ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
KSZTAŁCENIE POLONISTYCZNE CUDZOZIEMCÓW 7/8, 1996

Anna Dąbrowska, Stanisław Domoradzki

Z DOŚWIADCZEŃ W KSZTAŁCENIU MATEMATYCZNYM SŁUCHACZY SJPC WSP W RZESZOWIE

Zaznaczamy na wstępie, że nie prowadziliśmy odpowiednio przygotowanych metodologicznie badań, których celem byłaby diagnoza przygotowania matematycznego słuchaczy rozpoczynających naukę w Studium i ich wpływ na końcowe wyniki nauczania. Pragniemy jedynie zaprezentować obserwacje i wynikające z nich wnioski, jakie nasunęły się prowadzącym zajęcia z matematyki. Zajęcia prowadzono czterokrotnie z tzw. grupami ekonomicznymi lub politechnicznymi obejmującymi łącznie około 80 osób. Roczny wymiar godzin dydaktycznych z matematyki wynosił 150. Nasi słuchacze rekrutowali się z państw Wspólnoty Niepodległych Państw byłego Związku Radzieckiego (WNP): Kazachstanu, Ukrainy, Rosji, Białorusi. Ich rodzimym, używanym w szkole językiem był rosyjski lub ukraiński.

Nasze obserwacje dotyczą:
– przygotowania merytorycznego słuchaczy,
– programu kształcenia matematycznego w Studium,
– sposobu realizacji tegoż programu w powiązaniu z nauką terminologii i języka matematyki po polsku.

Przeglądając programy nauczania matematyki w szkole średniej u naszych wschodnich sąsiadów[1] i porównując z programem liceum kształcącego profil podstawowy (program minimum) w Polsce widać, że hasłowo niewiele się różnią. W programach wschodnich brak:
– oddzielnych wiadomości dotyczących zagadnień logicznych i teoriomnogościowych,
– kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa.

[1]*Matiematika, Programma dla sriedniej obszczeobrazowatielnoj szkoły, rabotajuszczej po bazisnomu uczebnomu planu,* Moskwa 1991.

Niestety nie dysponujemy analizą porównawczą realizacji tych programów w Polsce. Bazą do obserwacji, wniosków i porównań są jedynie słuchacze SJPC i studenci WSP kierunków ścisłych (matematyki, fizyki, wych. technicznego).

Pierwsza z uwag, jaką zgłaszają wszyscy prowadzący zajęcia w Studium, to fakt każdorazowego dużego zróżnicowania słuchaczy pod względem wiadomości i umiejętności z matematyki z przewagą osób bardzo słabo przygotowanych. Wpłynął na to w sposób oczywisty splot uwarunkowań geograficznych, socjologicznych, rozmaitość ukończonych szkół, uzdolnień, ambicji, chęci i możliwości kandydatów. Niemniej stan taki wymaga daleko posuniętej indywidualizacji nauczania.

Dla wydobycia charakterystycznych elementów w przygotowaniu matematycznym naszych słuchaczy ograniczymy się do obszaru wiedzy wspólnego w programach szkół w Polsce i WNP. Spróbujmy chociaż z grubsza określić i oznaczyć różne poziomy przyswojenia wiedzy matematycznej w zakresie:

1) algorytmicznego ujęcia treści matematycznych,

2) pojęciowego rozumienia matematyki.

Aspekt 1) to wszelkie algorytmy, mechaniczne rachunki, szablonowe i typowe zadania; aspekt 2) to znajomość pojęć i ich własności oraz szerokie ich stosowanie do rozwiązywania zadań i problemów.

W zakresie aspektu 1) – niech A_1, A_2, A_3 stanowią gradację ku górze od:

– wykonywania typowych algorytmów, rachunków, przekształceń z błędami i potknięciami (A_1),

– poprzez poprawne lecz mechaniczne wykonywanie tych operacji (A_2),

– po wykonanie ich z pełnym rozumieniem umożliwiającym korektę przypadkowych błędów (A_3).

W zakresie aspektu 2) – niech poziomy P_1, P_2, P_3 oznaczają:

– znajomość „ze słyszenia" definicji i twierdzeń ale z usterkami (P_1),

– bezbłędną, czysto pamięciową znajomość pojęć i własności (P_2),

– rozumienie pojęć i ich własności umożliwiające stosowanie ich w zadaniach (P_3).

Daje się zauważyć, że poziomy A_3 oraz P_3 łączą operacyjne i pojęciowe treści matematyczne.

Otóż drugą uwagę, jaką zgłaszają wszyscy prowadzący zajęcia to fakt, iż nasi słuchacze prezentują bardziej przygotowanie algorytmiczne niż pojęciowe. Podstawowe w matematyce pytanie „dlaczego?" budzi u naszych słuchaczy niejakie zdziwienie. Odnosi się wrażenie, że nie przywykli do uzasadniania odpowiedzi, analizowania różnych możliwości, zastanawiania się nad przyczyną zaistniałego błędu czy sprzeczności. Kłopoty nie są natury językowej, gdyż dopuszcza się też możliwość uzasadniania odpowiedzi w języku rodzimym słuchacza.

Rokrocznie zdarzają się osoby prezentujące poziomy najniższe (A_1, P_1). Pamiętają oni jakieś algorytmy, reguły, lecz niedokładnie i mylą się już w rachunkach na liczbach rzeczywistych czy wyrażeniach algebraicznych.

Poziomy „wysokie" (A_3, P_3), jakie zaobserwowaliśmy, to znów każdorazowo kilka osób (3–5). Liczniejsza jest grupa typu (A_2, P_2) słuchaczy, którzy bezbłędnie wykonują rachunki i szablonowe zadania, ale gorzej jest z uzasadnianiem sposobów rozwiązania. Najczęstszy przypadek (ok. 60%) to wiedza na poziomie (A_i, P_j), maks. (i, j) = 2.

Przedstawiciel tej grupy umie rozwiązać typowe równanie lub nierówność, rozwiązać proste zadanie geometryczne, jeśli podpowie mu się odpowiednie twierdzenie, mechanicznie policzyć granicę ciągu czy funkcji, czasem – pochodną. Przy czym poziomy (A_2, P_1) są częstsze niż (A_1, P_2) czyli bardziej „algorytmiczna" wiedza jak „pojęciowa".

Podsumowując ocenę przygotowania matematycznego słuchacza rozpoczynającego naukę w Studium można powiedzieć, że w zakresie wspólnych treści programowych jest ona porównywalna z wiedzą naszego absolwenta liceum o profilu podstawowym, który uzyskał na świadectwie maturalnym ocenę dostateczną. Ograniczenie się do zadań typowych, szablonowych, do mechanicznych rachunków, mglista znajomość pojęć i ich własności, ucieczka od wszelkiego objaśniania i dowodzenia to znany i u nas bardzo częsty koniec edukacji matematycznej w szkole średniej.

Chcemy jeszcze zwrócić uwagę na pewną różnicę jakościową zilustrowaną na jednym przykładzie. Weźmy typowe zadanie:

Rozwiązać nierówność:

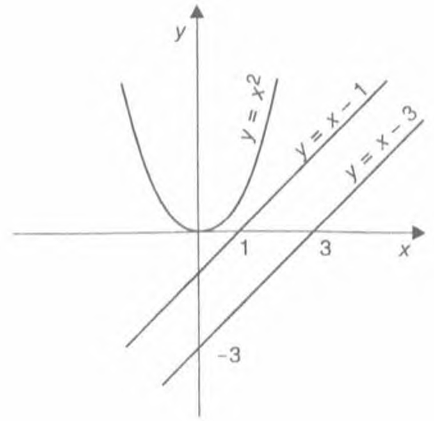
$$\frac{x^2(x-1)}{(x-3)^3} \leqslant 0;$$

i przytoczymy trzy typowe sposoby rozwiązania (przytaczamy wiernie, nawet z błędami)

1a)

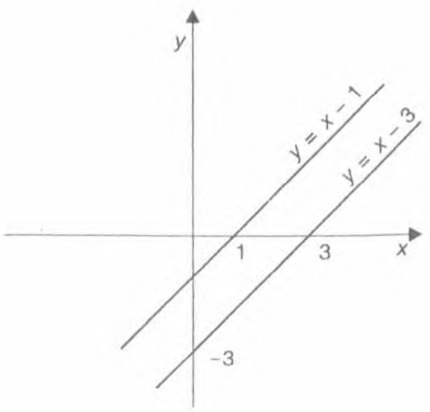
$$\frac{x^2(x-1)}{(x-3)^3} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)}{(x-3)^3} = 0 \vee \frac{x^2(x-1)}{(x-3)^3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \lor x = 1 \lor x \in (1,3) \Leftrightarrow x \in \{0\} \lor \langle 1;3)$$



Rozwiązanie ucznia z Polski, liceum ogólnokształcące, profil mat.-fiz.

1b)



$-\infty$		0		1		3	$+\infty$
x^2	+	0	+	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	0	+	+	+
$(x-3)^3$	−	−	−	−	−	0	+
$f(x)$	+	0	+	0	−		+

$$\frac{x^2\,(x-1)}{(x-3)^3} \leqslant 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x \in \langle 1;\ 3)$$

Rozwiązanie ucznia z Polski, technikum.

2)

$$\frac{x^2\,(x-1)}{(x-3)^3} \leqslant 0, \qquad \begin{array}{cccccccc} + & & + & & - & & + & x \\ \hline & 0 & & 1 & & 3 & & \to \end{array}$$

$$x \neq 3$$

$$x = -1,\ \frac{1(-1-1)}{(-1-3)^3}\begin{smallmatrix}-\\-\end{smallmatrix} > 0$$

$$x = 0{,}5,\ \frac{\frac{1}{4}\,(0{,}5-1)}{(0{,}5-3)^3}\begin{smallmatrix}-\\-\end{smallmatrix} > 0$$

$$x = 1{,}5,\ \frac{(1{,}5)^2\,(1{,}5-1)}{(1{,}5-3)^3}\begin{smallmatrix}+\\-\end{smallmatrix} < 0$$

$$x = 4,\ \frac{16(4-1)}{(4-3)^3}\begin{smallmatrix}+\\+\end{smallmatrix} > 0$$

Odp. $x \in [1;\ 3)$.
Rozwiązanie początkującego słuchacza Studium z Ukrainy.

Wykresy funkcji liniowych i kwadratowej w odpowiedziach 1a), 1b) wskazują, że uczeń odczytuje tu znak odpowiedniej funkcji w przedziale „całościowo" patrząc na wykres. W odpowiedzi 2) znak funkcji wymiernej po lewej stronie nierówności ustalony jest poprzez wyliczanie wartości dla konkretnej liczby wybranej z danego przedziału.

Niestety żaden ze studentów Studium posługujący się tą metodą nie wiedział, dlaczego wystarczy wybrać jedną liczbę w przedziale między miejscami zerowymi i znak wartości funkcji dla wybranej liczby określi już znak w całym przedziale. Odpowiednia własność funkcji ciągłej na przedziale była nieznana lub zapomniana.

Obie metody: 1) i 2) mają swoje zalety. Metoda 1) rozwija logiczne myślenie, utrwala własności działań arytmetycznych i własności funkcji liniowej i kwadratowej. Zaletą metody 2) jest właśnie to, że zwalnia od myślenia i zadanie sprowadza do prostego rachunku. Lecz może skutkiem tej bezmyślności jest błąd w 2) i pominięcie liczby $x = 0$ w rozwiązaniu.

Niezależnie od omawianego przykładu, stosowanie rachunków na liczbach, liczenie przybliżeń na kalkulatorach, np. dla znalezienia ewentualnej granicy ciągu, liczenie wielu wartości funkcji celem sporządzenia jej dokładniejszego wykresu, jak w ogóle bardzo staranne prowadzenie notatek, ładne rysunki geometryczne i porządne pisanie na tablicy to również cechy charakterystyczne zaobserwowane u słuchaczy Studium.

Jakie wnioski wypływają z tych wszystkich obserwacji? Podejście rachunkowo-praktyczne warto chyba pielęgnować u naszych słuchaczy grup ekonomicznych i politechnicznych, skoro dalsze ich kształcenie matematyczne pójdzie w kierunku zastosowań matematyki. Jednak, zachowując stosowne proporcje, trzeba przyzwyczajać słuchaczy do analizowania problemów, stawiania pytań, uzasadniania odpowiedzi, trudno bowiem zrezygnować z tego co najistotniejsze w kształceniu matematycznym. Tym bardziej że „zdegenerowany formalizm" i ślizganie się po powierzchni wzorów jest często obserwowanym przypadkiem. Klasyczny przykład rachunku: $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ jest teraz tylko zastąpiony liczeniem pochodnej: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ itp.

Wydaje się zatem, że podstawowy cel merytoryczny, jakim jest uzupełnienie wiedzy do pensum, obowiązującego w programie polskiej szkoły średniej, powinien być poszerzony o ukierunkowanie już posiadanej wiedzy ku pojęciowemu rozumieniu treści matematycznych przy równoczesnym utrwalaniu algorytmicznego i szerzej, operatywnego podejścia w matematyce. Treści programowe, ich uszczegółowienie i kolejność mogłyby zostać indywidualnie uzgodnione np. w oparciu o prezentowane w skrypcie[2].

Są one następujące:

I. POJĘCIA WSTĘPNE
   1. Cyfry, liczby naturalne i całkowite.
   2. Działania arytmetyczne.
   3. Figury geometryczne.
   4. Ułamki zwyczajne i dziesiętne. Relacje mniejszości i większości.
   5. Liczby parzyste, nieparzyste, wymierne, niewymierne i rzeczywiste.

II. DZIAŁANIA NA WYRAŻENIACH ALGEBRAICZNYCH
   1. Potęga o wykładniku naturalnym, całkowitym, ułamkowym.
   2. Wielomiany. Wzory skróconego mnożenia.

III. ZBIORY, ELEMENTY LOGIKI
   1. Zbiory liczbowe. Przedziały liczbowe.
   2. Suma, różnica, iloczyn zbiorów.
   3. Relacje między zbiorami.
   4. Zdanie w logice.
   5. Negacja, koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność zdań.
   6. Podstawowe prawa logiczne. Metoda zero-jedynkowa.
   7. Funkcja zdaniowa. Kwantyfikatory.

IV. FUNKCJE ELEMENTARNE
   1. Pojęcia wstępne.
   2. Pojęcie i własności funkcji jednej zmiennej.
   3. Wielomiany.

[2] A. Frieske, B. Czernik, *Matematyka, Skrypt dla słuchaczy grup ekonomicznych Studium Języka Polskiego dla Cudzoziemców*, Łódź 1988.

4. Funkcja liniowa.
5. Funkcja kwadratowa.
6. Funkcja homograficzna.
7. Funkcja wymierna.
8. Funkcja potęgowa i funkcja odwrotna.
9. Funkcja wykładnicza.
10. Funkcja logarytmiczna.
11. Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne.
12. Funkcja złożona.

V. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI
1. Określenie równania i nierówności.
2. Rozwiązywanie równań z jedną niewiadomą.
3. Rozwiązywanie równań z wieloma niewiadomymi.
4. Rozwiązywanie nierówności z jedną niewiadomą.
5. Układy nierówności.
6. Równania i nierówności z modułami.
7. Zadania z parametrem.

VI. CIĄGI LICZBOWE
1. Indukcja matematyczna.
2. Ciągi liczbowe.
3. Granica ciągu.
4. Suma nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego.

VII. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY
1. Granica funkcji.
2. Ciągłość funkcji.
3. Pochodna funkcji.
4. Różne interpretacje pochodnej.
5. Ciągłość a różniczkowość.
6. Zastosowanie pochodnych do obliczania granic wyrażeń nieoznaczonych.
7. Badanie monotoniczności funkcji za pomocą pochodnej funkcji.
8. Ekstrema funkcji.
9. Wklęsłość i wypukłość krzywej. Punkt przegięcia krzywej.
10. Asymptoty krzywej.
11. Badanie zmienności funkcji.

VIII. ELEMENTY GEOMETRII ELEMENTARNEJ I ANALITYCZNEJ
1. Iloczyn skalarny wektorów. Wyznacznik pary wektorów. Pole równoległoboku i trójkąta.
2. Linia prosta na płaszczyźnie.
3. Równania i najważniejsze własności okręgu, elipsy, hiperboli i paraboli.

IX. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA
1. Symbol Newtona.
2. Kombinatoryka.
3. Zdarzenia.
4. Prawdopodobieństwo.
5. Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite.
6. Schemat Bernoulliego.
7. Zmienna losowa.

Sposobu realizacji tych zamierzeń merytorycznych nie można oderwać od celu „językowego" kształcenia w Studium, tj. od nauki podstawowej terminologii matematycznej, czy szerzej, języka matematyki po polsku.

Wiadomo, iż rozumienie tekstu matematycznego, mówionego czy pisanego, odbywa się w dwóch warstwach: językowej i matematycznej. Warstwa matematyczna jest wtórna i sama wielowarstwowa. Można bowiem rozumieć tekst tylko formalnie – słowo po słowie, zdanie po zdaniu. Rozumienie może być głębsze, operacyjne, pozwalające daną definicję, wzór czy twierdzenie zastosować. Czy wreszcie może to być rozumienie strukturalne[3]. Rozumienie nigdy nie jest zamknięte, poszerza się wraz z poszerzaniem horyzontów matematycznych uczącego się.

Jeżeli tekst matematyczny po polsku jest czysto werbalny i nie zawiera żadnych elementów uniwersalnego języka sambolicznego, to bez znajomości języka polskiego czytelnik jest zupełnie bezradny, nie rozumie niczego. Sytuacja jest korzystniejsza, gdy spora część tekstu wyrażona jest w języku symbolicznym. Naśladując znane powiedzenie H. Poincarégo, iż „język za matematyka pracuje" moglibyśmy powiedzieć, z pewną dozą humoru, że „symboliczny język matematyki pracuje podwójnie za nauczyciela matematyki w SJPC".

Dokładniej, pracuje w takim stopniu, w jakim nasi słuchacze ten język uniwersalny znają i rozumieją treści matematyczne, jakie on przekazuje. Symbolika literowa, logiczna, klasyczny rysunek geometryczny, grafy, tabele, wykresy, modele materialne – to język, w którym można zakodować całą matematykę. Chociaż tak przesadnego formalizmu nikt w nauczaniu nie stosuje, jest to jednak znakomite narzędzie, „trzeci język" wspomagający naukę matematyki w języku obcym dla ucznia.

Zastanówmy się, jak wykorzystać tego „pomocnika". Wykorzystać można go już w I rozdziale naszego programu poświęconym działaniom na liczbach i wyrażeniach algebraicznych. Rozdział ten jako wstępny, o małym stopniu trudności matematycznych, sprzyja uczeniu podstawowej terminologii po polsku, w skromnym zakresie, jeśli chodzi o używane słownictwo po polsku. Bogactwo wyrażeń symbolicznych zrównoważy bowiem to ubogie słownictwo. Z tych samych względów następny do realizacji mógłby być rozdział V: *Równania i nierówności*, gdzie jest dużo symboli a mało słów i możliwość używania wciąż tych samych zwrotów preferuje ten rozdział do treningu językowego. Jeśli jednak przypomnimy sobie nasz cel merytoryczny – wyprostowanie wiedzy słuchaczy ku rozumieniu pojęciowemu, to pierwszeństwo należałoby się rozdziałowi: *Funkcje elementarne*. Ogólne własności funkcji stanowią bowiem uzasadnienie dla algorytmów, stosowanych w rozwiązywaniu równań i nierówności. Problematyczne jest też miejsce rozdziału: *Elementy logiki*. Z jednej strony powinien być jak najwcześniej, gdyż daje wygodne logiczne i mnogościowe symbole. Przyswojony ze zrozumieniem procentuje w przyszłości, jest tym pomocnikiem, który pracuje częściowo

[3] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, Warszawa 1980.

za matematyka. Każdy, kto uczył tej problematyki, wie jednak, jak jest ona trudna w nauczaniu, nawet bez kłopotów językowych.

Wymienione wyżej trzy rozdziały stanowić by mogły bazę programu i być realizowane w I semestrze. Poza realizacją podstawowego celu merytoryczno-językowego, dawałyby one także powtórkę najlepiej opanowanych w szkole wiadomości, co podnosiłoby wiarę słuchaczy we własne możliwości i dawało motywację do dalszego wysiłku.

W miarę przybywania treści i zwiększania trudności zarówno w przyswajaniu pojęć (np. pojęcia granicy, ciągłości funkcji), jak i w zadaniach, język symboliczny i ubogie słownictwo przestają wystarczać. Rodzi się pytanie: w jakim stopniu dopuszczać używanie przez słuchaczy ich języka rodzimego (rosyjskiego, ukraińskiego)?

Tu zdania naszych wykładowców są podzielone. Zwolennicy opcji „matematyczno-językowej" uważają, że nauka nowego języka to proces długotrwały. Przedział czasowy jednego roku i 150 godzin dydaktycznych to za mało. Jest to jednak wystarczający wymiar do ugruntowania wiedzy matematycznej i poszerzenia jej oraz do nauki tylko podstawowej terminologii po polsku. Dopuszczają więc używanie na zajęciach języka rodzimego słuchacza, stosują podręczniki po rosyjsku i ich wierne przekłady na język polski. Dążą jednak do tego, by treść matematyczna, kiedy zostanie zrozumiana w warstwie merytorycznej, została wypowiedziana (przynajmniej przez prowadzącego) po polsku i tak też zapisana przez studentów.

Trzeba powiedzieć, że słuchacze niechętnie uczą się nowych treści po rosyjsku. Wydaje im się to stratą czasu. Lecz – zdaniem prowadzących – ulegają złudzeniu, iż trudności matematyczne będzie można obejść ucząc się terminologii bądź całych zwrotów po polsku na pamięć, a potem tylko je powtarzać najchętniej w szablonowych i podobnych zadaniach. Często też pozorują trudnościami językowymi kłopoty matematyczne. Tym bardziej należy domagać się, by wykazali się wiedzą matematyczną w języku im bliższym.

Zwolennicy opcji językowo-matematycznej mają priorytety dokładnie odwrotne. Twierdzą, że nauka matematyki to również proces długotrwały i nie ma szansy na powtórzenie i rozszerzenie wiedzy z 10-letniego programu nauki u osoby, która jest słabo przygotowana, zaś dobrze przygotowanemu studentowi szkolna wiedza prawie wystarczy. Natomiast każdego z nich należy wyposażyć w możliwie najszerszą terminologię z otoczką językową, by mógł czuć się pewniej jako przyszły słuchacz wykładów i czytelnik polskich podręczników akademickich. U tych prowadzących zajęcia obniża się raczej próg trudności matematycznych i wolniej, lecz konsekwentnie używa jedynie języka polskiego wspomaganego uniwersalnym symbolicznym językiem.

Niektórzy z prowadzących wybierali tu złoty środek dzieląc tygodniową porcję 5 godzin dydaktycznych na 3 + 2 albo 2 + 3, czyli 3 godziny matematyczno-językowe i 2 godziny językowo-matematyczne albo odwrotnie. Oczywiście proporcje te można zmieniać w zależności od zaawansowania matematycznego i językowego słuchaczy. Skrajne przypadki 5 + 0 to opcja matematyczno-językowa, 0 + 5 – językowo-matematyczna.

Przytoczymy na koniec dosłowną wypowiedź jednego z prowadzących zajęcia na temat formy zajęć:

„Pamiętam pierwsze zajęcia, kiedy chciałem bardzo pomagać swoim studentom, czyniłem to w dobrej intencji. Okazuje się, że szybka i duża pomoc w istocie działa przeciwko osobie uczącego się. Pokazujemy mu tylko wiedzę i to, że nie potrafi on sam czegoś zrobić i że należy to zrobić szybciej, inaczej. Jednak każdy człowiek może być w pełni aktywny, gdy działa z poczuciem bezpieczeństwa, gdy ma poczucie sensu tego, co robi i gdy doświadcza powiązania między własnym wysiłkiem wkładanym w działanie a uzyskiwanym efektem.

Kiedy nasz słuchacz podejmuje rozwiązanie jakiegoś zadania, to zwracam uwagę, ile ma czasu na jego wykonanie, czy ma dostęp do różnych pomocy dydaktycznych, mogących pomóc w jego rozwiązaniu (siatki brył, słownik, tablice matematyczne itp.; potrzeba takich pomocy dydaktycznych to w ogóle osobne zagadnienie, o którym należy dyskutować).

Nie chcę, aby słuchacz używał swojej wiedzy do chronienia siebie (tzn. nie chcę go oceniać, sprawdzać, porównywać), ale żeby jego wiedza użyta była do swobodnego, twórczego myślenia, rozważania możliwych rozwiązań. Umawiam się ze słuchaczami, że mówimy tylko w języku polskim, chociaż niekiedy bywa on bardzo ubogi, zredukowany nawet do pojedynczych słów”.