ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 193, 2005

*Wojciech Zatoń**

NIEDETERMINISTYCZNE METODY OPTYMALIZACJI PORTFELA INWESTYCYJNEGO

Streszczenie. Celem artykułu jest zwrócenie uwagi na problemy optymalizacji portfela inwestycyjnego, podejmowanej w warunkach niepewności i/lub formułowania ograniczeń z użyciem warunków logicznych. Pokazano użyteczność metod optymalizacji stochastycznej i/lub algorytmów ewolucyjnych we wskazanych sytuacjach. Rozważania teoretyczne zilustrowano przykładami empirycznymi dotyczącymi polskiego rynku papierów wartościowych.

Słowa kluczowe: portfel inwestycyjny, optymalizacja deterministyczna, optymalizacja stochastyczna, algorytmy ewolucyjne.

1. WSTĘP

Dla potrzeb optymalizacji portfela inwestycyjnego najczęściej stosowane są programy wykorzystujące numeryczne (deterministyczne) algorytmy (np. *Solver* w Excelu realizuje poszukiwanie ekstremum funkcji według algorytmu GRG – uogólnionej metody zredukowanych gradientów; por. np.: Fylstra, Lasdon, Watson i Waren 1998; Lasdon, Waren, Jain i Ratner 1978). Dla wielu rodzajów problemów optymalizacyjnych algorytmy numeryczne są narzędziem wystarczająco efektywnym. Jednak ich stosowanie nie gwarantuje znalezienia optimum globalnego. Ponadto mogą wystąpić trudności ze znalezieniem rozwiązania, gdy „optymalizowana" funkcja nie jest gładka. W takich sytuacjach warto sięgnąć np. po algorytmy genetyczne lub ewolucyjne. Dopuszczają one dowolną postać optymalizowanej funkcji i ograniczeń, jednak z drugiej strony wymagają subiektywnej decyzji użytkownika co do momentu zakończenia procesu optymalizacji.

Zupełnie odrębną kwestią jest potraktowanie problemu optymalizacji portfela jako optymalizacji stochastycznej. Oznacza to, że oczekiwane stopy zwrotu z poszczególnych inwestycji są określone poprzez pewne rozkłady

* Dr, adiunkt w Katedrze Ekonometrii Uniwersytetu Łódzkiego.

(niekoniecznie normalne). Funkcję kryterium takiego problemu może stanowić wówczas wybrany parametr rozkładu stopy zwrotu z portfela (oprócz średniej lub odchylenia standardowego może to być też np. odpowiedni percentyl). Rozwiązywanie takich problemów jest dość skomplikowane i czasochłonne, ale spektrum uzyskanych informacji jest bogatsze w porównaniu z wynikami optymalizacji deterministycznej.

W artykule pokazano zastosowanie algorytmu ewolucyjnego dla problemu optymalizacji portfela z warunkami logicznymi oraz przykład ilustrujący zastosowanie optymalizacji stochastycznej portfela inwestycyjnego.

2. WYKORZYSTANIE ALGORYTMU EWOLUCYJNEGO DO OPTYMALIZACJI PORTFELA

Przedstawiony problem optymalizacyjny ma na celu wyznaczenie takiego składu portfela inwestycyjnego, który zapewni maksymalną częstość uzyskiwania stopy zwrotu wyższej niż stopa zwrotu z portfela odniesienia (w tym przypadku z indeksu WIG20).

Sformułowanie problemu:

$$\max_x \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} z_t(\mathbf{x}), \tag{1}$$

przy warunkach:

$$z_t(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \sum_{i=1}^{k} x_i r_{it} > rWIG20_t \\ 0, & \text{gdy } \sum_{i=1}^{k} x_i r_{it} \leqslant rWIG20_t \end{cases}, \tag{2}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1, \tag{4}$$

gdzie:

x_i – udział i-tej spółki w portfelu (element wektora x);

r_{it} – stopa zwrotu z i-tej spółki w okresie t;

$rWIG20_t$ – stopa zwrotu z indeksu WIG20 w okresie t.

Do rozwiązania tak sformułowanego problemu, w pierwszym etapie prac, użyto algorytmu GRG z dodatku *Solver* do Excela. Niewiarygodność otrzymywanych wyników potwierdziła wspomniane we wstępie trudności obliczeniowe, związane z tym algorytmem, wynikające z zastosowania warunku (2). Niezbędne zatem okazało się użycie innego algorytmu, w tym przypadku jednego z algorytmów ewolucyjnych, zaimplementowanego w programie *Evolutionary Solver* (por. *User Guide*... 2000).

Algorytmy genetyczne i uogólniające ich ideę programy ewolucyjne stanowią obszerną klasę niedeterministycznych metod optymalizacyjnych (por. np. Michalewicz 1999). Ogólny schemat rozwiązywania zadań tymi algorytmami jest następujący:

a) w każdej iteracji t generowana jest w sposób losowy populacja osobników, z których każdy przedstawia możliwe rozwiązanie rozpatrywanego zadania;

b) każde rozwiązanie jest oceniane na podstawie pewnej miary „dopasowania" (jakości);

c) w iteracji $t+1$ tworzona jest nowa populacja przez selekcję osobników najlepiej dopasowanych i eliminację osobników najgorzej dopasowanych;

d) część osobników nowej populacji ulega zmianie przez tzw. mutację i krzyżowanie.

Stosowanie algorytmów ewolucyjnych do rozwiązywania problemów optymalizacji zwiększa szansę znalezienia optimum globalnego, nie wymaga gładkości funkcji kryterium i ograniczeń. Jednak wykorzystywanie w tych metodach probabilistycznych reguł wyboru i przeglądanie zbiorów potencjalnych rozwiązań wydłuża czas ich działania oraz wymaga subiektywnej decyzji użytkownika o zakończeniu procesu optymalizacji.

Do wyznaczenia rozwiązania optymalnego problemu opisanego wzorami (1)–(4) wykorzystano dane z Warszawskiej Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Były to dzienne stopy zwrotu z okresu od 2 stycznia 2001 r. do 28 czerwca 2002 r. (373 obserwacje), dla 15 spółek wchodzących stale w skład indeksu WIG20 w tym okresie. Założono następujące parametry dla działania programu obliczeniowego: wielkość populacji – 70, prawdopodobieństwo mutacji – 0,1, czas obliczeń – 30 minut. Następnie, dla okresu od 1 lipca 2002 r. do 30 kwietnia 2003 r., zbadano jakość wyznaczonego portfela, porównując uzyskiwane z niego stopy zwrotu ze stopami zwrotu indeksu WIG20. Wyniki badań empirycznych zawiera tabela 1. Pokazują one, iż w pierwszym okresie wyznaczony portfel okazał się lepszy od indeksu WIG20 w ponad 65% przypadków, w okresie drugim było to niewiele gorzej (57,3%). Warto zauważyć, że w obu okresach parametry portfela (wartość średnia i odchylenie standardowe stopy zwrotu) były wyraźnie lepsze od parametrów portfela reprezentowanego przez WIG20.

Poszukiwanie portfeli lepszych od WIG20, ale z wykorzystaniem spółek wchodzących w skład tego indeksu nie jest przypadkowe. Może ono bowiem prowadzić do wyznaczenia efektywnych strategii inwestycyjnych, polegających na kupnie, w odpowiednich proporcjach, akcji spółek wchodzących jednocześnie w skład portfela „lepszego" od WIG20 i portfela WIG20 oraz sprzedaży kontraktów terminowych na indeks WIG20. Można wówczas liczyć, że w przypadku wzrostu wartości indeksu, zyski z zakupionych akcji z nawiązką zrekompensują straty na kontraktach. Analogicznie w przypadku spadku wartości indeksu, zyski z krótkich pozycji na kontraktach powinny przewyższyć straty z akcji. Oczywiście taka strategia jest też obarczona ryzykiem i wymaga przeprowadzenia wielu prób w celu wyznaczenia portfela optymalnego (por. Zatoń 2002), tak aby maksymalizować prawdopodobieństwo, że portfel, który w przeszłości był lepszy od indeksu, będzie taki w przyszłości.

Tabela 1. Charakterystyka portfela maksymalizującego częstość pokonania indeksu WIG20

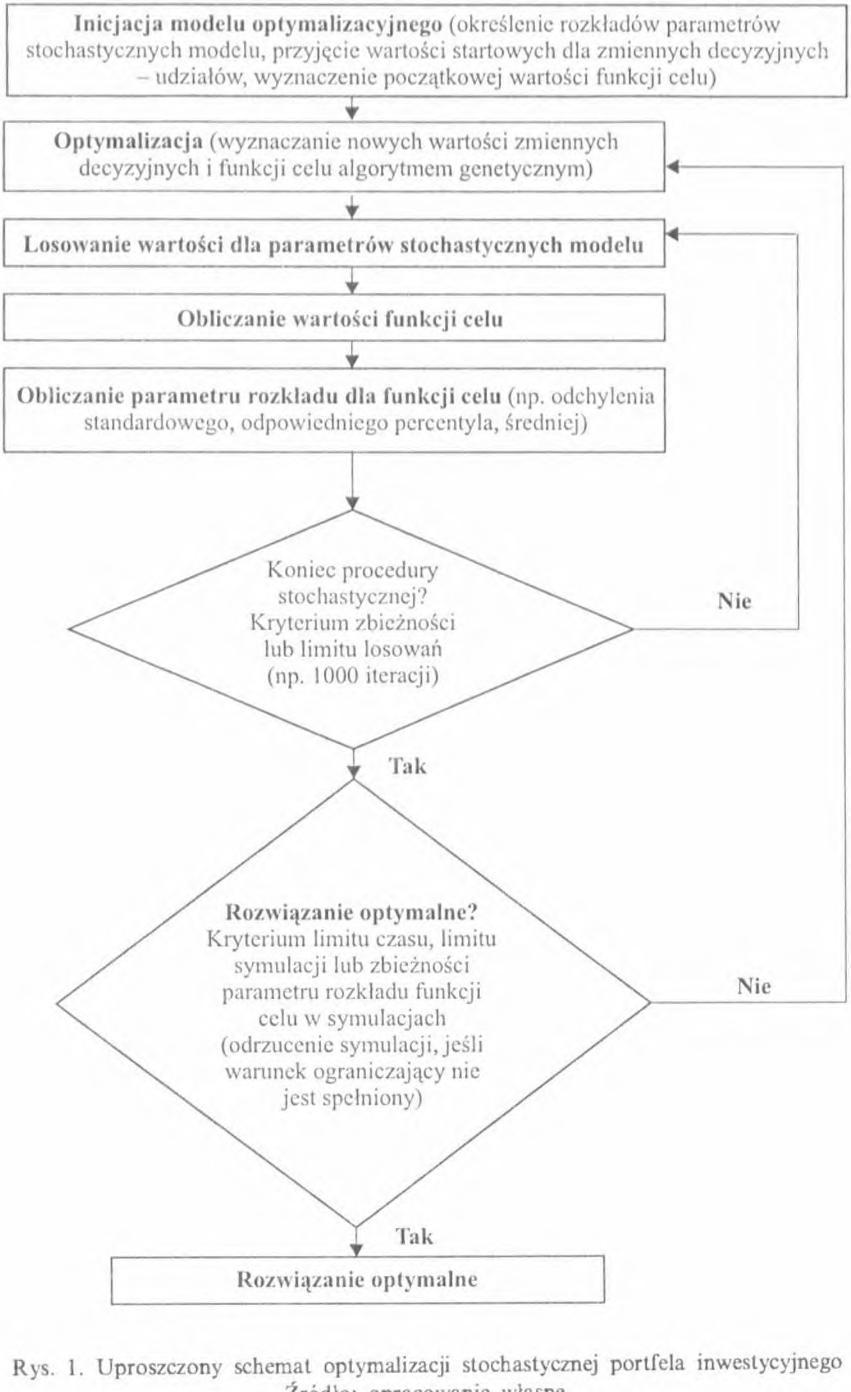
Spółka	Udział w portfelu	Parametry		
Agora	0,105797	Okres optymalizacji portfela 2.01.2001–28.06.2002 (373 obserwacje)		
BRE	0,000400		Portfel	WIG20
BPH – PBK	0,000565	Średnia stopa zwrotu w %	0,041	-0,092
BZWBK	0,196386	Odchylenie standardowe w %	1,483	1,736
Comarch	0,000709	Maksymalna częstość	0,652	
Computerland	0,000654			
Kęty	0,053777			
KGHM	0,016759	Okres testowania portfela 1.07.2002–30.04.2003 (209 obserwacji)		
Orbis	0,000101		Portfel	WIG20
PEKAO	0,210796	Średnia stopa zwrotu w %	0,053	-0,032
PKNORLEN	0,100307	Odchylenie standardowe w %	1,285	1,469
PROKOM	0,000396	Obliczona częstość	0,573	
Softbank	0,011933			
Świecie	0,220438			
TPSA	0,080982			

Źródło: obliczenia własne.

3. PRZYKŁAD OPTYMALIZACJI STOCHASTYCZNEJ PORTFELA

Do modelowania zjawisk w warunkach niepewności często wykorzystuje się metody symulacji stochastycznej (np. symulacje Monte Carlo). W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele przykładów zastosowań symulacji stochastycznej w modelach finansowych (por. np. Winston 1999). W odniesieniu do portfeli inwestycyjnych, symulacje Monte Carlo są używane np. do wyznaczenia wartości narażonej na ryzyko (*Value-at-Risk*) (por. np. Jajuga, Kuziak i Papla 2000). Warto jednak zwrócić uwagę, że w takich przypadkach portfele mają już ustaloną strukturę, wyznaczoną w sposób arbitralny lub w wyniku optymalizacji deterministycznej. Zastosowanie optymalizacji stochastycznej prowadzi do wyznaczenia optymalnej struktury portfela dla określonej funkcji kryterium (np. minimalizacji lub maksymalizacji wybranego parametru rozkładu stopy zwrotu z portfela) i warunków ograniczających. Uproszczony schemat optymalizacji stochastycznej (realizowanej przez program *RiskOptimizer* wersja 1.0), wykorzystanej do optymalizacji portfela inwestycyjnego, przedstawia rysunek 1.

Na procedurę optymalizacji stochastycznej składają się dwie pętle. Mniejsza pętla iteracyjna związana jest z losowaniami wartości parametrów stochastycznych modelu (rozkładów stóp zwrotu dla poszczególnych akcji). Na podstawie wyników kolejnych losowań obliczana jest wartość funkcji celu (np. wybrany parametr rozkładu stopy zwrotu z portfela). Zakończenie tego procesu iteracyjnego uwarunkowane jest osiągnięciem zbieżności dla funkcji celu (średnia wartość funkcji celu obliczona na podstawie np. 100 ostatnich losowań tylko w bardzo małym stopniu różni się od średniej wartości z poprzednich 100 losowań) lub osiągnięciem wyznaczonego przez użytkownika limitu ilości iteracji. Otrzymana wartość funkcji celu, będąca średnią z wartości obliczonych we wszystkich iteracjach (pojedynczej symulacji), stanowi podstawę do optymalizacji w dużej pętli i wyznaczenia nowych wartości zmiennych decyzyjnych (udziałów poszczególnych akcji w portfelu). Zakończenie całej procedury jest oparte na zasadach podobnych do zakończenia pętli iteracyjnej. Dodatkowym kryterium może być jeszcze czas trwania obliczeń.



Rys. 1. Uproszczony schemat optymalizacji stochastycznej portfela inwestycyjnego
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2 przedstawia wyniki przeprowadzonych optymalizacji stochastycznych portfela inwestycyjnego. Przykładowo wybrano akcje pięciu spółek z różnych branż, a analizę oparto na danych dziennych z lat 2001–2002. Przyjęto, że stopy zwrotu z akcji tych spółek były określone przez rozkłady normalne (parametry tych rozkładów oszacowano na podstawie próby).

Procedurą optymalizacji stochastycznej wyznaczono trzy portfele:

a) portfel o minimalnym odchyleniu standardowym – Min S;

b) portfel maksymalizujący wartość piątego percentyla – Max Perc(0,05);

c) portfel maksymalizujący wartość dwudziestego percentyla – Max Perc(0,2).

Tabela 2. Charakterystyka portfeli uzyskanych w optymalizacji stochastycznej

Wyszczególnienie	Dane dzienne z okresu 2001–2002		Portfele optymalne R(portfela) > = 0,05, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{k} x_i = 1$,			
spółka	stopa zwrotu R w (%)	odchylenie standardowe S w (%)	skład portfela	min S	max Perc(0,05)	max Perc(0,2)
Computerland	-0,018	2,404	Computerland	0	0,025	0
Kęty	0,040	1,477	Kęty	0,504	0,497	0,506
PEKAO	0,104	2,064	PEKAO	0,204	0,235	0,327
PKNORLEN	-0,029	1,969	PKNORLEN	0,128	0,097	0,127
Świecie	0,135	2,345	Świecie	0,164	0,146	0,040
Założono normalność rozkładów stóp zwrotu z powyższych akcji (przyjęto wartości R i S podane powyżej)			R(portfela)	0,059	0,059	0,056
			S(portfela)	1,129	1,147	1,191
			Perc(0,05)	-1,807	-1,693	-1,762
			Perc(0,2)	-0,989	-0,953	-0,872

Źródło: obliczenia własne.

W każdym przypadku spełnione musiały być klasyczne warunki nieujemności udziałów poszczególnych spółek w portfelu i sumowanie się tych udziałów do jedności. Ponadto żądano, aby stopa zwrotu z portfela była nie mniejsza niż 0,05%. W procesie obliczeniowym, przeprowadzonym w programie *RiskOptimizer* wersja 1.0, wykonano 2000 symulacji (po 5000 iteracji każda).

Warto zwrócić uwagę, że składy optymalnych portfeli okazały się stosunkowo zróżnicowane, mimo że typ funkcji kryterium był w każdym przypadku podobny (minimalizacja ryzyka). Maksymalizacja wartości wybranego percentyla odpowiada bowiem minimalizacji wartości narażonej na ryzyko.

Przeprowadzając optymalizację stochastyczną portfela, zakładamy, że oczekiwane stopy zwrotu z poszczególnych inwestycji są określone poprzez pewne rozkłady (niekoniecznie normalne). Optymalizacja stochastyczna jest szczególnie cenna, w sytuacji gdy założenie o normalności rozkładów stóp zwrotu z akcji nie jest spełnione i np. zastosowanie podejścia wykorzystującego macierz wariancji – kowariancji do wyznaczenia wartości narażonej na ryzyko jest utrudnione (por. np. Jajuga, Kuziak i Papla 2000; Butler 2001). Może to mieć znaczenie przede wszystkim dla budowy portfeli krótkookresowych w sytuacji określonych trendów na rynku akcji, kiedy z dużym prawdopodobieństwem możemy spodziewać się, że oczekiwana stopa zwrotu będzie charakteryzować się asymetrycznym rozkładem.

4. ZAKOŃCZENIE

Podane przykłady optymalizacji portfeli inwestycyjnych wskazują na przydatność metod niedeterministycznych. W niektórych przypadkach metody te mogą być alternatywą w stosunku do metod deterministycznych, w innych zaś ich zastosowanie jest wręcz konieczne dla rozwiązania problemu optymalizacyjnego. Zastosowanie metod niedeterministycznych stwarza możliwości znalezienia rozwiązań złożonych problemów optymalizacyjnych uwzględniających np. rozbudowane warunki ograniczające i funkcje celu, rozkłady stóp zwrotu inne niż normalne.

LITERATURA

Butler C. (2001), *Tajniki Value at Risk*, tłum. T. Doligalski, K. E. Liber, Warszawa.

Fylstra D., Lasdon L., Watson J., Waren A. (1998), *Design and Use of the Microsoft Excel Solver*, „Interface", **28**(5), 29–55.

Jajuga K., Kuziak K., Papla D. (2000), *Ryzyko rynkowe polskiego rynku akcji – Value at Risk i inne metody pomiaru*, [w:] Tarczyński W. (red.), *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.

Lasdon L., Waren A., Jain A., Ratner M. (1978), *Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming*, „ACM Transaction on Mathematical Software", **4**(1), 34–50.

Michalewicz Z. (1999), *Algorytmy genetyczne* + struktury danych = programy ewolucyjne, WNT, Warszawa.

User Guide for Premium Solver Platform Version 3.5 (2000), Frontline Systems.

Winston W. (1999), *Financial Models Using Simulation and Optimization*, Palisade Corporation, New York.
Zatoń W. (2002), *Portfel oparty na indeksie WIG20 a portfele efektywne*, [w:] *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu", **952**.

Wojciech Zatoń

NON-DETERMINISTIC METHODS IN PORTFOLIO OPTIMIZATION

Summary

The aim of this paper is to point out the problems concerning portfolio optimization under uncertainty and/or including boolean-type constraints. Usefulness of stochastic optimization methods and/or evolutionary algorithms is emphasized in these cases. Theoretical considerations are supported by empirical results from the Polish stock market.