A C T A U N I V E R S I T A T I S L O D Z I E N S I S
FOLIA OECONOMICA 271, 2012

*Anna Szymańska**

WYBRANE METODY SZACOWANIA STAWEK SKŁADKI NETTO W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH OC

Streszczenie. Podstawą działalności ubezpieczeniowej jest prawidłowe szacowanie składek ubezpieczeniowych. Składki powinny być tak oszacowane, aby towarzystwo nie ponosiło strat finansowych, natomiast ubezpieczony nie płacił za dużo lub za mało.

W pracy przedstawiono dwie metody estymacji stawek składki dla składek netto wyznaczanych metodą zerowej użyteczności. W pierwszej metodzie do szacowania stawek składki wykorzystano estymatory bayesowskie. W metodzie drugiej stawki składki oszacowano maksymalizując funkcję użyteczności, której argumentem jest różnica między składką i parametrem szkodowości, przy warunku zachowania równowagi finansowej ubezpieczyciela. Badanie przeprowadzono na danych rzeczywistych, pochodzących z łódzkiego towarzystwa ubezpieczeniowego.

Słowa kluczowe: stawka składki, system bonus-malus, estymacja bayesowska.

I. WSTĘP

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC klasyfikacja ubezpieczonych do grup taryfowych odbywa się na podstawie czynników *a priori* (obserwowalnych czynników ryzyka takich, jak na przykład rodzaj i rok produkcji samochodu, pojemność silnika, wiek i płeć kierowcy) oraz czynników *a posteriori* (historia szkodowości kierowcy). Dlatego składki w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC są wyznaczane w dwóch etapach. Pierwszy to obliczenie składki podstawowej na podstawie czynników *a priori*, drugi etap to taryfikacja *a posteriori* (por. Lemaire (1995)).

W pracy skoncentrujemy się na drugim etapie nazywanym systemem bonus-malus.

Systemem bonus-malus będziemy nazywać metody wyznaczania indywidualnych składek, uwzględniające liczbę szkód spowodowanych przez kierowcę w przeszłości. W każdym systemie bonus-malus musi być ustalona klasa startowa, do której trafiają ubezpieczeni bez historii szkodowości, wektor stawek składki podstawowej oraz zasady przejść między klasami.

Roczna składka netto jest wyznaczana jako iloczyn składki podstawowej obowiązującej w klasie taryfowej (taryfikacja a priori) oraz współczynnika, będącego szacowaną procentową stawką składki.

* Dr, Katedra Metod Statystycznych, Uniwersytet Łódzki.

W pracy nie uwzględnia się dodatkowych zwyżek i zniżek, charakterystycznych dla poszczególnych ubezpieczycieli.

W ubezpieczeniach komunikacyjnych zakłada się, że liczba szkód K w jednorodnym portfelu jest zmienną losową o rozkładzie Poissona postaci

$$P(K=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

gdzie λ nazywamy parametrem intensywności szkód (por.Hossack (1999)).

Jeżeli portfel jest niejednorodny, to parametr intensywności szkód Λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma z parametrami α i β , o funkcji gęstości postaci

$$f(\lambda)=\frac{\beta^{\alpha}e^{-\beta\lambda}\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\quad \alpha>0,\beta>0,\lambda>0 \tag{2}$$

przy czym $\overline{\lambda}=E\Lambda=\dfrac{\alpha}{\beta}$ i $D^2\Lambda=\dfrac{\alpha}{\beta^2}$. Wówczas liczba szkód w portfelu ma rozkład ujemny dwumianowy postaci

$$p_k=P(K=k)=\binom{k+\alpha-1}{k}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{k},\quad k=0,1,\ldots \tag{3}$$

Estymatory parametrów α i β, wyznaczone metodą momentów (por. Domański, Pruska(2000)) są postaci:

$$\beta=\frac{\overline{k}}{S_k^2-\overline{k}}\quad \text{i}\quad \alpha=\frac{\overline{k}^2}{S_k^2-\overline{k}} \tag{4}$$

W ubezpieczeniowym systemie bonus-malus wyznacza się składkę *a priori*, a następnie uwzględnia się indywidualny parametr ryzyka nazywany stawką składki (por. Lemaire (1995)). W pracy do wyznaczania indywidualnych parametrów ryzyka zastosowano dwie metody: metodę I- wykorzystującą estymatory bayesowskie oraz metodę II- Ferreiry.

II. SZACOWANIE STAWEK SKŁADKI ZA POMOCĄ METODY I

Niech K_j będzie zmienną losową oznaczającą liczbę szkód w roku j dla danej polisy; (k_1, k_2,…,k_t) wektorem obserwacji liczby szkód przez t lat dla danej polisy; $F(\lambda)$ będzie dystrybuantą zmiennej losowej Λ; $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, ..., k_t)$ będzie nieznanym parametrem szkodowości w roku t+1 dla polisy opisanej wektorem obserwacji (k_1, k_2,…,k_t).

Nieznany parametr $\lambda_{t+1}(k_1, k_2, ..., k_t)$ można oszacować za pomocą estymatora bayesowskiego na podstawie wektora obserwacji (k_1, k_2,…,k_t). Jeżeli funkcja straty jest kwadratowa to estymator bayesowski parametru Λ jest warunkową wartością oczekiwaną rozkładu *a posteriori* i ma postać

$$\lambda_{t+1}(k_1, ..., k_t) = E_\lambda[\Lambda | k_1, \ldots, k_t] = \int_0^\infty \lambda dF(\lambda | k_1, \ldots, k_t) \tag{5}$$

gdzie $F(\lambda | k_1, \ldots, k_t)$ jest dystrybuantą warunkową zmiennej losowej Λ przy zaobserwowanych wartościach (k_1, k_2,…,k_t).

Załóżmy, że rozkład liczby szkód w portfelu jest ujemny dwumianowy. Parametr intensywności szkód Λ ma rozkład *a priori* gamma z parametrami α i β.

Z twierdzenia Bayes'a

$$dF(\lambda | k_1, ...k_t) = \frac{P(k_1, ...k_t | \lambda) dF(\lambda)}{\int_0^\infty P(k_1, ...k_t | \lambda) dF(\lambda)} = \frac{\dfrac{\lambda^k e^{-t\lambda}}{\prod_{J=1}^{t}(k_j!)} \dfrac{\beta^\alpha e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1} d\lambda}{\Gamma(\alpha)}}{\dfrac{\beta^\alpha}{\prod_{J=1}^{t}(k_j!)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{k+\alpha-1} e^{-(t+\beta)\lambda} d\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda^{k+\alpha-1} e^{-(t+\beta)\lambda} d\lambda}{\int_0^\infty \lambda^{k+\alpha-1} e^{-(t+\beta)\lambda} d\lambda} = \frac{\hat{\beta}^{\hat{\alpha}} \lambda^{\hat{\alpha}-1} e^{-\hat{\beta}\lambda}}{\Gamma(\hat{\alpha})} d\lambda \tag{6}$$

Zatem rozkład *a posteriori* parametru Λ jest rozkładem gamma z parametrami $\hat{\alpha} = \alpha + k$ oraz $\hat{\beta} = \beta + t$.

Estymator bayesowski parametru Λ ma postać

$$\lambda_{t+1}(k_1, ..., k_t) = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \frac{\alpha + k}{\beta + t} \tag{7}$$

Parametry α i β można wyznaczyć ze wzoru (4).

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC indywidualna składka netto w okresie t+1 wynosi:

$$P_{t+1}(k_1,...,k_t) = EX \cdot E\Lambda \cdot b_{t+1}(k_1,...,k_t) \tag{8}$$

gdzie $P_{t+1}(k_1,...,k_t)$ -indywidualna składka netto w okresie t+1, (EX) -wartość oczekiwana pojedynczej szkody , $(E\Lambda)$ -wartość oczekiwana liczby szkód, $b_{t+1}(k_1,...,k_t)$ -stawka szacowanej składki.

Przyjmijmy, że (EX) =1 oraz $(E\Lambda) = \frac{\alpha}{\beta}$. Wówczas równanie (8) ma postać

$$P_{t+1}(k_1,...,k_t) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot b_{t+1}(k_1,...,k_t) \tag{9}$$

Stąd kierowca, który po t latach zgłosił k szkód, powinien płacić stawkę szacowanej składki równą

$$b_{t+1}(k_1,...,k_t) = \frac{\beta}{\alpha} P_{t+1}(k_1,...,k_t) \cdot 100\% \tag{10}$$

Do szacowania indywidualnej składki netto zastosujemy zasadę zerowej użyteczności.

Zasada zerowej użyteczności opiera się na założeniu, że oczekiwana użyteczność zarobku ubezpieczyciela, gdy ryzyko Λ zostanie ubezpieczone za cenę P, równa się użyteczności początkowej rezerwy R ubezpieczyciela, czyli $u(R) = E[u(R + P - \lambda)]$.

Niech funkcja $u(\lambda)$ będzie wykładniczą funkcją użyteczności postaci

$$u(\lambda) = \frac{1}{c}\left(1 - e^{-c\lambda}\right) \tag{11}$$

gdzie c>0 jest parametrem określającym awersję do ryzyka towarzystwa ubezpieczeniowego. Im większa jest awersja, tym większa jest składka. Jeżeli funkcja użyteczności ma postać określoną wzorem (11), to składka netto wynosi

$$P = \frac{1}{c} \ln M_\Lambda(c) \tag{12}$$

gdzie $M_\Lambda(c) = Ee^{c\Lambda}$ jest funkcją tworzącą momenty zmiennej losowej Λ.

W przypadku ujemnego dwumianowego rozkładu liczby szkód w portfelu składka netto wynosi

$$P = \frac{1}{c}\ln\int_0^\infty M_\Lambda(c)dF(\lambda) = \frac{1}{c}\ln\int_0^\infty e^{\lambda(e^c-1)}\frac{\beta^\alpha e^{-\beta\lambda}\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}d\lambda =$$
$$= \frac{\alpha}{c}\left|\ln\left(1-\frac{e^c-1}{\beta}\right)\right| \quad dla \quad \beta > e^c - 1 \tag{13}$$

Uwzględniając, że $\hat{\alpha} = \alpha + k$ oraz $\hat{\beta} = \beta + t$, szacowana według zasady użyteczności indywidualna składka netto wynosi

$$P_{t+1}(k_1,...,k_t) = \frac{\alpha + k}{c}\left|\ln\left(1-\frac{e^c-1}{t+\beta}\right)\right| \tag{14}$$

Na podstawie równań (10) i (14) stawka szacowanej w systemie bonus- malus składki kierowcy, który po t latach zgłosił k szkód, wynosi

$$b_{t+1}(k_1,...,k_t) = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha + k}{c}\left|\ln\left(1-\frac{e^c-1}{t+\beta}\right)\right| \cdot 100\% \tag{15}$$

III. SZACOWANIE STAWEK SKŁADKI ZA POMOCĄ METODY II

Metoda ta jest oparta na wykładniczej funkcji użyteczności i założeniu, że ubezpieczyciel ma awersję do karania nadmiernymi składkami wszystkich kierowców w danej grupie portfela. Uważa, że przeszacowana stawka składki jest większym błędem niż niedoszacowana stawka składki pod warunkiem, że równowaga finansowa ubezpieczyciela zostanie zachowana. Stawki składki szacuje więc maksymalizując funkcję użyteczności, której argumentem jest różnica między składką i parametrem szkodowości, przy warunku zachowania równowagi finansowej.

Niech dla danego t liczba m+1 oznacza liczbę grup taryfowych w portfelu (k=0,...,m); N_k oznacza łączną liczbę roszczeń w k-tej grupie taryfowej; N – łączną sumę roszczeń w portfelu, czyli $N = \sum_{k=0}^{m} N_k$. Oznaczmy przez $p_k = P_{t+1}(k_1,...,k_t)$ indywidualną składkę netto w okresie t+1.

Metoda II opiera się na wyznaczeniu przyszłych składek netto p_k jako maksimum funkcji

$$Z(p_k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{m} N_k \int_0^{\infty} \frac{1}{c}\left[1 - e^{-c(\lambda - p_k)}\right] dF\left(\lambda | k_1,...,k_t\right) \tag{16}$$

przy warunku

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{m} N_k p_k \tag{17}$$

gdzie c jest parametrem wyrażającym awersję do ryzyka ubezpieczyciela.

Wykorzystując funkcję Lagrange'a

$$L(p_k,\alpha) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{m} N_k \int_0^{\infty} \frac{1}{c}\left[1 - e^{-c(\lambda - p_k)}\right] dF\left(\lambda | k_1,...,k_t\right) + \alpha\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{m} N_k p_k - \overline{\lambda}\right) \tag{18}$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{m} N_k p_k = \overline{\lambda} \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{N} N_k \int_0^{\infty} e^{cp_k} e^{-c\lambda} dF\left(\lambda | k_1,...,k_t\right) = \frac{\alpha}{N} N_k, \quad k = 0,...,m \tag{20}$$

Niech $M_k(x)$ oznacza funkcję tworzącą momenty rozkładu a posteriori parametru Λ, określoną wzorem

$$M_k(x) = \int_0^{\infty} e^{x\lambda} dF\left(\lambda | k_1,...,k_t\right) \tag{21}$$

Uwzględniając wzory (20) i (21) mamy

$$M_k(-c) = e^{-cp_k}\alpha \tag{22}$$

Wyznaczając p_k z równania (22) otrzymujemy indywidualną składkę netto w okresie t+1

$$p_k = \frac{1}{c}\left(\ln\alpha - \ln M_k(-c)\right) \tag{23}$$

Uwzględniając wzory (10) i (23) stawka szacowanej składki metodą II wynosi

$$b_{t+1}(k_1,...,k_t) = \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\left(\ln\alpha - \ln M_k(-c)\right)100\% \tag{24}$$

W przypadku ujemnego dwumianowego rozkładu liczby szkód w portfelu stawka szacowanej metodą II składki wynosi

$$b_{t+1}(k_1,...,k_t) = \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{c}\left(\ln(\alpha+k) + (\alpha+\beta)\ln\left(1-\frac{e^{-c}-1}{\beta+t}\right)\right)100\% \tag{25}$$

IV. ZASTOSOWANIA

Przedstawione metody zastosowano do wyznaczania szacowanej stawki składki na podstawie danych dotyczących historii szkodowości, pochodzących z towarzystwa ubezpieczeniowego działającego na łódzkim rynku.

W tablicach 1 i 2 oszacowano stawki składek metodą I (używając wzoru (15)) oraz metodą II (używając wzoru (25)). Parametry α i β rozkładu intensywności szkód Λ oszacowano za pomocą wzoru (4).

Tablica 1. Stawki składki (w %) szacowane metodą I (M I) oraz metodą II (M II) dla c=0,4.

t \ k	0		1		2		3 i więcej	
	M I	M II	M I	M II	M I	M II	M I	M II
0	100	100						
1	95	99	121	113	148	125	174	135
2	90	98	115	112	141	124	166	134
3	86	97	110	111	134	123	158	133
4	82	96	105	111	128	122	151	132

Źródło: Obliczenia własne.

Tablica 2. Stawki składki (w %) szacowane metodą I (M I) oraz metodą II (M II) dla c=1,65.

t \ k	0		1		2		3 i więcej	
	M I	M II	M I	M II	M I	M II	M I	M II
0	100	100						
1	94	98	121	109	147	118	173	125
2	89	96	114	107	139	116	164	123
3	85	94	108	105	132	114	155	122
4	81	93	103	104	125	113	148	120

Źródło: Obliczenia własne.

V. WNIOSKI

Szacowane stawki składki podstawowej różnią się znacznie. Metoda I jest krytykowana, ponieważ wraz ze wzrostem k i t coraz bardziej przeszacowuje składki. Ma również ograniczenia dotyczące parametru c. Metoda II zaburza symetrię między nadpłatą i niedopłatą. Obciąża kierowców całego portfela niewiele wyższymi składkami, nie obciążając tak dotkliwie kierowców w klasach o dużej liczbie szkód k.

BIBLIOGRAFIA

Domański Cz., Pruska K., (2000), *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa.

Hossack I.B., Pollard J.H., Zehnwirth B., (1999), *Introductory statistics with applications in general insurance*, Cambridge.

Lemaire J., (1995), *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston.

Anna Szymańska

CHOSEN METHODS OF ESTIMATING NET PREMIUMS IN CIVIL RESPONSIBILITY CAR INSURANCE

Abstract

The foundation of insurance activity is the correct estimation of insurance premiums. The premiums should be estimated so that the insuring company would not incur losses and the insured would not pay too much or too little.

In the paper two methods of estimating rates of premiums for net premiums defined by zero-utility method are presented. In the first method to estimating premiums bayes estimators are used. In the second method rates of premium are estimated by maximum utility function whose argument is difference between the premium and the parameter of damage with the condition to preserve insurer's finance balance. The investigation was carried on real data from a Łódź insurance company.