\beta} - (\delta_H + g + n)\tilde{h}^* = 0 \end{array}\right\}$$

Powyższy układ równań można sprowadzić do układu liniowego, względem $\ln(\tilde{k})$ i $\ln(\tilde{h})$, oraz zapisać w postaci macierzowej następująco:

---

[4] Innym punktem długookresowej równowagi analizowanego modelu wzrostu gospodarczego jest punkt (0,0), lecz nie jest on interesujący z makroekonomicznego punktu widzenia (gdyż wyznacza stan gospodarki, w którym $K = H = Y = 0$) i będzie pomijany w dalszych rozważaniach.

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ -\alpha & 1-\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ln(\tilde{k}^*) \\ \ln(\tilde{h}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln\left(\dfrac{s_K}{\delta_K + g + n}\right) \\ \ln\left(\dfrac{s_H}{\delta_H + g + n}\right) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Układ równań (11) można rozwiązać stosując metodę wyznaczników Cramera. Wyznaczniki te dane są następującymi wzorami:

$$W = \begin{vmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ -\alpha & 1-\beta \end{vmatrix} = 1 - \alpha - \beta \in (0;1)$$

$$W_K = \begin{vmatrix} \ln\left(\dfrac{s_K}{\delta_K + g + n}\right) & -\beta \\ \ln\left(\dfrac{s_H}{\delta_H + g + n}\right) & 1-\beta \end{vmatrix} = (1-\beta)\ln\left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right) + \beta\ln\left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)$$

$$W_H = \begin{vmatrix} 1-\alpha & \ln\left(\dfrac{s_K}{\delta_K + g + n}\right) \\ -\alpha & \ln\left(\dfrac{s_H}{\delta_H + g + n}\right) \end{vmatrix} = (1-\alpha)\ln\left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right) + \alpha\ln\left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)$$

co implikuje zależności:

$$\ln(\tilde{k}^*) = \frac{W_K}{W} = \frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)$$

$$\ln(\tilde{h}^*) = \frac{W_H}{W} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right) + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)$$

z których wynikają związki:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \tag{12a}$$

$$\tilde{h}^* = \left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \tag{12b}$$

Wstawiając zaś $\tilde{k}^*$ i $\tilde{h}^*$ do równania (4) uzyskuje się produkt na jednostkę efektywnej pracy w długookresowej równowadze Mankiwa-Romera-Weila $\tilde{y}^*$ dany wzorem:

$$\tilde{y}^* = \left(\frac{s_K}{\delta_K + g + n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_H}{\delta_H + g + n}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \tag{12c}$$

Równania (12abc) można interpretować ekonomicznie następująco:

- Im wyższe są stopy inwestycji w zasoby kapitału rzeczowego s_K i ludzkiego s_H, tym wyższe są zarówno zasoby kapitału rzeczowego $\tilde{k}^*$ i ludzkiego $\tilde{h}^*$, jak i strumień produktu $\tilde{y}^*$ przypadające na jednostkę efektywnej pracy w długookresowej równowadze rozważanego modelu wzrostu gospodarczego.
- Wysokie stopy deprecjacji δ_K i δ_H lub wysoka stopa wzrostu jednostek efektywnej pracy $g + n$ prowadzi do niskich wartości $\tilde{k}^*$, $\tilde{h}^*$ oraz $\tilde{y}^*$.
- W warunkach długookresowej równowagi gospodarki Mankiwa-Romera-Weila zasoby $\tilde{k}^*$ i $\tilde{h}^*$ oraz strumień $\tilde{y}^*$ nie ulegają zmianom w czasie, gdyż różniczkując równania (12abc) po czasie $t \in [0; +\infty)$ uzyskuje się: $\dot{\tilde{k}} = \dot{\tilde{h}}^* = \dot{\tilde{y}}^* = 0$.

Stąd, że techniczne uzbrojenie pracy $k \equiv K/L$, kapitał ludzki na pracującego $h \equiv H/L$ oraz wydajność pracy $y \equiv Y/L$ można również zapisać jako $k \equiv A\tilde{k}$, $h \equiv A\tilde{h}$ i $y \equiv A\tilde{y}$, zaś (zgodnie z założeniem 4 modelu Mankiwa-Romera-Weila) $\dot{A}/A = g$ wynika, iż:

$$\frac{\dot{k}}{k} = g + \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} \tag{13a}$$

$$\frac{\dot{h}}{h} = g + \frac{\dot{\tilde{h}}}{\tilde{h}} \tag{13b}$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = g + \frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} \tag{13c}$$

Co więcej, logarytmując stronami i różniczkując po czasie $t \in [0; +\infty)$ związek (4) uzyskuje się następującą zależność: $\frac{\dot{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \alpha\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} + \beta\frac{\dot{\tilde{h}}}{\tilde{h}}$. Stąd zaś oraz z równania (13c) wynika równanie stopy wzrostu wydajności pracy postaci:

$$\frac{\dot{y}}{y} = g + \alpha\frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} + \beta\frac{\dot{\tilde{h}}}{\tilde{h}} \tag{13d}$$

Z zależności (13abcd) oraz z diagramu fazowego przedstawionego na rysunku 2 płyną następujące wnioski:

- Jeśli gospodarka Mankiwa-Romera-Weila porusza się w kierunku punktu długookresowej równowagi po trajektoriach skierowanych na północny wschód, to $\dot{\tilde{k}}, \dot{\tilde{h}} > 0$ i stopy wzrostu technicznego uzbrojenia pracy $(\dot{k}/k)$, kapitału ludzkiego na pracującego $(\dot{h}/h)$ oraz wydajności pracy $(\dot{y}/y)$ są wyższe od stopy harrodiańskiego postępu technicznego (g).
- W sytuacji, w której gospodarką ta znajduje się na trajektoriach skierowanych na południowy zachód $\dot{\tilde{k}}, \dot{\tilde{h}} < 0$, co implikuje, że $\dot{k}/k, \dot{h}/h, \dot{y}/y < g$.

- Jeśli rozważana gospodarka zmierza do punktu równowagi po trajektorii skierowanej na południowy wschód (północny zachód), to stopa wzrostu technicznego uzbrojenia pracy $\dot{k}/k$ jest wyższa (niższa) od stopy postępu technicznego w sensie Harroda, natomiast stopa wzrostu kapitału ludzkiego na pracującego $\dot{h}/h$ jest odeń niższa (wyższa). To z kolei, zgodnie z zależnością (3d), implikuje, że w analizowanym tu przypadku stopa wzrostu produktu na pracującego $\dot{y}/y$ może być zarówno wyższa, jak i niższa od stopy g.
- Począwszy zaś od momentu (skończonego lub nie), w którym gospodarka Mankiwa-Romera-Weila osiągnie długookresową równowagę $\dot{\tilde{k}}, \dot{\tilde{h}} = 0$, co implikuje równanie:

$$\frac{\dot{k}^*}{k^*} = \frac{\dot{h}^*}{h^*} = \frac{\dot{y}^*}{y^*} = g \tag{14}$$

  gdzie k^* to techniczne uzbrojenie pracy w równowadze Mankiwa-Romera-Weila, h^* jest kapitałem ludzkim na pracującego w warunkach owej równowagi, zaś y^* to wydajność pracy w długookresowej równowadze. Równanie (14) należy interpretować ekonomicznie w ten sposób, iż w długookresowej równowadze analizowanej w tym punkcie gospodarki wydajność pracy, techniczne uzbrojenie pracy oraz kapitał ludzki na pracującego (analogicznie jak wydajność pracy i techniczne uzbrojenie pracy w równowadze Solowa) rosną według stopy wzrostu równej stopie harrodiańskiego postępu technicznego.
- Co więcej, ponieważ (zgodnie z równaniami (12abc)), im wyższe wartości przyjmują s_K i s_H lub im niższe są δ_K, δ_H oraz $g + n$, tym wyższe są $\tilde{k}^*$, $\tilde{h}^*$ i $\tilde{y}^*$, zatem wysokim wartościom stóp inwestycji s_K i s_H lub niskim wartościom stóp deprecjacji kapitału δ_K i δ_H oraz stopy wzrostu jednostek efektywnej pracy $g + n$ odpowiadają wysoko położone długookresowe ścieżki czasowe wydajności pracy $y^*(t)$, technicznego uzbrojenia pracy $k^*(t)$ i kapitału ludzkiego na pracującego $h^*(t)$.

Równowaga Mankiwa-Romera-Weila w warunkach efektów skali[5]

Modyfikacją modelu wzrostu Mankiwa-Romera-Weila jest model przedstawiony w pracy [Tokarskiego, 2003][6]. W modelu tym czyni się następujące założenia:

1. Proces produkcyjny opisany jest przez funkcję produkcji Cobba-Douglasa jednorodną (względem K, H i $\tilde{L}$) stopnia $\Theta + \alpha + \beta > 0$ postaci:

$$Y = K^{\alpha} H^{\beta} \tilde{L}^{\Theta} \tag{15}$$

   przy czym $\alpha, \beta, \Theta \in (0;1)$. Parametry α, β i Θ w funkcji produkcji (15) są elastycznościami wytworzonego strumienia produktu Y względem nakładów

---

[5] Punkt ten oparty jest na rozważaniach prowadzonych pracach [Tokarskiego, 2003 i 2005, rozdział siódmy].

[6] Innym rozszerzeniem modelu Mankiwa-Romera-Weila jest model n-kapitałowego wzrostu gospodarczego zaproponowany przez [Nonnemana, Vanhoudta, 1996].

kapitału rzeczowego K, ludzkiego H oraz jednostek efektywnej pracy $\tilde{L}$ i, przy jednorodności funkcji produkcji (15) różnej od jedności, nie powinno się ich utożsamiać z udziałami owych czynników w produkcie. Co więcej, jeśli $\Theta + \alpha + \beta < 1$ ($\Theta + \alpha + \beta > 1$), to funkcja produkcji (15) jest jednorodna stopnia mniejszego (większego) od jedności i występują malejące (rosnące) efekty skali owej funkcji. Jeśli zaś $\Theta + \alpha + \beta =1$, to występują stałe efekty skali i rozważany model wzrostu gospodarczego odpowiada modelowi analizowanemu w punkcie 2. Ponadto zakłada się, iż $\alpha + \beta \in (0;1)$.

2. Przyrosty zasobów kapitału rzeczowego K i ludzkiego H opisane są przez równania różniczkowe (2ab).
3. Jednostki efektywnej pracy $\tilde{L}$ rosną według stopy $g + n > 0$, co implikuje, iż spełniony jest związek (3).

Wstawiając zależność (15) do równań (2ab) uzyskuje się następujący układ równań różniczkowych:

$$\left.\begin{aligned} \dot{K} &= s_K K^\alpha H^\beta \tilde{L}^\Theta - \delta_K K \\ \dot{H} &= s_H K^\alpha H^\beta \tilde{L}^\Theta - \delta_H H \end{aligned}\right\}$$

Dzieląc stronami kolejne równania powyższego układu równań różniczkowych przez, odpowiednio, K i H można je zapisać w kategoriach stóp wzrostu zasobu kapitału rzeczowego $G_K \equiv \dot{K}/K$ i ludzkiego $G_H \equiv \dot{H}/H$ następująco:

$$\left.\begin{aligned} G_K + \delta_K &= s_K K^{\alpha-1} H^\beta \tilde{L}^\Theta \\ G_H + \delta_H &= s_H K^\alpha H^{\beta-1} L^\Theta \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ponieważ na mocy przyjętych uprzednio założeń $s_K K^{\alpha-1} H^\beta \tilde{L}^\Theta > 0$ oraz $s_H K^\alpha H^{\beta-1} \tilde{L}^\Theta > 0$, zatem dla dowolnego $t \in [0; +\infty)$ zarówno $G_K(t) > -\delta_K$, jak i $G_H(t) > -\delta_H$. Oznacza to, że powyższe równania można zlogarytmować stronami (logarytmem naturalnym) i zróżniczkować po czasie $t \in [0; +\infty)$. Wówczas uzyskuje się następujące związki:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{G}_K}{G_K + \delta_K} &= -(1-\alpha)G_K + \beta G_H + \Theta\frac{\dot{\tilde{L}}}{\tilde{L}} \\ \frac{\dot{G}_H}{G_H + \delta_H} &= \alpha G_K - (1-\beta)G_H + \Theta\frac{\dot{\tilde{L}}}{\tilde{L}} \end{aligned}\right\}$$

Podstawiając zaś w powyższych zależnościach stopę wzrostu jednostek efektywnej pracy $\dot{\tilde{L}}/\tilde{L} = g + n$ uzyskuje się układ równań ruchu rozważanego tu modelu wzrostu gospodarczego postaci:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot{G}_K}{G_K+\delta_K}&=\Theta(g+n)-(1-\alpha)G_K+\beta G_H\\ \frac{\dot{G}_H}{G_H+\delta_H}&=\Theta(g+n)+\alpha G_K-(1-\beta)G_H\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Z układu równań ruchu (17) i przyjętych wcześniej założeń wynikają m.in. następujące zależności:

$$\left.\begin{aligned}\dot{G}_K\geq 0\Leftrightarrow G_K&\leq\frac{\Theta(g+n)}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\alpha}G_H\\ \dot{G}_H\geq 0\Leftrightarrow G_H&\leq\frac{\Theta(g+n)}{1-\beta}+\frac{\alpha}{1-\beta}G_K\end{aligned}\right\}\tag{18a}$$

natomiast:

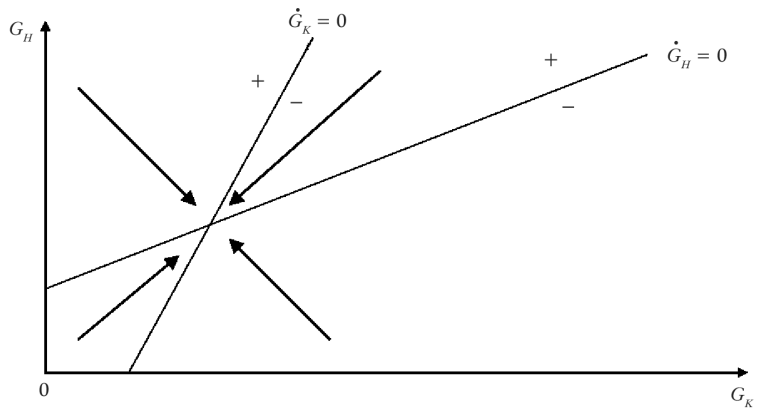
$$\left.\begin{aligned}\dot{G}_K\leq 0\Leftrightarrow G_K&\geq\frac{\Theta(g+n)}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\alpha}G_H\\ \dot{G}_H\leq 0\Leftrightarrow G_H&\geq\frac{\Theta(g+n)}{1-\beta}+\frac{\alpha}{1-\beta}G_K\end{aligned}\right\}\tag{18b}$$

Stąd zaś płynie wniosek, że krzywe podziału układu równań różniczkowych (17) dane są wzorami:

$$\left.\begin{aligned}G_K(G_H)\big|_{\dot{G}_K=0}&=\frac{\Theta(g+n)}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\alpha}G_H\\ G_H(G_K)\big|_{\dot{G}_H=0}&=\frac{\Theta(g+n)}{1-\beta}+\frac{\alpha}{1-\beta}G_K\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

Z zależności (18ab) i (19) wynika, że diagram fazowy układu równań różniczkowych (17) przedstawia się tak, jak ma to miejsce na rysunku 3.

Rysunek 3. Diagram fazowy układu równań różniczkowych (17)



Z diagramu fazowego na rysunku 3 wynika, iż układ równań ruchu (17) posiada stabilne rozwiązanie ze względu na stopy wzrostu kapitału rzeczowego G_K^* i ludzkiego G_H^* w długookresowej równowadze analizowanej tu gospodarki. Stopy te są rozwiązaniem układu równań (17) przy $\dot{G}_K = \dot{G}_H = 0$. A zatem długookresowe stopy wzrostu G_K^* i G_H^* są rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ -\alpha & 1-\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_K^* \\ G_H^* \end{bmatrix} = \Theta(g+n) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Kolejne wyznaczniki Cramera układu równań (20) dane są wzorami:

$$W = \begin{vmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ -\alpha & 1-\beta \end{vmatrix} = 1-\alpha-\beta \in (0;1)$$

$$W_K = \Theta(g+n) \begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & 1-\beta \end{vmatrix} = \Theta(g+n) > 0$$

$$W_H = \Theta(g+n) \begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 \\ -\alpha & 1 \end{vmatrix} = \Theta(g+n) > 0$$

co implikuje, że długookresowe stopy wzrostu zasobów kapitału rzeczowego i ludzkiego opisane są przez równania:

$$G_K^* = \frac{W_K}{W} = \frac{\Theta(g+n)}{1-\alpha-\beta} \tag{21a}$$

$$G_H^* = \frac{W_H}{W} = \frac{\Theta(g+n)}{1-\alpha-\beta} \tag{21b}$$

Logarytmując stronami i różniczkując po czasie $t \in [0; +\infty)$ funkcję produkcji (15) oraz uwzględniając równanie (3) uzyskuje się związek:

$$G_Y = \alpha G_K + \beta G_H + \Theta\,(g+n)$$

gdzie $G_Y \equiv \dot{Y}/Y$ jest stopą wzrostu strumienia produktu. Oznaczając przez G_Y^* długookresową stopę wzrostu strumienia produktu oraz korzystając z powyższej zależności i równań (21ab) dochodzi się do relacji:

$$G_Y^* = \alpha G_K^* + \beta G_H^* + \Theta(g+n) = \frac{\Theta(g+n)}{1-\alpha-\beta} \tag{21c}$$

Z równań (21abc) płyną następujące wnioski:

- Długookresowe stopy wzrostu zasobów kapitału rzeczowego i ludzkiego oraz strumienia produktu są sobie równe.
- Stopy te są również tym wyższe, im wyższa jest stopa harrodiańskiego postępu technicznego, stopa wzrostu liczby pracujących oraz elastyczno-

ści funkcji produkcji (15) α, β i Θ. Implikuje to, iż im wyższy jest stopień jednorodności funkcji produkcji Cobba-Douglasa (a więc $\alpha + \beta + \Theta$), tym wyższe są stopy wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych w analizowanym modelu wzrostu gospodarczego.

- Jeśli w gospodarce występują malejące (rosnące) efekty skali funkcji produkcji (15), czyli wówczas gdy $\alpha + \beta + \Theta < 1$ $(\alpha + \beta + \Theta > 1)$, to $G_K^* = G_H^* = G_Y^* = \frac{\Theta(g+n)}{1-\alpha-\beta} < g + n$ $\left(G_K^* = G_H^* = G_Y^* = \frac{\Theta(g+n)}{1-\alpha-\beta} > g + n\right)$. Natomiast w warunkach stałych efektów skali $G_K^* = G_H^* = G_Y^* = g + n$. Wynika stąd, iż przy malejących (rosnących) efektach skali długookresowe stopy wzrostu trzech rozważanych tu zmiennych makroekonomicznych są niższe (wyższe) od sumy stopy postępu technicznego w sensie Harroda i stopy wzrostu liczby pracujących, zaś przy stałych efektach skali stopy wzrostu kapitału rzeczowego, ludzkiego oraz produktu równe są sumie stopy postępu technicznego i stopy wzrostu liczby pracujących.

Ponieważ wydajność pracy y, techniczne uzbrojenie pracy k oraz kapitał ludzki na pracującego h można zapisać, odpowiednio, jako $y \equiv Y/L$, $k \equiv K/L$ oraz $h \equiv H/L$, zaś $\dot{L}/L = n$, więc stopy wzrostu wydajności pracy $g_y \equiv \dot{y}/y$, technicznego uzbrojenia pracy $g_k \equiv \dot{k}/k$ i kapitału ludzkiego na pracującego $g_h \equiv \dot{h}/h$ dane są wzorami:

$$g_y = G_Y - n$$
$$g_k = G_K - n$$
$$g_h = G_H - n$$

Jeśli zaś przez g_y^*, g_k^* oraz g_h^* oznaczy się długookresowe stopy wzrostu rozważanych tu zmiennych makroekonomicznych i skorzysta z zależności (21abc), to okaże się, iż:

$$g_y^* = g_k^* = g_h^* = \frac{\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n}{1 - \alpha - \beta} \tag{22}$$

Z równania (22) wyciągnąć można następujące wnioski:

- Jeśli w gospodarce występują stałe efekty skali $(\Theta + \alpha + \beta = 1)$, to długookresowe stopy wzrostu wydajności pracy, technicznego uzbrojenia pracy i kapitału ludzkiego na pracującego równe są stopie harrodiańskiego postępu technicznego.
- W warunkach malejących (rosnących) efektów skali analizowane stopy wzrostu są niższe (wyższe) od stopy postępu technicznego w sensie Harroda. Wynika to stąd, iż przy $\Theta + \alpha + \beta < 1$ $(\Theta + \alpha + \beta > 1)$ $g_y^* = g_k^* = g_h^* = \frac{\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n}{1-\alpha-\beta} < g$ $\left(g_y^* = g_k^* = g_h^* = \frac{\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n}{1-\alpha-\beta} > g\right)$.
- Co więcej zarówno w warunkach malejących, jak i rosnących efektów skali długookresowe stopy wzrostu wydajności pracy, technicznego uzbrojenia

pracy i kapitału ludzkiego na pracującego są tym wyższe, im wyższa jest stopa harrodiańskiego postępu technicznego g oraz im wyższe są elastyczności funkcji produkcji α, β i Θ. Nieco inaczej rzecz się ma z wpływem stopy wzrostu liczby pracujących n na stopy wzrostu g_y^*, g_k^* i g_h^*. Z równania (22) wynika bowiem, iż w warunkach malejących (rosnących) efektów skali długookresowe stopy wzrostu wydajności pracy, technicznego uzbrojenia pracy i kapitału ludzkiego na pracującego są tym niższe (wyższe), im wyższa jest stopa wzrostu liczby pracujących.

Złote reguły akumulacji

W modelu wzrostu gospodarczego typu Solowa złotą regułę akumulacji kapitału Phelpsa utożsamia z taką stopą oszczędności/inwestycji, która wyprowadza gospodarkę na najwyżej położoną długookresową ścieżkę konsumpcji na pracującego (por. np. [Liberda, 1996] lub [Tokarski, 2005, rozdział pierwszy]). Natomiast rozważając równowagę typu Mankiwa-Romera-Weila złotą regułę akumulacji Phelpsa można zdefiniować jako taką strukturę stóp inwestycji (s_K, s_H) (s_K, s_H oraz $s_K + s_H \in (0;1)$), dzięki której analizowana gospodarka może wyjść na najwyżej położoną ścieżkę konsumpcji na pracującego w warunkach długookresowej równowagi (por. też [Tokarski, 2005, punkt 5.2]).

Celem wyznaczenia złotych reguł akumulacji kapitału wygodnie jest wprowadzić zmienne sztuczne $\hat{y}$, $\hat{k}$, $\hat{h}$ i $\hat{c}$ dane następującymi wzorami[7]:

$$\hat{k}(t) = \frac{k(t)}{\left(e^{[\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n]t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}} \tag{23a}$$

$$\hat{h}(t) = \frac{h(t)}{\left(e^{[\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n]t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}} \tag{23b}$$

$$\hat{y}(t) = \frac{y(t)}{\left(e^{[\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n]t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}} \tag{23c}$$

$$\hat{c}(t) = \frac{c(t)}{\left(e^{[\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n]t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}} \tag{23d}$$

[7] Przez zmienne sztuczne rozumiane będą dalej pewne zmienne pomocnicze, które nie mają interpretacji ekonomicznej. Zmienne opisane równaniami (23abcd) mają, zdaniem autora, interpretację ekonomiczną jedynie przy jednorodności stopnia pierwsze funkcji produkcji Cobba-Douglasa, gdyż wówczas $\hat{k}(t) \equiv \frac{k(t)}{A_0 e^{gt}} \equiv \frac{K(t)}{\tilde{L}(t)}$, $\hat{h}(t) \equiv \frac{h(t)}{A_0 e^{gt}} \equiv \frac{H(t)}{\tilde{L}(t)}$, $\hat{y}(t) \equiv \frac{y(t)}{A_0 e^{gt}} \equiv \frac{Y(t)}{\tilde{L}(t)}$ i $\hat{c}(t) \equiv \frac{c(t)}{A_0 e^{gt}} \equiv \frac{C(t)}{\tilde{L}(t)}$ wyznaczają (odpowiednio) kapitał rzeczowy, kapitał ludzki, produkt i konsumpcję przypadające na jednostkę efektywnej pracy.

Ponieważ w warunkach długookresowej równowagi zmienne k, h, y i c (jak się niebawem okaże równa $(1 - s_K - s_H)\,y$) rosną według stopy wzrostu równej $\dfrac{\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n}{1 - \alpha - \beta}$, zatem wówczas zmienne sztuczne $\hat{y}$, $\hat{k}$, $\hat{h}$ i $\hat{c}$ dążyć będą do pewnych ustalonych wartości $\hat{y}^*, \hat{k}^*, \hat{h}^*$ i $\hat{c}^*$[8]. Oznacza to, iż im wyższe wartości przyjmować będą $\hat{y}^*, \hat{k}^*, \hat{h}^*$ i $\hat{c}^*$, tym wyżej położone będą długookresowe ścieżki czasowe wydajności pracy, technicznego uzbrojenia pracy, kapitału ludzkiego na pracującego i konsumpcji na pracującego.

Z równań (3) i (15) dochodzi się do zależności:

$$Y(t) = \left(A_0 L_0\right)^{\Theta} [K(t)]^{\alpha} [H(t)]^{\beta} e^{\Theta(g+n)t}$$

Wstawiając powyższy związek do równań (2ab) uzyskuje się układ równań różniczkowych postaci:

$$\left.\begin{aligned} \dot{K}(t) &= s_K \left(A_0 L_0\right)^{\Theta} [K(t)]^{\alpha} [H(t)]^{\beta} e^{\Theta(g+n)t} - \delta_K K(t) \\ \dot{H}(t) &= s_H \left(A_0 L_0\right)^{\Theta} [K(t)]^{\alpha} [H(t)]^{\beta} e^{\Theta(g+n)t} - \delta_H H(t) \end{aligned}\right\}$$

lub po podzieleniu każdego z powyższych równań przez $L(t) = L_0 e^{nt}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot{K}}{L} &= s_K \hat{A} k^{\alpha} h^{\beta} e^{[\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n]t} - \delta_K k \\ \frac{\dot{H}}{L} &= s_H \hat{A} k^{\alpha} h^{\beta} e^{[\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n]t} - \delta_H h \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

gdzie $\hat{A} = A_0^{\Theta} L_0^{\Theta + \alpha + \beta - 1} > 0$. Ponieważ $K \equiv kL$ i $H \equiv hL$, zatem $\dfrac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + \dfrac{\dot{L}}{L}k$ i $\dfrac{\dot{H}}{L} = \dot{h} + \dfrac{\dot{L}}{L}h$ lub (po uwzględnieniu założenia, że liczba pracujących rośnie według stopy wzrostu n) $\dfrac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + nk$ i $\dfrac{\dot{H}}{L} = \dot{h} + nh$. Stąd zaś wynika, że układ równań (24) można zapisać następująco:

$$\left.\begin{aligned} \dot{k} &= s_K \hat{A} k^{\alpha} h^{\beta} e^{[\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n]t} - \left(\delta_K + n\right)k \\ \dot{h} &= s_H \hat{A} k^{\alpha} h^{\beta} e^{[\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n]t} - \left(\delta_H + n\right)h \end{aligned}\right\}$$

lub w kategoriach stóp wzrostu $g_k \equiv \dot{k}/k$ oraz $g_h \equiv \dot{h}/h$:

$$\left.\begin{aligned} g_k &= s_K \hat{A} k^{\alpha - 1} h^{\beta} e^{[\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n]t} - \left(\delta_K + n\right) \\ g_h &= s_H \hat{A} k^{\alpha} h^{\beta - 1} e^{[\Theta g + (\Theta + \alpha + \beta - 1)n]t} - \left(\delta_H + n\right) \end{aligned}\right\}$$

---

[8] Wartości $\hat{y}^*, \hat{k}^*, \hat{h}^*$ i $\hat{c}^*$ zależą jednak od stóp inwestycji s_K i s_H.

P o n i e w a ż $k^{\alpha-1}h^{\beta}e^{[\Theta g+(\Theta+\alpha+\beta-1)n]t}=\hat{k}^{\alpha-1}\hat{h}^{\beta}$ o r a z $k^{\alpha}h^{\beta-1}e^{[\Theta g+(\Theta+\alpha+\beta-1)n]t}=\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\beta-1}$, zatem powyższy układ równań można zapisać za pomocą zależności:

$$\left.\begin{aligned} g_k &= s_K\hat{A}\hat{k}^{\alpha-1}\hat{h}^{\beta}-(\delta_K+n) \\ g_h &= s_H\hat{A}\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\beta-1}-(\delta_H+n) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

W długim okresie, przy $\hat{k}\to\hat{k}^*$ i $\hat{h}\to\hat{h}^*$, stopy wzrostu g_k i g_h dążą do $\frac{\Theta g+(\Theta+\alpha+\beta-1)n}{1-\alpha-\beta}$. Oznacza to, że wówczas układ równań (25) można zapisać następująco:

$$\left.\begin{aligned} (\hat{k}^*)^{1-\alpha}(\hat{h}^*)^{-\beta} &= \frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K} \\ (\hat{k}^*)^{-\alpha}(\hat{h}^*)^{1-\beta} &= \frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H} \end{aligned}\right\}$$

lub w postaci macierzowej względem $\ln(\hat{k}^*)$ oraz $\ln(\hat{h}^*)$:

$$\begin{bmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ -\alpha & 1-\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ln(\hat{k}^*) \\ \ln(\hat{h}^*) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \ln\left(\dfrac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right) \\ \ln\left(\dfrac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right) \end{bmatrix} \tag{26}$$

Wyznaczniki Cramera układu równań (26) dane są wzorami:

$$W=\begin{vmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ -\alpha & 1-\beta \end{vmatrix}=1-\alpha-\beta\in(0;1)$$

$$W_K=\begin{vmatrix} \ln\left(\dfrac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right) & -\beta \\ \ln\left(\dfrac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right) & 1-\beta \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\beta)\ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)+\beta\ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)$$

$$W_H=\begin{vmatrix} 1-\alpha & \ln\left(\dfrac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right) \\ -\alpha & \ln\left(\dfrac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right) \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\alpha)\ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)+\alpha\ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)$$

Wyznacznik W, W_K i W_H implikują, iż zmienne sztuczne $\hat{k}^*$ i $\hat{h}^*$ spełniają zależności:

$$\ln(\hat{k}^*) = \frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)+$$
$$+\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)$$
$$\ln(\hat{h}^*) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)+$$
$$+\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)$$

z których wynikają następujące związki:

$$\hat{k}^* = \left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \tag{27a}$$

$$\hat{h}^* = \left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \tag{27b}$$

Dzieląc stronami funkcję produkcji (15) przez liczbę pracujących $L(t) = L_0e^{nt}$ uzyskuje się relację:

$$y(t) = \hat{A}[k(t)]^{\alpha}[h(t)]^{\beta}e^{[\Theta g+(\Theta+\alpha+\beta-1)n]t}$$

a stąd i równań (23abc):

$$\hat{y} = \hat{A}\hat{k}^{\alpha}\hat{h}^{\beta}$$

Wynika stąd, że w warunkach długookresowej równowagi analizowanego w tym punkcie modelu wzrostu gospodarczego spełniony jest związek:

$$\hat{y}^* = \hat{A}(\hat{k}^*)^{\alpha}(\hat{h}^*)^{\beta}$$

bądź po uwzględnieniu równań (27ab):

$$\hat{y}^* = \hat{A}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \tag{28}$$

Z równań (27ab) oraz (28) wyciągnąć można m.in. wniosek, iż im wyższe są stopy inwestycji w zasoby kapitału rzeczowego s_K i ludzkiego s_H, tym wyżej położone są długookresowe ścieżki czasowe technicznego uzbrojenia pracy, kapitału ludzkiego na pracującego i wydajności pracy.

Z założenia 2 modelu wzrostu gospodarczego Mankiwa-Romera-Weila wynika, iż konsumpcja C dana jest wzorem $C = (1 - s_K - s_H)Y$. Stąd zaś płynie wniosek, że $c = (1 - s_K - s_H)y$, natomiast $\hat{c}^* = (1 - s_K - s_H)\hat{y}^*$, czyli po uwzględnieniu związków (23cd) i (28):

$$\hat{c}^* = (1 - s_K - s_H)\hat{A}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \tag{29}$$

Wyznaczenie złotych reguł akumulacji w rozważanym tu modelu wzrostu gospodarczego sprowadza się do maksymalizacji wyrażenia (29) względem stóp inwestycji s_K i s_H, przy czym s_K, s_H oraz $s_K + s_H \in (0;1)$. Innymi słowy złotą regułą akumulacji kapitału jest taka struktura stóp inwestycji, leżąca wewnątrz trójkąta B o wierzchołkach (0;0), (0;1), (1;0), która maksymalizuje $\hat{c}^*$ dane równaniem (29).

Na krawędziach owego trójkąta $\hat{c}^*$ jest zbieżne do zera, gdyż:

$$\lim_{s_K \to 0^+} \hat{c}^* = \lim_{s_K \to 0^+}\left[(1 - s_K - s_H)\hat{A}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}\right] = 0$$

$$\lim_{s_H \to 0^+} \hat{c}^* = \lim_{s_H \to 0^+}\left[(1 - s_K - s_H)\hat{A}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}\right] = 0$$

$$\lim_{(s_K+s_H) \to 1^-} \hat{c}^* = \lim_{(s_K+s_H) \to 1^-}\left[(1 - s_K - s_H)\hat{A}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}\right] = 0$$

Z wartości powyższych granic wynika, iż jeśli przynajmniej jedna z analizowanych stóp inwestycji jest zbieżna do zera lub ich suma jest zbieżna do jedności (co implikuje, że udział konsumpcji w produkcji $(1 - s_K - s_H)$ jest zbieżny do zera), to zarówno zmienna sztuczna $\hat{c}^*$, jak i długookresowa konsumpcja na pracującego c^* dążą do zera. Oznacza to również, że jeśli istnieje dodatnie maksimum $\hat{c}^*$ w trójkącie B, to musi ono istnieć wewnątrz tegoż trójkąta.

Ponieważ logarytm naturalny jest ściśle rosnącą funkcją swojego argumentu zaś $\hat{c}^* > 0$ dla każdego (s_K, s_H) leżącego wewnątrz trójkąta B, zatem problem maksymalizacji wyrażenia (29) tożsamy jest z maksymalizacją funkcji $V(s_K, s_H) = \ln(\hat{c}^*)$ danej wzorem:

$$\begin{aligned} V(s_K,s_H) = {} & \ln(1 - s_K - s_H) + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_K\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_K}\right) + \\ & + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln\left(\frac{(1-\alpha-\beta)s_H\hat{A}}{\Theta(g+n)+(1-\alpha-\beta)\delta_H}\right) + \ln(\hat{A}) \end{aligned} \tag{30}$$

Warunki konieczne maksymalizacji funkcji (29-30) przedstawiają się następująco:

$$\frac{\partial V}{\partial s_K} = \frac{-1}{1 - s_K - s_H} + \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)s_K} = 0 \tag{31a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s_H} = \frac{-1}{1 - s_K - s_H} + \frac{\beta}{(1-\alpha-\beta)s_H} = 0 \tag{31b}$$

zaś warunki dostateczne sprowadzają się do tego, iż w punktach stacjonarnych funkcji V (tj. w punktach, w których $\partial V/\partial s_K = \partial V/\partial s_H = 0$) muszą być spełnione nierówności:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s_K^2} = -\frac{1}{(1 - s_K - s_H)^2} - \frac{\alpha}{(1-\alpha-\beta)s_K^2} < 0 \tag{32a}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s_H^2} = -\frac{1}{(1 - s_K - s_H)^2} - \frac{\beta}{(1-\alpha-\beta)s_H^2} < 0 \tag{32b}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s_K^2}\frac{\partial^2 V}{\partial s_H^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_K \partial s_H}\right)^2 = \frac{1}{(1 - s_K - s_H)^2(1-\alpha-\beta)}\left(\frac{\alpha}{s_K^2} + \frac{\beta}{s_H^2}\right) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha-\beta)^2 s_K^2 s_H^2} > 0 \tag{32c}$$

Ponieważ warunki dostateczne maksymalizacji funkcji V dane nierównościami (32abc) spełnione są w każdym punkcie leżącym wewnątrz trójkąta B, zatem punkt stacjonarny rozwiązujący układ równań złożony z równań (31ab) będzie wyznaczał maksimum owej funkcji. Układ równań (31ab) można również zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1-\beta & \alpha \\ \beta & 1-\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_K \\ s_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

i rozwiązać korzystając z wyznaczników Cramera. Płynie stąd wniosek, iż:

$$W = \begin{vmatrix} 1-\beta & \alpha \\ \beta & 1-\alpha \end{vmatrix} = 1 - \alpha - \beta \in (0;1)$$

$$W_K = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & 1-\alpha \end{vmatrix} = \alpha(1-\alpha-\beta)$$

$$W_H = \begin{vmatrix} 1-\beta & \alpha \\ \beta & \beta \end{vmatrix} = \beta(1-\alpha-\beta)$$

co implikuje równania:

$$s_K = \frac{W_K}{W} = \alpha$$

$$s_H = \frac{W_H}{W} = \beta$$

Ponieważ $(\alpha, \beta) \in B$ oraz wartość zmiennej sztucznej $\hat{c}^*$ (danej równaniem (29)) w punkcie (α, β) jest dodatnia, zatem struktura $(s_K, s_H) = (\alpha, \beta)$ jest taką strukturą stóp inwestycji, która wyprowadza rozważaną tu gospodarkę na najwyżej położoną długookresową ścieżkę konsumpcji na pracującego. Oznacza to również, iż ta struktura stóp inwestycji jest złotą regułą akumulacji Phelpsa.

Ponadto z prowadzonych w punkcie 4 rozważań można wyciągnąć następujące wnioski (por. też [Tokarski, 2005, s. 106-107]):

- Struktura stóp inwestycji $(s_K + s_H) \rightarrow 0^+$ jest bardzo atrakcyjna z punktu widzenia bieżącej konsumpcji, gdyż udział konsumpcji w produkcie jest zbieżny do jedności. Jednak w długim okresie prowadzi do tego, że strumienie produkcji i konsumpcji w gospodarce są zbieżne do zera. Dzieje się tak dlatego, iż przy $(s_K + s_H) \rightarrow 0^+$ przyrosty zasobów kapitału rzeczowego i ludzkiego równe są, odpowiednio, $\dot{K} \approx -\delta_K K$ i $\dot{H} \approx -\delta_H H$, co w długim okresie musi sprowadzić zasoby K i H oraz strumienie Y i C do zera.
- Również wszystkie struktury stóp inwestycji, przy których $s_K \rightarrow 0^+$ lub $s_H \rightarrow 0^+$, prowadzą do tego, że $\dot{K} \approx -\delta_K K$ lub $\dot{H} \approx -\delta_H H$. To zaś implikuje, że $K \rightarrow 0^+$ lub $H \rightarrow 0^+$ i przy funkcji produkcji $Y = K^\alpha H^\beta \tilde{L}^\Theta$ (w której do wytworzenia jakiegokolwiek produktu niezbędne są zarówno nakłady kapitału rzeczowego, jak i ludzkiego) powoduje, iż długookresowe strumienie produkcji i konsumpcji zmierzają do zera.
- Jeśli zaś $(s_K + s_H) \rightarrow 1^-$ to, co prawda, wydajność pracy, techniczne uzbrojenie pracy oraz kapitał ludzki na pracującego poruszają się po wysoko położonych ścieżkach czasowych, ale udział konsumpcji w produkcji jest zbieżny do zera. Płynie stąd wniosek, że jeśli $(s_K + s_H) \rightarrow 1^-$, to konsumpcja na pracującego jest zbieżna do zera.
- Jeżeli struktura stóp inwestycji zbliża się do (α, β), to zmienna sztuczna $\hat{c}^*$ rośnie a długookresowa ścieżka czasowa konsumpcji na pracującego podnosi się. W punkcie (α, β) zmienna sztuczna $\hat{c}^*$ osiąga swoje maksimum, zaś konsumpcja na pracującego wchodzi na najwyżej położoną ścieżkę czasową.
- Przedstawione tu tezy są prawdziwe zarówno w warunkach stałych, jak i malejących lub rosnących efektów skali. Jedyna różnica między stałymi a niestałymi efektami skali sprowadza się do tego, że w warunkach stałych efektów skali α i β są zarówno elastycznościami produktu Y względem nakładów kapitału rzeczowego K i ludzkiego H, jak i udziałami owych nakładów w produkcie, zaś przy malejących lub rosnących efektach skali parametry te można interpretować jedynie jako elastyczności funkcji produkcji.

Podsumowanie i wnioski

Prowadzone w opracowaniu analizy można podsumować następująco:

- Model wzrostu gospodarczego Mankiwa-Romera-Weila jest rozszerzeniem neoklasycznego modelu wzrostu Solowa. Rozszerzenie to polega na tym, iż (po pierwsze) do argumentów funkcji produkcji Cobba-Douglasa dołącza się zasób kapitału ludzkiego oraz (po drugie) endogenizuje się proces akumulacji owego kapitału zakładając, iż przyrost zasobu kapitału ludzkiego jest różnicą między inwestycjami w kapitał ludzki a jego deprecjacją.

- Podstawowe wnioski, jakie wynikają z oryginalnego modelu Mankiwa-Romera-Weila, przedstawiają się następująco. Po pierwsze, gospodarka dąży do długookresowych ścieżek czasowych wydajności pracy, technicznego uzbrojenia pracy, kapitału ludzkiego na pracującego oraz konsumpcji na pracującego, na których stopy wzrostu owych zmiennych makroekonomicznych równe są stopie postępu technicznego w sensie Harroda. Po drugie, położenie długookresowych ścieżek czasowych wydajności pracy, technicznego uzbrojenia pracy oraz kapitału ludzkiego na pracującego jest tym wyższe, im wyższe są stopy inwestycji w zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego. Po trzecie, wspomniane uprzednio ścieżki czasowe są tym niżej położone, im wyższe są stopy deprecjacji kapitału rzeczowego i ludzkiego oraz stopa wzrostu jednostek efektywnej pracy (por. też [Mankiw, Romer, Weil, 1992], [Nonneman, Vanhoudt, 1996] lub [Tokarski, 2005, rozdział drugi]).
- Jeśli jednak założy się, iż w modelu Mankiwa-Romera-Weila mogą występować malejące lub rosnące efekty skali (co jest tożsame z tym, że funkcja produkcji nie jest jednorodna stopnia pierwszego), to stopień jednorodności funkcji produkcji Cobba-Douglasa istotnie wpływa na długookresową stopę wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych (produkcji, kapitału rzeczowego i ludzkiego oraz konsumpcji przypadających na jednego pracującego). Okazuje się bowiem, iż wówczas, im wyższy jest stopień jednorodności funkcji produkcji, tym wyższe są długookresowe stopy wzrostu owych zmiennych makroekonomicznych. Co więcej, przy malejących lub rosnących efektach skali długookresowe stopy wzrostu gospodarczego są również tym wyższe, im wyższa jest stopa harrodiańskiego postępu technicznego oraz elastyczności funkcji produkcji względem nakładów czynników produkcji, zaś malejące (rosnące) efekty skali makroekonomicznej funkcji produkcji implikują, że wysoka stopa wzrostu liczby pracujących obniża (podnosi) długookresowe stopy wydajności pracy, technicznego uzbrojenia pracy, kapitału ludzkiego na pracującego i konsumpcji na pracującego (por. też Tokarski [2003 lub 2005, rozdział siódmy]).
- Definiując złote reguły akumulacji Phelpsa jako taką strukturę stóp inwestycji, która wyprowadza gospodarkę Mankiwa-Romera-Weila na najwyżej położoną długookresową ścieżkę czasową konsumpcji na pracującego, okazuje się, iż jest nią struktura stóp inwestycji odpowiadająca elestycznościom wytworzonego strumienia produktu względem nakładów kapitału rzeczowego i ludzkiego. Dzieje się tak zarówno wówczas, gdy w gospodarce występują stałe efekty skali, jak i w sytuacji, w której gospodarka charakteryzuje się malejącymi lub rosnącymi efektami skali funkcji produkcji Cobba-Douglasa. Należy jednak zaznaczyć, iż o ile w warunkach stałych efektów skali wspomniane uprzednio elastyczności tożsame są z udziałami zasobów kapitału rzeczowego i ludzkiego w produkcie, o tyle w warunkach malejących lub rosnących efektów skali powyższa interpretacja parametrów α i β nie musi być prawdziwa.

Bibliografia

Liberda B., [1996], *Oszczędności w teoriach konsumpcji i wzrostu*, „Ekonomista" nr 3.
Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N., [1992], *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics", May.
Nonneman W., Vanhoudt P., [1996], *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for the OECD Countries*, „Quarterly Journal of Economics", August.
Phelps E.S., [1961], *The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen*, „American Economic Review", September.
Phelps E.S., [1966], *Model of Technical Progress and the Golden Rule of Research*, „Review of Economic Studies", April.
Romer D., [1996], *Advanced Macroeconomics*, McGraw Hill Inc., New York etc.
Sato K., [1966], *Discussion*, „American Economic Review", May.
Shell K., [1966], *Toward a Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation*, „American Economic Review", May.
Solow R.M., [1956], *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics", February.
Tokarski T., [1996], *Postęp techniczny a wzrost gospodarczy w modelach endogenicznych*, „Ekonomista" nr 5.
Tokarski T., [2003], *Specyfikacja funkcji produkcji a równowaga długookresowego wzrostu gospodarczego*, „Ekonomista" nr 3.
Tokarski T., [2005], *Wybrane modele podażowych czynników wzrostu gospodarczego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

SCALE EFFECTS AND ECONOMIC GROWTH

Summary

The paper focuses on the neoclassical production function and its influence on the economic growth model proposed by N. Gregory Mankiw, David Romer and David N. Weil [1992]. The model is an expanded version of the traditional neoclassical model developed by Robert M. Solow [1956]. In the context of the production function, the author examines the influence of scale effects on long-term growth and basic macroeconomic variables such as output, physical capital, human capital and consumption per worker. He also reviews scale effects in terms of Edmund S. Phelps' golden rules of capital accumulation [1961, 1966].

The analysis includes differential equations of the type used by Bernoulli and Riccati to describe increases in physical and human capital stock per unit of effective labor (in the case of constant scale effects) and increases in capital stock growth rates (in the case of decreasing and growing scale effects).

The paper ends with a number of important conclusions. First, under constant scale effects, the long-term rates of growth for basic macroeconomic variables are equal to the rate of Harrod-neutral technological progress (which is an exogenous variable in the Mankiw-Romer-Weil model). Second, under decreasing/growing scale effects, these rates are lower/higher than the rate of Harrod-neutral technological progress. Third, repealing the constant-scale-effects assumption in the Mankiw-Romer-Weil growth model does not change the golden rules of capital accumulation because, regardless of

whether scale effects decrease, grow or are constant, the golden rule of accumulation holds that the structure of investment rates corresponds to the elasticities of output with regard to physical and human capital inputs.