ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 193, 2005

*Maciej Malaczewski**

STABILNOŚĆ W PROCESACH EKONOMICZNYCH

Streszczenie. Stabilność to zjawisko mające wpływ na modelowanie ekonomiczne. W artykule przedstawiony jest ów problem, podane są jego przyczyny oraz skutki. Artykuł zawiera też przykład analizy stabilności.

Słowa kluczowe: modelowanie ekonomiczne, stabilność.

1. WSTĘP. PROBLEM STABILNOŚCI ROZWIĄZAŃ UKŁADÓW RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Modelowanie z wykorzystaniem równań różniczkowych od niepamiętnych lat wykorzystywane jest do opisu zjawisk pochodzących z przeróżnych dziedzin nauki. Klasycznym przykładem jest oczywiście fizyka, gdzie na równaniach różniczkowych oparte są chociażby równania ruchu ciała. Oczywiście nie jest to jedyny przykład. Szeroko znane są zastosowania chemiczne, techniczne, a także, co jest raczej odkryciem stosunkowo młodym, zastosowania w naukach społecznych. Problem z owym modelowaniem pojawia się nie tylko w momencie konstruowania równań, przy uważnym doborze zmiennych objaśniających, nie tylko w fazie ich rozwiązywania, co często jest niemożliwe analitycznie, a niejednokrotnie też i numerycznie, ale też podczas odpowiedniego ich „zaczepienia" w przestrzeni, wybraniu tej spośród funkcji spełniających nasze równania, która przechodzi przez ściśle określony punkt w przestrzeni zwany **warunkami początkowymi**.

Meteorolog i matematyk amerykański E. N. Lorenz dokonał w roku 1963 prognozy pogody na najbliższy miesiąc, wykorzystując dwa zestawy zmiennych wejściowych, z czego drugi z nich różnił się od pierwszego jedynie minimalnie. Wyniki, które otrzymano, były tak odmienne, iż w pierwszej chwili nastąpiła wątpliwość co do stanu technicznego maszyny, za pomocą której wykonano obliczenia (Lorenz 1963). Późniejsze badania

* Mgr, asystent w Katedrze Ekonometrii Uniwersytetu Łódzkiego. Autor wyraża serdeczną wdzięczność kierownikowi Katedry Ekonometrii UŁ profesorowi Władysławowi Milo za cenną pomoc w trakcie powstawania niniejszego artykułu.

dowiodły, iż odpowiedzialny za taki stan rzeczy jest układ czynników będących składnikami prognozy pogody. To właśnie wtedy, ze względu na wrażliwość układu na minimalne zmiany warunków początkowych, Lorenz stworzył słynne do dziś powiedzenie o „efekcie motyla", mianowicie, że „ruch skrzydeł motyla w Tokio może wywołać burzę śnieżną w Nowym Yorku". Odniesienie to jest może zabawne, skala zjawiska jest jednak jak najbardziej zachowana. Do dnia dzisiejszego za w miarę wiarygodne uznaje się jedynie prognozy pogody tworzone z dnia na dzień.

Problem ów nie był jednak problemem specyficznym jedynie dla pogody. Wcześniejsze badania, pochodzące jeszcze z końca XIX w. i początku XX w., a dotyczące **stabilności rozwiązań układów równań różniczkowych zwyczajnych** podejmowane były, przede wszystkim przez Lapunowa (1893) i Poincaire'ego (por. Stewart 1994). Rozważania, które prowadził ten pierwszy, doprowadziły do sformułowania definicji stabilności równania. Nie przytaczając jej, stwierdzić możemy, iż zasadnicza jej treść brzmi w sposób następujący: rozwiązanie układu równań różniczkowych możemy nazwać stabilnym, jeżeli przy minimalnej zmianie warunków początkowych odległość pomiędzy obiema funkcjami nie będzie przekraczać pewnego, zależnego od wartości zmiany warunków początkowych, poziomu.

Rozwiązanie zatem jest stabilne, jeżeli mamy gwarancje, że nasza drobna „pomyłka" w określeniu warunków początkowych nie wpłynie w znaczący sposób na dalszy przebieg funkcji. Jakie znaczenie ma powyższa definicja w jej najprostszym rozumieniu? Wyobraźmy sobie idealnie okrągłą kulkę, która znajduje się na szczycie niewielkiego wzniesienia (Milo 1995). Załóżmy, że jest ona w stanie spoczynku. Bez jakiejkolwiek ingerencji z zewnątrz nie zmieni swojego położenia. Wyobraźmy sobie jednak, iż jej rzeczywiste położenie różni się o zaledwie jeden centymetr. Kulka taka, znajdując się pod wpływem naturalnej siły ciężkości, potoczy się wzdłuż zbocza w dół, aby zakończyć swój ruch w pewnej odległości od zbocza.

W przyjętym przez nas nazewnictwie, kulka ta stanowi **układ niestabilny**, mała zmiana warunków początkowych (położenie kulki) znacząco wpływa na jej położenie po pewnym, załóżmy że nieskończonym (choć oczywiście nie potrzebujemy czekać tak długo na sformułowanie powyższego wniosku) czasie. Niewielkie przesunięcie spowodowało diametralną zmianę sytuacji.

Oczywiście nie wyklucza się też rozważania stabilności układu ze względu na działanie czynników zewnętrznych. Lekkie trącenie kulki leżącej na szczycie także spowodować może jej szybkie przemieszczenie się, chwilowo jednak zajmijmy się jedynie rozważaniami dotyczącymi problemu warunków początkowych.

Powyższy przykład uzmysławia czytelnikowi dość dobrze problem dobrego umiejscowienia warunków początkowych w przypadku układu niestabilnego oraz związane z nim konsekwencje.

2. STABILNOŚĆ ROZWIĄZAŃ A MODELOWANIE EKONOMICZNE

Wyobraźmy sobie teraz układ ekonomiczny charakteryzujący się niestabilnością. Stwórzmy solidny model opisujący jego ruch. Niech każde równanie będzie jak najbliższe rzeczywistości, wszystkie zmienne istotne statystycznie i ekonomicznie, niech model daje wspaniałe wprost wyniki w analizie błędów *ex post*. Czy można za pomocą takiego modelu udanie prognozować zachowanie się układu?

Zauważmy wrażliwość na warunki początkowe (por. Chądzyński 1994; Pelczar i Szarski 1987; Pelczar 1989). Jak dobrze wiemy, wartości zmiennych ekonomicznych nie pochodzą z powtarzalnych, kontrolowanych eksperymentów (por. Goldberger 1972; Chow 1983), jedynie z obserwacji rzeczywistości, z badań struktury statystycznej zjawiska w przeszłości. Badania te obarczone są pewnym błędem (por. Ostasiewicz, Rusnak i Siedlecka 1999; Zeliaś 2000; Greń 1987), wynika on z kilku obiektywnych przyczyn:

a) każde badanie statystyczne obciążone jest błędem wynikającym z możliwości wylosowania niereprezentatywnej próby; z reguły próbuje się temu zapobiec za pomocą metod reprezentacyjnych;

b) zmienne ekonomiczne w wielu publikacjach wielokrotnie się zaokrągla, z reguły do pełnych tysięcy, milionów, miliardów itp.;

c) zmienne te z reguły mają ograniczoną dziedzinę, bądź tylko do liczb dodatnich, bądź do naturalnych, bądź z pewną dokładnością, np. do jednego grosza;

d) wielokrotnie występować może niejednorodność danych, wynikająca ze zmiany definicji ekonomicznej, charakteru zjawiska i innych.

Czynniki te powodują, iż wielokrotnie ekonomiści i ekonometrycy stają przed problemem niskiej jakości danych. To z kolei sprawić może, iż wrażliwość modelu na warunki początkowe stanie się problemem nie do obejścia, albowiem, mając w pamięci „efekt motyla", wyobrazić sobie możemy, co się stanie, jeżeli tylko, np. zaokrąglimy jakąś kwotę do pełnego złotego. Tym bardziej że w przeciętnym, już nie kilku, lecz kilkudziesięcio lub kilkuset równaniowym modelu podobnych zaokrągleń możemy mieć co najmniej kilkanaście. Te zaokrąglenia, dokonywane wielokrotnie, dają coraz większą odległość (w sensie metrycznym – por. Kuratowski 1965) punktu, który przyjmujemy za warunki początkowe od punktu występującego w rzeczywistości. „Efekt motyla" zaczyna działać, niestabilny układ ekonomiczny generuje odpowiedź na podane dane wejściowe. Z powodu jego niestabilności, odpowiedź ta (znów w sensie metryczno-topologicznym) jest odległa od rzeczywistości, od punktu atrakcyjnego naszego układu. Konsekwencje stają się oczywiste – prognozy są obciążone, na dodatek błędem, którego oszacować, nawet w przybliżeniu, się nie da. Prognostycy popełniają omyłki, które mogą mieć katastrofalne znaczenie dla gospodarki. Podejmowanie decyzji w oparciu o taki model prowadzić może do tragedii.

Powyższe rozważania prowadzą do oczywistego wniosku – konieczne jest dokonanie zbadania zbudowanego modelu pod kątem stabilności (w tym wrażliwości na warunki początkowe), zanim zostanie dokonane jego rozwiązanie oraz ekstrapolacja trajektorii podmiotu ekonomicznego w przyszłość.

3. METODY BADANIA STABILNOŚCI

Matematyka już dawno dokonała odpowiedniego sformalizowania pojęć oraz metod badania stabilności rozwiązań układów równań różniczkowych zwyczajnych. Spróbujmy prześledzić rozumowanie matematyków, kierując się zdrowym rozsądkiem oraz intuicją badaczy zjawisk ekonomicznych.

Stabilność rozwiązań, w sensie małej odległości funkcji przy małej zmianie warunków początkowych, świadczy o tym, iż modelowane zjawisko nie jest „wybuchowe" oraz że w nieskończoności ma skończoną granicę (jest to oczywiste – w przeciwnym razie odległość pomiędzy poszczególnymi funkcjami mogłaby także być nieskończona). Skończoność granicy ekonomicznie świadczy o tendencji do zwalniania tempa wzrostu zjawiska. Konkretniej, pochodna funkcji dążyć powinna do zera – gwarantuje to istnienie skończonej granicy funkcji w nieskończoności.

Na mocy twierdzenia Taylora o linearyzacji (por. Milo i Zglińska-Pietrzak 1997) rozważania układu nieliniowego zastąpić możemy rozważaniem układu liniowego, a rozważania układu niejednorodnego – układem jednorodnym. To pozwala nam zapisać układ równań w postaci macierzowej:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

Na mocy odpowiednich twierdzeń (por. Chądzyński 1994) rozwiązania takiego układu możemy wyrazić poprzez eksponenty wartości własnych macierzy **C**, jeżeli ta jest macierzą o stałych współczynnikach. Te natomiast gwarantują nam istnienie skończonej granicy w nieskończoności jedynie wtedy, gdy ich części rzeczywiste są ujemne. Stąd w prostej linii dochodzimy do istotnego w naszych analizach twierdzenia (por. Tu 1994; Milo i Zglińska-Pietrzak 1997):

Niech układ równań różniczkowych będzie postaci:

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{f}(t),$$

gdzie t należy do G, a $\mathbf{f}$ jest wektorem funkcji (różniczkowalnych względem t). Punkt $x = \mathbf{f}(t_0)$, będący atraktorem, jest stabilny, jeżeli wszystkie wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ mają ujemne części rzeczywiste, a wszystkie jego wartości własne czysto urojone są wartościami własnymi jednokrotnymi. Jeżeli choć jedna wartość własna nie spełnia tego warunku, to punkt graniczny nie jest atraktorem, tylko niestabilnym punktem równowagi. Zaopatrzeni zatem w stosunkowo ubogi, lecz wystarczający dla nas aparat do badania stabilności, spróbujmy zademonstrować przykład analizy.

4. ANALIZA STABILNOŚCI FUNKCJI PRODUKCJI ORAZ FUNKCJI JEJ CZYNNIKÓW

W procesie modelowania gospodarek narodowych centralną rolę pełni z reguły równanie produkcji krajowej, zwane też często po prostu funkcją produkcji. Jej postaci spotkać można w literaturze mnóstwo (por. Milewski 2001; Hall i Taylor 1995), rozsądne jej modelowanie wymaga jednak uwzględnienia kilku postulatów teorii wzrostu gospodarczego, postulatów, które dziś wydają się bezdyskusyjne. Ich aplikacja nie zawsze należy jednak do najłatwiejszych, względnie najistotniejszych w poszczególnych badaniach.

Pierwszą sprawą wymagającą uwzględnienia jest oczywiście zestaw zmiennych objaśniających. Tu wymienić należałoby wszystkie czynniki produkcji. Dyskusja ich dotycząca toczona była wielokrotnie i to już od czasu Smitha (1954) i Ricarda (1957). Bezdyskusyjną jest oczywiście konieczność uwzględnienia wartości środków trwałych oraz wysokości nakładów pracy. O ile jednak miernik pierwszej z tych wielkości jest ogólnie znany i raczej nie podlega komentarzowi, o tyle rozmaite mierniki drugiego nie odpowiadają podstawowym teoriom. Mierzenie nakładów pracy poprzez liczbę zatrudnionych osób lub liczbę przepracowanych roboczogodzin jest, zdaniem autora, niemiarodajne. Brakuje wciąż jednak dostatecznie dobrego miernika, w związku z czym musimy zadowolić się obecnie stosowanymi.

Rozdział pojęcia kapitału (por. Milo, Bieda, Leszczyk, Miler i Witkowska 2004) na poszczególne składowe powoduje, iż należałoby je wszystkie uwzględnić jako czynniki produkcji w równaniu produkcyjnym. Zarówno kapitał ludzki, czyli szeroko rozumiane kwalifikacje pracowników, jak też i inny: fizyczny, społeczny, finansowy, mają spory wpływ na kształt procesu produkcyjnego. Rozdzielanie ich zmusza badaczy do przyjęcia uznaniowo mierników każdego z nich.

Do innych czynników produkcji pierwsi ekonomiści zaliczali także ziemię. Nawiązując do wielu prac z dziedziny ekonometrii stosowanej (por. Welfe i Welfe 1996), uwzględnić jeszcze musimy materiałochłonność, czyli zużycie materiałowe na jednostkę produkcji, a także, np. współczynnik techniczno-organizacyjny, będące swoistymi miernikami postępu technicznego pod postacią chociażby łącznej produktywności czynników produkcji.

Jak widać, lista czynników produkcji, które należałoby uwzględnić w funkcji produkcji, jest stosunkowo długa. Dla naszych potrzeb skrócimy ją jedynie do najważniejszych.

Oprócz doboru zmiennych jako czynników produkcji, spełniać one muszą pewne założenia. Musi występować malejąca produkcyjność krańcowa względem wszystkich czynników, muszą one wzajemnie dla siebie być substytutami, aczkolwiek niemożliwe jest wyeliminowanie z procesu produkcyjnego któregokolwiek z nich.

Równania, którymi posługiwać się będziemy, mają następującą postać:

$$Y = \beta + \delta \cdot A + \alpha \cdot K + (1-\alpha) \cdot L,$$

$$\dot{K} = I - \lambda \cdot K,$$

$$\dot{L} = \gamma \cdot Y - \kappa \cdot K,$$

$$\dot{A} = \theta \cdot I + \tau \cdot A,$$

gdzie:

K – wartość środków trwałych zaangażowanych w proces produkcyjny;

Y – wartość produkcji;

I – wielkość nakładów inwestycyjnych;

A – miernik postępu technicznego;

L – wielkość nakładów pracy zaangażowana w proces produkcyjny;

s – krańcowa skłonność do oszczędzania;

λ – współczynnik deprecjacji kapitału;

γ – parametr mierzący siłę wpływu wartości produkcji na przyrost siły roboczej;

α – udział wartości środków trwałych w procesie produkcyjnym;

τ – parametr „samonapędzania" się postępu technicznego.

Równanie pierwsze stanowi swoistą funkcję produkcji, uwzględniającą trzy czynniki: zaawansowanie technologiczne, wartość środków trwałych oraz nakłady pracy. O parametrze α zakładamy, iż jest on liczbą z przedziału (0; 1). Na mocy teorii podziału Clarka (1899) stanowi on wymierny udział kapitału w procesie produkcyjnym. Zauważmy, iż nie bierzemy tu pod uwagę klasycznej funkcji produkcji typu Cobba–Douglasa (por. Hall i Taylor 1995). Jest to związane z chęcią zminimalizowania nieliniowości w naszym modelu.

Drugie równanie stanowi klasyczne równanie wzrostu wartości środków trwałych. Nie powinno ono podlegać komentarzowi. W kolejnych równaniach zakładamy też stały wzrost zasobów pracy oraz zależny od dwóch czynników postęp technologiczny.

Rozpatrywany przez nas pod względem stabilności model doprowadzimy do postaci umożliwiającej nam skuteczne wnioskowanie. W tym celu wstawmy pierwsze równanie do trzeciego, by tym samym zredukować układ do trzech niewiadomych:

$$\dot{K} = I - \lambda \cdot K,$$
$$\dot{L} = \gamma \cdot \beta + \gamma \cdot \delta \cdot A + (\gamma \cdot \alpha - \kappa) \cdot K + \gamma \cdot (1 - \alpha) \cdot L,$$
$$\dot{A} = \theta \cdot I + \tau \cdot A.$$

Następnie dokonajmy wyliczenia współrzędnych punktu, który będzie dla naszego układu tzw. „punktem stacjonarnym". Rozwiążmy zatem powyższy układ równań przy założeniu, że prawe strony równań wynoszą zero. Otrzymujemy:

$$K = \frac{I}{\lambda},$$
$$L = \frac{-\gamma \cdot \beta + \gamma \cdot \delta \cdot \frac{\theta \cdot I}{\tau} - (\gamma \cdot \alpha - \kappa) \cdot \frac{I}{\lambda}}{\gamma \cdot (1 - \alpha)},$$
$$A = \frac{-\theta \cdot I}{\tau}.$$

Zauważmy, że macierz układu równań, po dokonaniu odrzucenia wyrazu wolnego, które usprawiedliwione jest twierdzeniem o linearyzacji, wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} \dot{K} \\ \dot{L} \\ \dot{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ (\gamma \cdot \alpha - \kappa) & \gamma \cdot (1 - \alpha) & \gamma \cdot \delta \\ 0 & 0 & \tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K \\ L \\ A \end{bmatrix}.$$

Zwróćmy uwagę, iż wielomian charakterystyczny będzie miał w tym przypadku wyjątkowo prostą postać. Jest to spowodowane dużą liczbą zer w macierzy współczynników układu. Wartości własne będą więc rozwiązaniami równania postaci:

$$(-\lambda - d)\cdot(\gamma\cdot(1-\alpha) - d)\cdot(\tau - d) = 0,$$

gdzie d oznacza wartość własną. Prostymi rozwiązaniami powyższego są zatem:

$$d_1 = -\lambda,$$

$$d_2 = \gamma\cdot(1-\alpha),$$

$$d_3 = \tau.$$

Nie ulega wątpliwości, wobec teorii ekonomii, iż parametry λ i α muszą być dodatnie, w przypadku dwóch pozostałych odpowiedź nie jest już jednak taka jednoznaczna. Można bowiem wyobrazić sobie sytuację, w której wzrost produkcji ma zerowy wpływ na przyrost zatrudnienia, względnie nawet może nastąpić jego spadek poprzez substytucyjność czynników produkcji, słowem zastąpienie pracy rąk ludzkich poprzez odpowiednie maszyny i zdobycze technologiczne lub nowości natury organizacyjnej. Tak samo może wystąpić sytuacja, w której osiągnięty poziom technologiczny hamuje dalszy jego wzrost – tu czynnikiem powodującym taki stan może stać się szeroko rozumiana polityka.

Rozpatrzmy zatem znaki wartości własnych d. Pierwsza z nich jest niewątpliwie ujemna, co kończy też nasze nią zainteresowanie. Znaki drugiej i trzeciej uzależnione są właśnie od opisanych powyżej przypadków. Jeżeli oba znaki będą ujemne, wówczas owe wartości własne też będą ujemne.

Tu jednak czeka nas niespodzianka. Stabilność tego systemu nie musi oznaczać sytuacji pozytywnej ekonomicznie, co można łatwo zauważyć. Jeżeli wartość produkcji ma negatywny wpływ na poziom zatrudnienia, a postęp techniczny jest sam dla siebie hamulcem, wówczas jednoznacznie, choć matematycznie nie jest to oczywiste na pierwszy rzut oka, układ dynamiczny, jakim jest w tym przypadku gospodarka narodowa, dążyć musi powoli, stabilnie do absolutnej stagnacji gospodarczej, co wobec ciągłego rozwijania się otaczającego nas świata, oznacza tak naprawdę zacofanie. Będzie to bowiem kraj, w którym wzrost produkcji powodować będzie spadek zatrudnienia. Wynika stąd zjawisko zastępowania pracy przez kapitał różnego rodzaju (nie tylko fizyczny – por. Milo, Bieda, Leszczyk, Miler i Witkowska 2004). Brak jednak, a raczej hamowanie postępu technicznego spowoduje spadek przyrostu produkcji, zatem używane będą niepostępowe (wciąż te same lub podobne) maszyny. Spadek przyrostu produkcji spowoduje zahamowanie tempa rozwoju gospodarczego, a więc także spowolni proces wypierania pracy rąk ludzkich z procesu produkcyjnego. To spowoduje powstanie stanu stabilności, a raczej równowagi stabilnej. Nie jest to jednak stan, do którego dążyć powinny gospodarki.

Pomimo iż system będzie wtedy systemem stabilnym, co oznacza dla nas sens wprowadzenia odpowiednich schematów prognostycznych, których powodzenie będzie wówczas bliskie pewności, to punkt równowagi nie jest punktem pozytywnym w sensie interpretacji ekonomicznej. Jest to potwierdzenie dwóch tez: po pierwsze interpretacja ekonomiczna musi być górą ponad wyliczeniami matematycznymi oraz, po drugie, iż stabilność nie musi oznaczać stanu pozytywnego.

W przypadku naszego modelu nawet pożądany jest stan niestabilności i, pomimo związanych z tym niedogodności prognostycznych, świadczy on, w tym przypadku, o potencjalnym rozwoju gospodarczym. Nie jest to jednak sytuacja codzienna. Godzenie się na niestabilność systemu gospodarczego to duża odpowiedzialność ze strony podmiotów decyzyjnych, mając jednak jako alternatywę stagnację gospodarczą, wybór staje się bardziej oczywisty. Podjęte ryzyko może być zrekompensowane z nawiązką. Konieczna jest tutaj jednak nadzwyczajna ostrożność – niestabilny układ może „wyrwać" się dosyć łatwo spod kontroli.

5. WNIOSKI

Przeprowadzona analiza stabilności rozwiązań układu równań różniczkowych zwyczajnych niewątpliwie wzbogaca rozważania ekonomiczne. Wnioski o niestabilności układu stanowią podstawę do traktowania prognoz wartości produkcji oraz jej czynników opartych na opisywanym modelu lub modelach do niego podobnych z dużą ostrożnością. Przeanalizowane też zostały możliwe wartości parametrów ekonomicznych, które mogą zagwarantować dla naszego układu stabilność, oznaczającą jednak w tym szczególnym przypadku stagnację gospodarczą, bądź niestabilność, będącą tym razem, zaskakująco, kluczem do rozwoju. Dodatkowe informacje o procesie ekonomicznym, osiągnięte poprzez rachunki stabilnościowe, warte są zachodu z nimi związanego. Zatem wzbogacenie każdej analizy rodem z ekonomii matematycznej o te metody niewątpliwie dać mogą podstawy do lepszego poznania wciąż jeszcze nie zawsze dobrze znanych mechanizmów kreujących szeroko rozumiany ruch dynamicznych układów ekonomicznych.

LITERATURA

Chądzyński J. (1994), *Wstęp do równań różniczkowych zwyczajnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
Chow G. C. (1983), *Econometric Methods*, McGraw-Hill, New York.
Clark J. B. (1899), *The Distribution of Wealth*, Macmillan, London.

Goldberger A. S. (1972), *Teoria ekonometrii*, PWN, Warszawa.
Greń J. (1987), *Statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa.
Hall R., Taylor J. B. (1995), *Makroekonomia – teoria, funkcjonowanie i polityka*, PWN, Warszawa.
Kuratowski K. (1965), *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa.
Lapunow A. M. (1893), *Obszczaja zadacza ob ustojcziwostii dwiżenije*, Charkow, Com. Soc. Mat.
Lorenz E. (1963), *Deterministic Nonperiodic Flow*. „Journal of the Atmospheric Science", 20, 130–141.
Milewski R. (2001), *Podstawy ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
Milo W. (1995), *Stabilność i wrażliwość metod ekonometrycznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
Milo W., Bieda D., Leszczyk A., Miler A., Witkowska A. (2004), *O kapitale fizycznym*, „Wiadomości Statystyczne", marzec.
Milo W., Zglińska-Pietrzak A. (1997), *Stabilność, atraktory stabilności i chaosu*, opracowanie KBN, nr 1 H02B 01311.
Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U. (1999), *Statystyka – elementy teorii i zadania*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego, Wrocław.
Pelczar A., Szarski J. (1987), *Wstęp do teorii równań różniczkowych. Część I: Wstęp do teorii równań zwyczajnych i równań cząstkowych pierwszego rzędu*, PWN, Warszawa.
Pelczar A. (1989), *Wstęp do teorii równań różniczkowych. Część II, Elementy jakościowej teorii równań różniczkowych*, PWN, Warszawa.
Ricardo D. (1957), *Zasady ekonomii politycznej i opodatkowania*, PWN, Warszawa.
Smith A. (1954), *Badania nad naturą i przyczynami bogactwa narodów*, PWN, Warszawa.
Stewart I. (1994), *Czy Bóg gra w kości?*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
Tu P.N.V. (1994), *Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.
Welfe W., Welfe A. (1996), *Ekonometria stosowana*, PWE, Warszawa.
Zeliaś A. (2000), *Metody statystyczne*, PWE, Warszawa.

Maciej Malaczewski

STABILITY OF ECONOMIC PROCESSES

Summary

Stability is a phenomenon that has an influence on economic modeling. The paper contains presentation of that problem, its causes and effects. The paper contains also an example of stability analysis.