ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
KSZTAŁCENIE POLONISTYCZNE CUDZOZIEMCÓW 3, 1991

Danuta Wróbel

NIEDEFINICYJNE WPROWADZANIE POJĘĆ MATEMATYCZNYCH NA ZAJĘCIACH DLA CUDZOZIEMCÓW

W pracy tej nie będę zajmowała się problemem natury obiektów definiowanych w matematyce, gdyż takie lub inne rozwiązanie tego zagadnienia nie będzie miało, najprawdopodobniej, nigdy wpływu na praktykę matematyczną[1]. Nie będę też zajmowała się stosowanymi i uznawanymi w matematyce metodami definiowania takich obiektów. Przy współczesnych teoriomnogościach koncepcjach matematyki wydaje się stosownym zauważyć, że jeżeli założymy, iż zbiór (klasę) utożsamia się z własnością, która tę klasę wyznacza, to terminy matematyczne są predykatami jedno- lub wieloargumentowymi[2]. Predykaty jednoargumentowe to właśnie owe własności wyznaczające zbiory jak np. własność bycia liczbą naturalną w zdaniu: **5 jest liczbą naturalną**. Predykat ten wyznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych *N*. Przykładem predykatu dwuargumentowego jest relacja **bycia większym od**, czyli własność **bycia większym od**, co zapisuje się $x > y$.

Wobec powyższego, termin **zbiór liczb naturalnych** i termin **liczba naturalna 2** są podobnej natury jak termin **żółty**, bo każdy z nich wyznacza pewną klasę przedmiotów (mniejsza o ich ontologiczny byt)[3]. Elementy tych klas mają własności bądź to bycia liczbą naturalną, bądź bycia zbiorem dwuelementowym, bądź bycia żółtym. Różnica jest jedna – zbiory pierwszego i drugiego rodzaju są dokładnie wyznaczone przez odpowiadające im predykaty, czego

[1] R. Carnap, *Filozofia jako analiza języka nauki*, Warszawa 1965, s. 53-55.

[2] J. Lyons, *Semantyka*, t. 1, Warszawa 1984, s. 149-151. Wśród terminów, które składają się na zdanie, autor wyróżnia nazwy i predykaty. Nazwy są to terminy odnoszące się do indywiduów, czyli w tradycyjnej logice tzw. nazwy indywidualne. Predykatów używ się w zdaniach do przypisania cechy indywiduum określonego przez tę nazwę. Predykatami są nie tylko czasowniki **rośnie**, **maleje** i przymiotniki typu **gęsty**, przeliczalny czy też **większy niż** (predykat dwuargumentowy), ale również tzw. nazwy ogólne takie, jak **człowiek**. Termin ten nie określa żadnego konkretnego indywiduum a jedynie istotną cechę pewnego zbioru indywiduów, tu: cechę człowieczeństwa.

[3] Tamże.

nie można powiedzieć o predykacie **żółty** (pomijam znaczenie naukowe pojęcia). Terminy matematyczne mają zawsze ostry zakres.

W teoriach matematycznych takie predykaty wprowadzane są przez definicje równościowe w postaci jawnej lub też w postaci uwikłanej. W każdej teorii istnieją zawsze pojęcia, których nie definiuje się albo tylko częściowo zawęża ich zakres poprzez podanie pewnych postulatów, które muszą być spełnione przez te pojęcia. Jeżeli teoria jest zaksjomatyzowana, to jest to układ aksjomatów[4]. W klasycznej geometrii euklidesowej takimi pojęciami są **punkt**, **prosta**, **płaszczyzna**, a w teorii mnogości – **element**, **zbiór**, relacja $\in$. Nad sposobami wprowadzania m. in. takich pojęć na zajęciach z matematyki prowadzonych dla cudzoziemców chciałabym się bliżej zastanowić. Interesują mnie szczególnie początkowe zajęcia, kiedy to sytuacja faktyczna jest, w przybliżeniu, następująca:

Matematyka wprowadzana jest do rozkładu zajęć prawie jednocześnie z językiem polskim, więc posługiwanie się opisem w tym języku jest prawie niemożliwe. Do dyspozycji mamy niewiele poza konstrukcją najprostszego zdania podmiotowo-orzecznikowego typu *a* **jest** *b* (*a*, *b* – zmienne nazwowe) i jego negacji bez kwantyfikacji, czasownikami **być**, **mieć**, **nazywać się** i to nie we wszystkich osobach czasu teraźniejszego, liczebnikami od 1 do 100 i niezbyt dokładną umiejętnością odpowiedzi przez słuchaczy na postawione im pytania typu : **Czy to jest** *A*?, **Ile** *A* **ma** *B*?, **Jak to się nazywa?** Sytuacja ta poprawia się z tygodnia na tydzień, ale nie na tyle, aby można było po polsku formułować definicje terminów matematycznych. Sformułowania te ze względu na wymogi precyzji w matematyce i nieadekwatność języków sztucznych i języków naturalnych bywają często trudne nawet dla absolwenta polskiego liceum. Weźmy na przykład funktor implikacji oraz odpowiadające mu zdanie o schemacie $p \Rightarrow q$ (p, q – zmienne zdaniowe). Zakłada się, że jest to schemat zdania warunkowego, które czytamy **Jeżeli** *P*, **to** *Q*. (*P*, *Q* – zdania w sensie logicznym). Okazuje się, że spójnik **Jeżeli..., to..** ma wiele znaczeń w języku polskim:

1) nieprawda, że *P* i nie *Q*,
2) nie jest możliwe, że *P* i nie *Q*,
3) ze zdania *P* wynika zdanie *Q*,
4) to, że *P* jest przyczyną, że *Q*[5].

Taka sytuacja jest przyczyną dyskusji na temat implikacji i jej odpowiednika w języku naturalnym, która trwa prawie tak długo jak europejska myśl

[4] Szerzej na ten temat piszą m. in. K. Ajdukiewicz, *The Axiomatic Systems From the Metodological Point of View*, „Studia Logica" 1960, t. 9, s. 150-219 i L. Borkowski, *Logika formalna*, Warszawa 1970, s. 332-341.

[5] Znaczenie podaję za L. Borkowskim, *Uwagi o okresie warunkowym oraz implikacji materialnej i ścisłej*, [w:] *Rozprawy logiczne. Księga pamiątkowa ku czci profesora Kazimierza Ajdukiewicza*, Warszawa 1964, s. 11-22.

filozoficzna[6]. Przykłady można by mnożyć, ale wspomnę jeszcze tylko o nawiasach, które w języku mówionym są zupełnie nieczytelne i zdanie o schemacie $p\wedge(q\vee r)$ brzmi po polsku tak samo, jak zdanie o schemacie $(p\wedge q)\vee r$ a znaczenie ma zupełnie różne[7].

Znajomość logiki formalnej wśród naszych słuchaczy jest najczęściej niezadowalająca albo wręcz żadna, co w sposób istotny utrudnia nam określenie terminów matematycznych w sposób pośredni[8] przy pomocy innych terminów wcześniej już wprowadzonych. W stosunku do pojęć pierwotnych, o których już wspomniałam wcześniej, definiowanie (interpretowanie) pośrednie jest niemożliwe ze względu na naturę tych terminów, wobec tego pozostaje do dyspozycji tylko interpretowanie bezpośrednie, czyli tzw. definicja deiktyczna.

Korzystanie ze słowników też nie zawsze jest możliwe, gdyż albo takich słowników w ogóle nie ma, albo są to słowniki popularne, nie podające wszystkich znaczeń, a szczególnie znaczeń matematycznych danego terminu.

Myślę, że argumenty te są dostateczne, aby dostrzec problem, z którym musi sobie poradzić wykładowca matematyki na zajęciach dla cudzoziemców. Dodam jeszcze, że skomplikowane pojęcia abstrakcyjne muszą pojawić się od pierwszych godzin tego rodzaju zajęć i słuchacz nie może nie rozumieć takich terminów jak **punkt**, **prosta**, **kwadrat**, **równoległobok**, **koniunkcja**, **alternatywa** czy wreszcie **implikacja**, która jest jednym z podstawowych pojęć matematycznych, a zdanie warunkowe, w pewnym sensie odpowiadające implikacji, wprowadzane jest na zajęciach z polskiego dużo później.

Celem nauczania matematyki w Studium Języka Polskiego dla Cudzoziemców nie jest jednak i nie może być nauczanie tego przedmiotu od podstaw. Zakładamy, że nasi słuchacze znają matematykę na poziomie naszej szkoły średniej, a jeżeli nawet nie, to na pewno mają prawidłowe intuicje związane z najbardziej elementarnymi terminami matematycznymi. Z drugiej strony, w pierwszej fazie nauczania matematyki mniej powinno nam zależeć na dokładnym formułowaniu definicji w języku polskim, a bardziej na tym, aby

[6] Por. np. I. M. Bocheński, *Ancient Formal Logic*, Amsterdam 1968, s. 77-102.

[7] Warto zauważyć, że język naturalny pełni w matematyce rolę „pomocniczą" w stosunku do zapisów formalnych. Inaczej mówiąc, jedynie ważny jest zapis formalny, a przy pomocy języka naturalnego możemy tylko pewne zależności formalne uczynić bliższymi intuicyjnie dla odbiorcy. Praktyka pokazuje, że najlepsze rezultaty dydaktyczne uzyskujemy, gdy mamy do dyspozycji obie formy zapisu, które nawzajem się uzupełniają. Szczególnie ważne jest to dla osób uczących się języka obcego, kiedy to zapis formalny ułatwia opis językowy definicji. Stąd wniosek, że uzupełnienie podstawowych wiadomości z logiki formalnej i teorii mnogości jest sprawą pierwszej rangi dla naszych słuchaczy i wszelkimi sposobami powinniśmy im w tym dopomóc. Nie jest to zadanie łatwe na tym poziomie znajomości języka, ale nie jest też niewykonalne.

[8] O definiowaniu i interpretowaniu pośrednim i bezpośrednim pisze M. Przełęcki, *Interpretacja systemów aksjomatycznych*. „Studia Filozoficzne" 1960, nr 6, s. 89-105.

nasi słuchacze rozumieli pojęcia[9] i potrafili poprawnie posługiwać się nimi – większość słuchaczy to przyszli studenci wyższych szkół technicznych, kandydaci na teoretyczne studia matematyczne należą do wyjątków. Nie znaczy to wcale, że należy zrezygnować z poprawnych definicji terminów matematycznych i w trakcie nauczania, np. w drugim semestrze lub przy powtórzeniu, można z powodzeniem wrócić do omawianych wcześniej zagadnień i słownych lub też słowno-formalnych opisów. Najczęściej będą to definicje interesujących nas terminów wprowadzonych wcześniej deiktycznie. Można też polecić przytaczanie takich definicji jako samodzielne lub przy niewielkiej ingerencji ze strony uczącego ćwiczenie dla słuchaczy Studium. Jeśli w ten sposób powstaną definicje różne treściowo, ale oznaczające to samo, to nie należy się tym martwić, bo po pierwsze – nie naucza się matematyki na poziomie szkoły średniej aż tak bardzo systematycznie, a po drugie – takie ćwiczenie da więcej korzyści słuchaczowi niż bezmyślne wyuczenie się podanych wcześniej do zapamiętania gotowych reguł. Korzyści te będą tak w dziedzinie języka polskiego, jak i matematyki. Obowiązkiem uczącego jest wybranie odpowiedniego momentu do takich ćwiczeń. Będzie to możliwe wówczas, kiedy słuchacze będą mieć dostateczne przygotowanie z języka polskiego, klasycznej logiki i matematyki.

W tradycji logicznej znane jest pojęcie tzw. definicji deiktycznej albo inaczej ostensywnej (od łac. ostendo – pokazuję). Według rozpowszechnionego pojęcia definicja ta polega na wypowiadaniu zdania typu **To jest** *N* z jednoczesnym wskazaniem pewnego desygnatu nazwy *N*; słowo **to** jest nazwą okazjonalną, która zmienia się w nazwę indywiduową, jeśli zrobimy odpowiedni gest wskazujący desygnat tej nazwy. Wszędzie robi się zastrzeżenie, że desygnatem wskazywanym musi być termin spostrzeżeniowy, czyli taki konkretny przedmiot, który może być bodźcem dla naszych zmysłów. I tak przedmiotem przyporządkowanym konkretnej nazwie indywiduowej jako jej desygnat jest właśnie pewien przedmiot materialny, natomiast w przypadku predykatu, a tylko one nas interesują, jest to przedmiot abstrakcyjny – klasa lub relacja. Desygnatów predykatu pokazać nie można. Nie można pokazać punktu, prostej, płaszczyzny, liczby 2, a tylko przedmioty będące ich modelami matematycznymi. Modelem punktu jest kropka narysowana na papierze, modelem prostej – linia, a modelem liczby 2 zbiór dwuelementowy.

Zdaję sobie sprawę z problemów logicznych wynikających z deiktycznego

[9] Na temat doniosłości i pierwotności rozumienia języka obcego w stosunku do używania go patrz B. K r a k o w i a n, *O nauczaniu rozumienia mowy obcojęzycznej*, Warszawa 1985. W zupełności zgadzam się z ogólnymi tezami proponowanymi przez autora, choć pewnych szczegółowych rozwiązań nie możemy stosować w kształceniu cudzoziemców ze względu na odmienną sytuację w stosunku do tej, którą zakłada autor – bilingwizm. My prawie zawsze dysponujemy jednym językiem.

sposobu definiowania, na co zwraca uwagę m. in. M. Przełęcki[10]. Zgadzam się, że taka definicja jest nieadekwatna i wieloznaczna. Stąd wniosek, że ta metoda nie nadaje się do definiowania terminów matematycznych w sensie definicji równościowych lub chociażby jednoznacznych co do spełniania pewnych postulatów, która to jednoznaczność matematykom wystarcza. Metoda ta znajduje szerokie zastosowanie w nauczaniu języków obcych, gdzie traktuje się problem definiowania nieco mniej rygorystycznie, niż czynią to logicy i matematycy. Wydaje się, że można z powodzeniem stosować ją w nauczaniu cudzoziemców przy wprowadzaniu tych polskich terminów matematycznych, które są terminami pierwotnymi danej teorii lub też znany jest ich sens w pierwszym języku słuchaczy takich kursów, a nie znany jest tylko sam termin. Nie chodzi tu jednak o budowanie definicji tych terminów, a tylko o wywołanie poprawnego skojarzenia z terminami matematycznymi w pierwszym języku.

Załóżmy za Kotarbińską[11], że ogólna zasada definicji deiktycznej polega na wielokrotnym wypowiadaniu zdania typu **To jest** N albo inaczej X **jest** N (X zastępuje nazwę **to**, a więc jest zmienną nazwową; schemat X **jest** N zmienia się w zdanie w sensie logicznym przy odpowiednim geście wskazującym) lub jego negacji. Wobec tego po takim zabiegu „definicyjnym" mamy do dyspozycji dwa układy zdań:

$$(1)\quad \begin{array}{l} X_1 \text{ jest } N \\ X_2 \text{ jest } N \\ \quad\dots \\ X_n \text{ jest } N \end{array}$$

$$(2)\quad \begin{array}{l} X_{n+1} \text{ nie jest } N \\ X_{n+2} \text{ nie jest } N \\ \quad\dots \\ X_{n+m} \text{ nie jest } N, \end{array}$$

gdzie X_i $(i=1, 2,...,n+m)$ są nazwami indywiduowymi. Wyrażenie **jest** należałoby rozumieć jako $\in$[12], ponieważ X_i jest nazwą indywiduową o desygnatach konkretnych, a N nazwą ogólną o desygnatach abstrakcyjnych, czyli pewnej klasie tych desygnatów konkretnych. Rola odbiorcy takiej „definicji" polega na wyabstrahowaniu z przedmiotów X_1, X_2,...,X_n pewnej cechy wspólnej tym przedmiotom, w czym pomagają przykłady negatywne typu (2). Jeżeli abstrakcja odbywa się zgodnie z życzeniem nadawcy definicji, to ta

---

[10] M. Przełęcki, *O definiowaniu terminów spostrzeżeniowych*, [w:] *Rozprawy logiczne...*, s. 155-182.

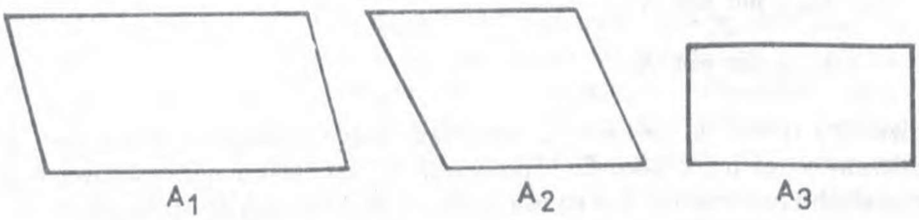
[11] J. Kotarbińska, *Tak zwana definicja deiktyczna*, [w:] *Logiczna teoria nauki*, red. T. Pawłowski, Warszawa 1966, s. 57-98.

[12] Przełęcki, *O definiowaniu...*, s. 160.

wyabstrahowana cecha określa zbiór N. Procedura taka nie zawsze zadowala logików i budzi wśród nich wiele wątpliwości, bo taki sposób wprowadzania pojęć nie spełnia wymogów definicji, a co najwyżej spełnia wymogi definicji cząstkowych. Stosuje się ją od dawna i z powodzeniem na początkowych lekcjach języków obcych do przekładania terminów na znany już język bez używania słowników[13] i wydaje się, co potwierdza praktyka, że można by stosować ją też przy wprowadzaniu niezbyt skomplikowanych pojęć matematycznych, czyli przy uczeniu języka matematyki. Oczywiście, nie można tego robić w oderwaniu od samej matematyki, czyli twierdzeń, które na nią się składają. Jednakże dobór przykładów (modeli) X_1, X_2,...,X_n,...,X_{n+m} nie może być przypadkowy, chociażby zdania (1) i (2) były zdaniami prawdziwymi. Dobór ten musi być taki, aby odbiorca naszej „definicji" wybrał tę cechę modeli, o którą nam chodzi (skuteczność definicji) i aby zrobił to przy możliwie najmniejszej liczbie m i n, czyli najszybciej (ekonomiczność definicji)[14].

Pokażę i przedyskutuję zastosowanie metody deiktycznej do wprowadzenia pojęcia równoległoboku. Pojęcie to jest bardzo proste, ale sądzę, że typowe dla stosowania takiej właśnie metody.

Zacznijmy od prawdziwych podstawień funkcji zdaniowych typu (1), czyli przykładów pozytywnych. Funkcje te zmieniają się w zdania, które będą warunkami wystarczającymi tej operacji. Wskazywane przykłady modeli powinny być różnorodne w tym sensie, że zmieniać należy cechy modeli, które są nieistotne dla naszego celu. W przypadku równoległoboku najkorzystniej byłoby pokazać figury:



mówiąc jednocześnie:

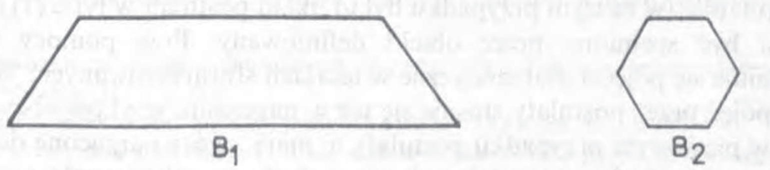
[13] Jako przykłady mogą służyć interesujące podręczniki do nauki języka francuskiego dla cudzoziemców, np. A. Rebullet, J. L. Malandain, J. Verdol, *Métode orange*, Paris 1978; czy też G. Mauger, M. Bréziere, *Le français et la vie*, Paris 1971 i inne.

[14] Por. Kotarbińska, *op. cit.*, s. 83-84; jak również T. Kotarbiński, *Traktat o dobrej robocie*, Łódź 1957.

(3) **To jest równoległobok**,
a rozumiejąc: **Figura** A_i **jest równoległobokiem**, gdzie $i = 1, 2, 3$[15].

W przykładach tych zmieniają się długości boków, stosunki między tymi długościami oraz kąty. Nie zmieniają się takie własności, jak: płaskość figury, zamkniętość łamanej określającej tę figurę, wypukłość, czworokątność, równoległość boków przeciwległych względem siebie. Rozumowanie przebiega według reguł indukcji eliminacyjnej Milla i kanonu jedynej zgodności wraz ze wszystkimi jego logicznymi mankamentami[16]. Pokazywanie kwadratu nie jest uzasadnione (chociaż dopuszczalne), ponieważ nie otrzymujemy żadnej nowej zmiany, która nie byłaby zawarta w przykładach poprzednich. Kwadrat to w pewnym sensie iloczyn A_2 i A_3, a dokładniej – iloczyn zbioru wszystkich rombów i wszystkich prostokątów.

Na podstawie układu zdań (3) nietrudno, jak sądzę, domyślić się, że chodzi „co najmniej" o równoległobok, ale równie dobrze może to być dowolny czworokąt, figura płaska, wielokąt wypukły itp. Ogólnie mówiąc, nawet najlepiej dobrany zespół przykładów pozytywnych typu (1) określa równie dobrze pojęcie zamierzone przez nadawcę takiej definicji, jak i każde pojęcie nadrzędne zakresowo do poprzedniego. Wobec tego należy wskazać przykłady negatywne, czyli przykłady takich modeli, które byłyby prawdziwym podstawieniem postulatów typu (2). Nie trzeba uzasadniać, że dobieranie przykładów negatywnych w sposób dowolny, byleby tylko spełniały postulaty typu (2), eliminuje wprawdzie pewną klasę niechcianych przez nas predykatów, ale eliminacja taka mogłaby rozciągać się w nieskończoność z dość mizernym rezultatem. Dobór ten musi być, jak już wspomniałam, ekonomiczny. Ekonomiczne jest dobieranie wzorcowych przykładów negatywnych spośród modeli klas wyznaczonych przez przykłady pozytywne, a więc spośród predykatów nadrzędnych zakresowo w stosunku do definiowanego. Predykaty te powinny być jak najbardziej zbliżone do predykatu definiowanego. Dla terminu **równoległobok** proponuję jako wzorcowe modele negatywne wskazanie figur:



B_1 B_2

z jednoczesnym wypowiedzeniem zdań: B_1 **nie jest równoległobokiem** i B_2 **nie jest równoległobokiem**. Jedyną różnicą między równoległobokiem i trape-

[15] Istnieją pewne nawyki szkolne rysowania figur geometrycznych: gdy rysujemy równoległobok, nie dodając o nim żadnych dodatkowych informacji, dbamy o to aby ani boki, ani kąty narysowanego równoległoboku nie były równe i słuchacz może się domyślić znaczenia słowa **równoległobok** już po pierwszym przykładzie. Zwróćmy jednak uwagę na elementarność pojęcia.

[16] Por. m. in. K. Ajdukiewicz, *Logika pragmatyczna*, Warszawa 1974, s. 165-169.

zem B_1 jest nierównoległość drugiej pary przeciwległych boków, a między równoległobokiem i sześciokątem foremnym B_2 – inna liczba boków. I tu przychodzi na myśl indukcja eliminacyjna Milla i kanon jedynej różnicy[17]. W ten sposób eliminuje się poprzez jedną operację wiele predykatów jednocześnie – wszystkie nadrzędne zakresowo w stosunku do pojęcia **trapez** (podrzędne do pojęcia nie-trapez) i wszystkie nadrzędne w stosunku do pojęcia **sześciokąt foremny** (podrzędne w stosunku do pojęcia **nie-(sześciokąt foremny)**. Wydaje się, że są to bardzo ekonomiczne warunki konieczne, ale nie są one dostateczne (odwrotnie niż przy przykładach pozytywnych), nawet gdy warunków takich wskażemy dowolnie dużo.

Koniunkcja przedstawionych wyżej warunków koniecznych i warunków dostatecznych tworzy definicję deiktyczną terminu **równoległobok**.

Nie można podać, w tym wypadku też nie mam do tego pretensji, sztywnych reguł na definiowanie deiktyczne poszczególnych terminów. Wybieranie modeli wzorcowych – ich jakość i ich ilość zależy od tego, do kogo kierowana jest taka definicja, w jakim stopniu odbiorca definicji zna odpowiednie pojęcie w swoim pierwszym języku, w jakim stopniu zna modele tego pojęcia i jaka jest jego zdolność abstrahowania. Inaczej mówiąc, deiktyczne wprowadzanie pojęć wymaga aktywności nie tylko ze strony nadawcy, ale również odbiorcy.

Logicy zgodnie uważają, że taka metoda może prowadzić do definicji adekwatnych jedynie w przypadku, gdy odbiorca takiej definicji deiktycznej dysponuje jakimiś dodatkowymi wiadomościami dotyczącymi obiektów definiowanych[18]. Wiadomości te mogą być podane w sposób jawny lub też przyjmowane przez definiującego w sposób domyślny. Można zakładać, że nasi studenci znają w mniejszym lub większym stopniu definiowane przez nas pojęcia albo co najmniej modele tych pojęć. Tego wolno nam się domyślać jako definiującym.

Definiowanie deiktyczne sprowadza się do podania pewnego układu postulatów (w naszym przypadku był to układ postulatów typu (1) i (2)), który musi być spełniony przez obiekt definiowany. Przy pomocy postulatów definiuje się pojęcia matematyczne w teoriach sformalizowanych. Wprowadzenie pojęć przez postulaty stosuje się też w nauczaniu języków obcych. Ale tak jak w pierwszym przypadku postulaty te mają z góry narzucone do spełnienia pewne warunki formalne, tak w drugim takich warunków trudno się doszukać. Może jedynie warunek niesprzeczności jest uznawany w obu przypadkach. Wobec tego takie kontekstowe przekładanie pojęć z jednego języka na drugi najczęściej wymyka się logicznej analizie, choć nie ma wątpliwości, że jest stosowane z całkiem dobrymi rezultatami.

[17] Tamże, s. 155-165.

[18] Kotarbińska, *op. cit.*, s. 94-95; Przełęcki, *O definiowaniu...*, s. 172-175.

Poprawności rozumienia pojęć wprowadzonych metodą deiktyczną nie sposób sprawdzić bezpośrednio. Możemy to zrobić tylko metodą bezpośrednią poprzez sprawdzenie poprawności używania tych pojęć w określonych kontekstach i umiejętności odpowiedzi na dostosowane do prezentowanego przez słuchacza poziomu językowego pytania typu zamkniętego[19]. W obu wypadkach rezultat sprawdzenia będzie miał tylko charakter hipotezy[20], czyli takiego zdania, którego prawdziwość sprawdza się poprzez sprawdzanie prawdziwości zdań, które zeń wynikają. Dobór takich pytań powinien także czynić zadość zasadom skuteczności i ekonomiczności. Nieekonomiczne byłoby pytanie studenta **Czy to jest równoległobok?** z jednoczesnym wskazaniem np. na kwiat stojący w oknie sali wykładowej.

Wzory ćwiczeń, które sprawdzają umiejętność używania pojęć w kontekstach słownych, bez wymagania przy tym definiowania samego pojęcia, można znaleźć w wielu podręcznikach do nauki języków obcych, a szczególnie jeśli są to podręczniki pisane dla cudzoziemców, a więc z konieczności jednojęzyczne[21]. W naszych podręcznikach, którymi posługujemy się zaczynając pracę z cudzoziemcami, tylko kilka takich ćwiczeń znajduje się w książce W. Kwapińskiego i J. Wesołowskiego[22]. O wiele częściej proponuje się sprawdzanie rozumienia pojęć przy pomocy pytań. Najprostszymi pytaniami przydatnymi do naszych celów są pytania rozstrzygnięcia[23], czyli pytania typu **Czy** p**?** (p – zmienna zdaniowa), na które odpowiadamy według schematu p albo $\sim p$, czy też krótko – **Tak** albo **Nie**. Jako przykład mogą posłużyć pytania **Czy każdy**[24] **równoległobok jest prostokątem?**, **Czy zbiór** N **jest zbiorem skończonym?**, **Czy to jest równoległobok?** ze wskazaniem na odpowiedni model figury geometrycznej, np. trapezu. Pytania tego typu są poprawnie postawione (poza pytaniami o błędnym założeniu, ale takie też czasami stosujemy w praktyce pedagogicznej, np.: **Czy pochodna funkcji** $y=x$ **w punkcie** $x=0$ **jest dodatnia?**) z punktu widzenia logiki, ale niewskazane byłoby ograniczenie się tylko do pytań rozstrzygnięcia, ponieważ odpowiadający nie miałby możliwości do wykazania się prawie żadnym samodzielnym formułowa-

[19] Pytania dzieli na otwarte i zamknięte T. Pawłowski, *Pojęcia i metody współczesnej humanistyki*, Wrocław 1977, s. 155.

[20] Zgodnie z rozumieniem hipotezy przez Ajdukiewicza, *op. cit.*, s. 131-133.

[21] Ciekawe ćwiczenia sprawdzające można znaleźć w podręczniku języka francuskiego dla cudzoziemców: M. Verdelhan-Bourdage i inni, *Sans frontiere*, Paris 1983, również Krakowian, *op. cit.*, s. 162-184, podaje wzory ćwiczeń sprawdzających rozumienie języka, przede wszystkim, mówionego.

[22] W. Kwapiński i J. Wesołowski, *Matematyka*, cz. I, Łódź 1983, s. 50, 84, 93, 97.

[23] Dokładniej o pytaniach rozstrzygnięcia i dopełnienia pisze Ajdukiewicz, *op. cit.*, s. 88; jak również T. Kubiński, *Przegląd niektórych zagadnień logiki pytań*, „Studia Logika" 1966, nr 18, s. 109-113.

[24] Gdy słuchacze nie znają jeszcze słowa kwantyfikującego **każdy** można je opuścić licząc na to, że zapytany domyśli się tu kwantyfikatora.

niem odpowiedzi w języku polskim. Odpowiedź jest już zawarta w pytaniu i cały wysiłek językowy odpowiadającego polega na, ewentualnej, negacji zdania, a to można zrobić bardzo prosto wstawiając przed zdaniem wyrażenie **nieprawda, że...** albo jeszcze prościej – odpowiadając **Nie**.

Ciekawsze dla nauczania języka są pytania dopełnienia i odpowiedzi na takie pytania. Są to pytania, które mają również z góry określony schemat odpowiedzi, ale nie tak prosty jak pytania rozstrzygnięcia. Pytania te zaczynają się zwykle od partykuły pytajnej[25] **Który...?**, **Kto...?**, **Co...?**, **Ile...?**, itp. Gdy na przykład pytamy **Ile przekątnych ma równoległobok?** to odpowiedź mieści się w schemacie: **Równoległobok ma** k **przekątnych**.

Pytania rozstrzygnięcia i pytania dopełnienia można znaleźć w stosowanych przez nas podręcznikach matematycznych. Znajdują się tam również pytania innego rodzaju, które (najprawdopodobniej) wymagają od studenta odpowiedzi będącej opisową definicją wprowadzonych predykatów. Nie sądzę, aby student w pierwszych tygodniach nauki polskiego potrafił w tym języku i z wymaganą w matematyce precyzją odpowiedzieć na pytanie: **Co to jest obwód koła?**. Wystarczy, jeśli zrozumie on polecenie: **Proszę obliczyć obwód koła o promieniu r.** Nie podlega dyskusji wadliwość logiczna takich pytań jak: **Jakie ściany ma sześcian?**, **Jakie są nawiasy?** czy **Jaką liczbą jest 234?**[26], z odpowiedziami na nie miałaby kłopoty także autorka niniejszej pracy. Pomijając widoczną wieloznaczność cytowanych pytań, sądzę, że stawiając je na początkowych zajęciach z matematyki niczego się nie osiąga, a tylko uczy słuchaczy pewnych wadliwych schematów. Nie jestem też pewna, czy umiejętność nazywania nawiasów jest niezbędna przyszłemu studentowi polskich uczelni.

Metoda deiktyczna, albo ogólniej kontekstowa, nie jest jedyną metodą niededukcyjną, którą możemy stosować nauczając cudzoziemców matematyki i jej języka. Metodą, o której warto powiedzieć choćby kilkanaście zdań jest analogia[27], mająca w matematyce szczególne zastosowanie.

W teoriach matematycznych spotykamy wiele zbiorów lub nawet całych systemów podobnych strukturalnie, czyli inaczej – ten sam system (język, algebra) zaksomatyzowany może mieć różne interpretacje[28] (modele). Nie-

---

[25] Tak w tradycji logicznej nazywają się wyrażenia: **czy**, **kto**, **co**, **gdzie** itp. zawarte w pytaniu. Por. *Mała encyklopedia logiki*, Warszawa 1970, hasło **Pytanie** i **Partykuła pytajna**.

[26] Wszystkie pytania wybrałam z książki J. Jerzewskiego, *Wstęp do matematyki*, Łódź 1983, s. 17, 32, 35. Nie chcę przez to negować wielu walorów dydaktycznych tej książki.

[27] Analogię rozumiem tak, jak I. Dąmbska, *Kilka uwag o rozumowaniach na podstawie analogii*, [w:] *Rozprawy logiczne...*, s. 31. Inne pojmowanie wnioskowania przez analogię można znaleźć np. w *Małej encyklopedii logiki*, s. 347.

[28] Interpretacją teorii, albo inaczej modelem semantycznym teorii nazywa się układ przedmiotów (indywiduów, predykatów), które przyporządkowane są wyrażeniom danej teorii i spełniają aksjomaty tej teorii. Inaczej mówiąc, jest to układ przedmiotów prawdziwie opisywanych przez tę teorię.

śmiertelnym, ale i doskonałym przykładem niech będzie algebra Boole'a jako pewna struktura logiczna będąca zbiorem niepustym o wyróżnionych elementach 0 i 1 i określonych aksjomatycznie operacjach +, −, ·. Algebra ta ma wiele różnych interpretacji jak klasyczny rachunek zdań (wyróżnione są wartości logiczne prawdy i fałszu, a operacje to alternatywa, koniunkcja i negacja), rachunek zbiorów bez relacji ε (wyróżniony zbiór pusty i uniwersalny, a operacje to suma logiczna, iloczyn i dopełnienie zbioru), teoria sieci elektrycznych. Te wszystkie interpretacje są względem siebie izomorficzne, czyli jedno-jednoznaczne. Jeżeli tak, to relacje wprowadzone w jednym zbiorze można „przenieść" do drugiego bez żadnych dodatkowych informacji a tylko nazywając je inaczej. I tak to, co w rachunku zdań nazywa się koniunkcją, w rachunku zbiorów – iloczynem. Relacje te w jednej i w drugiej interpretacji algebry Boole'a mają dokładnie te same własności. Wobec tego to wszystko, co mówi się o koniunkcji zdań można powiedzieć o iloczynie zbiorów. Przy zachodzącym izomorfizmie wnioskowanie jest tu niezawodne, czyli zawsze z prawdziwości racji wynika prawdziwość następstwa. W naszej praktyce pedagogicznej zaliczyłabym jednak ten rodzaj wprowadzania pojęć matematycznych do niededukcyjnych. Po to, aby niezawodnie „przenosić" relacje i ich własności z jednej interpretacji do drugiej, musimy znać strukturę rozważanych interpretacji i zdawać sobie sprawę z ich izomorficznego podobieństwa. Na poziomie przygotowania cudzoziemców do wyższych studiów w Polsce, i to najczęściej studiów politechnicznych, nie pokazuje się (ani to jest możliwe) dokładnych struktur danych teorii, a tym bardziej, nie dowodzi się wymaganego izomorfizmu.

Obie opisane przeze mnie metody wprowadzania pojęć matematycznych mogą być i są z powodzeniem stosowane na zajęciach dla cudzoziemców, a tylko, być może, nauczający nie zawsze zdają sobie sprawę z teoretycznego rodowodu tych metod. Terminy matematyczne są specjalnie podatne na tego rodzaju zabiegi, chociażby dlatego, że nie żąda się od nich jednoznaczności semantycznej, a tylko syntaktycznej. Analogię możemy stosować w matematyce ze względu na izomorfizm różnych interpretacji danej struktury. Takich teorii izomorficznych poza matematyką i logiką formalną nie ma.

Łatwo zauważyć, że metoda deiktyczna jest metodą dość elementarną. Wprowadzanie pojęć *per analogiam* wymaga od słuchacza większego zaawansowania tak w matematyce, jak w logice formalnej.

Przedstawione propozycje można nazwać za V. V. Quinem[29] „z punktu widzenia logiki", a więc starałam się zastosować pewne osiągnięcia logiki (szeroko rozumianej) w metodyce nauczania cudzoziemców języka matematyki. Nie są to ani jedyne metody, ani jedyny punkt widzenia. Ostatnio dużo mówi się o metodzie słowotwórczej i mój przykład z równoległobokiem

[29] Tytuł znanej książki V. V. Quine'a, *From a logical point of view*.

doskonale nadaje się do stosowania takiej metody. W każdym razie żadnej z tych metod nie można stosować mechanicznie (jeśli w ogóle takie metody w dydaktyce istnieją), a wybór jednej z nich lub stosowanie kilku jednocześnie, nawet do jednego pojęcia, zależy od wielu pozaformalnych czynników[30]. Mam nadzieję, że poczynione tu uwagi mogą mieć zastosowanie nie tylko do matematyki i jej języka, ale i innych przedmiotów z grupy matematyczno-fizycznych.

Koncepcję tu przedstawioną charakteryzują w najogólniejszym wymiarze dwa założenia: 1) należy odstąpić od skomplikowanych definicji słownych terminów matematycznych w czasie, gdy możliwości językowe słuchaczy na to nie pozwalają, 2) więcej czasu poświęcić na uzupełnienie wiadomości z logiki formalnej, która może być pomostem do porozumienia się między wykładowcą i studentem oraz pomagać w ćwiczeniach językowych. Zmuszanie studenta do budowania skomplikowanych językowo definicji słownych po kilku czy nawet kilkunastu tygodniach nauki języka nie jest niczym uzasadnione, a upraszczanie, jeśli odbywa się kosztem treści, absolutnie niedopuszczalne. Z drugiej strony, matematyk nie może zajmować się na zajęciach tylko tym, co zdoła dokładnie opisać po polsku, bo dla wielu naszych słuchaczy pobyt w Studium jest szansą na uzupełnienie, często bardzo niepełnej, wiedzy matematycznej. Nie znaczy to absolutnie, że definicje ostensywne mogą być definicjami ostatecznymi (z wyjątkiem pojęć pierwotnych teorii, gdzie na poziomie naszego nauczania definicje takie zastępują układ aksjomatów) i nie musimy wprowadzać poprawnych definicji, gdy tylko jest to możliwe. Nie sądzę jednak, aby na uczelniach o profilu zawodowym wymagano bezbłędnego wypowiadania po polsku skomplikowanych definicji matematycznych, jeśli student taką definicję rozumie, tzn. potrafi pojęcie poprawnie stosować, i nie ma kłopotów z jej formalnym zapisem.

---

[30] Tak np. Kwapiński, *op. cit.*, s. 112 podaje definicję funkcji zdaniowej jako wyrażenia zawierającego zmienne. Rozumiem problemy językowe występujące w tym okresie nauczania, tzn. nie pozwalające na precyzyjną i poprawną definicję, ale może lepiej byłoby podać przykłady: (1) x jest liczbą naturalną, (2) $p \wedge q \Rightarrow r \vee s$, (3) $p \vee q \Rightarrow$, z komentarzem: wyrażenia (1) i (2) są funkcjami zdaniowymi, wyrażenie (3) nie jest funkcją zdaniową oraz pokazać podstawienia w miejsce zmiennych x, p, r, s, q odpowiednich stałych.