A C T A   U N I V E R S I T A T I S   L O D Z I E N S I S
FOLIA OECONOMICA 103, 1990

Stanisław Wieteska*

PRÓBA OPTYMALIZACJI KOSZTÓW EKSPLOATACJI SPÓŁDZIELCZYCH BUDYNKÓW MIESZKALNYCH

1. Wprowadzenie

Istotne miejsce w procesie projektowania spółdzielczego budownictwa mieszkaniowego zajmuje zastosowanie rachunku ekonomicznej efektywności. Temu problemowi poświęcono wiele miejsca w literaturze przedmiotu[1]. Jednak w dalszym ciągu w praktyce projektowania spółdzielczego spotykamy się z ograniczonym jego zastosowaniem. Główną przyczyną tego jest niedostateczna możliwość przewidzenia przyszłych kosztów eksploatacji budynków mieszkalnych, a także brak wystarczająco przekonywających ocen ich wartości użytkowej. Zatem konieczne są prace naukowe m. in. w zakresie kosztów utrzymania i eksploatacji bieżącej spółdzielczych budynków mieszkalnych, zwłaszcza chodzi o racjonalizację tych kosztów z punktu widzenia ekonomicznego. Celem artykułu jest próba zaprezentowania metody, która za pomocą prostszego aparatu matematycznego wskazuje na budynki mieszkalne, ponoszące optymalną wielkość kosztów eksploatacji w procesie ich u-

* Dr, adiunkt w Zakładzie Ekonomiki Rozwoju Miast UŁ.

[1] J. B o g u s z, Zasady określenia efektywności inwestycji mieszkaniowych, "Materiały i Studia" 1970, z. 15/199; Metody badania efektywności inwestycji mieszkaniowych w wybranych krajach socjalistycznych, [w:] S. C h o j e c k i, Analiza roli kosztów utrzymania w rachunku finalnym budynku mieszkalnego, Warszawa 1973, s. 52.

żytkowania. Prezentowaną metodę zaczerpnięto z pracy Z. Błochowiaka[2], dostosowując ją do istoty badanego problemu.

2. Prezentacja problemu

W toku projektowania mamy m. in. do dyspozycji następujące dane:

- zbiór dostępnych materiałów wykończeniowych i wyposażeniowych;
- zbiór elementów prefabrykowanych;
- zbiór technologii realizacji;
- zbiory przepisów prawnych, technicznych, normatywów itp.

W świetle tego w procesie projektowania istnieje możliwość realizacji budynków mieszkalnych o różnych technologiach, elementach prefabrykowanych, materiałach wykończeniowych i wyposażeniowych. (Wprawdzie praktyka tego nie potwierdza, gdyż realizujemy zbiory identycznych budynków mieszkalnych, to jednak dla potrzeb prezentowanej metody przyjmujemy takie założenie).

Zatem poszczególne budynki mieszkalne mogą się waraźnie różnić swoją wartością użytkową, tj. standardem wykonania, wyposażenia i wykończenia mieszkań. Przyjęta różnorodność wartości użytkowej budynków mieszkalnych powoduje w procesie eksploatacji budynków mieszkalnych konieczność ponoszenia różnorodnych wielkości kosztów utrzymania i eksploatacji. Interesują nas koszty eksploatacji ponoszone systematycznie w czasie eksploatacji.

Powstaje wówczas pytanie, która szeroko pojęta wartość użytkowa budynku mieszkalnego pociąga za sobą w toku eksploatacji optymalne wielkości kosztów eksploatacji? Odpowiedź na to pytanie, zwłaszcza na etapie projektowania, jest ważna, gdyż stanowi ona podstawę przyjmowania racjonalnych rozwiązań materiałowo-konstrukcyjnych elementów technicznych budynków mieszkalnych. W sumie sprowadza się do stosowania rachunku ekonomicznego nie tylko wykorzystującego koszty budynku mieszkalnego, ale i przyszłe jego koszty eksploatacji, a także wartość użytkową.

---

[2] Z. B ł o c h o w i a k, Zastosowanie optymalizacji matematycznej w doborze produkcji budowlanej, Kraków 1966.

3. Analityczna funkcja kosztów eksploatacji budynku mieszkalnego

Dotychczasowa literatura dotycząca kosztów eksploatacji budynków mieszkalnych posiada dobre rozpoznanie w zakresie ich struktury i tempa wzrostu. Na wzrost tych kosztów wpływa wiele czynników. Przyjmijmy, że koszty eksploatacji wzrastają proporcjonalnie (liniowo) w miarę wzrostu okresu eksploatacji. Rozważmy jednostkowe koszty eksploatacji w zł/rok w przeliczeniu na 1 m^2 powierzchni użytkowej budynku mieszkalnego. Łatwo opisać ogólną funkcję kosztów eksploatacji dla danego budynku mieszkalnego wzorem:

$$y = f(t) \tag{1}$$

gdzie:

y - koszty eksploatacji,
t - czas.

Ponieważ przyjęliśmy, że funkcja jest liniowa, więc możemy ją zapisać w postaci:

$$y = at + b, \qquad \text{gdzie } a, b \text{ - stałe} \tag{1a}$$

Przyjmijmy, że wielkość czasu eksploatacji może być zawarta w przedziale od 1 do $+\infty$. Otrzymamy wówczas obszar, w którym funkcja będzie określona, tj.:

$$1 \leqslant t < \infty \quad \text{oraz } 0 \leqslant f(t) < \infty.$$

Widzimy również, że:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{t \to \infty}(at + b) = +\infty.$$

Wartość graniczna $+\infty$ jest wielkością teoretyczną.

4. Optymalizacja kosztów eksploatacji budynku o dwóch różnych wartościach użytkowych

Przyjmijmy, że mamy 2 budynki mieszkalne o zrealizowanych dwóch różnych wartościach użytkowych, tzn. różniących się standardem wykończenia i wyposażenia. Każdy z tych budynków będzie w czasie użytkowania ponosił różne koszty eksploatacji, które można opisać równaniami:

Budynek A $y = a_1 t + b_1$

Budynek B $y = a_2 t + b_2$

Aby zoptymalizować koszty eksploatacji dla tego przypadku należy dążyć do ich minimalizacji. Warunek minimalizacji kosztów eksploatacji będzie spełniony wówczas, gdy rozwiążemy układ równań:

$$\begin{aligned} a_1 t - y &= -b_1 \\ a_2 t - y &= -b_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Stosując metodę "przeciwległych współczynników" otrzymamy:

$$y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2}, \qquad x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \tag{3}$$

bądź stosując metodę wyznaczników otrzymamy:

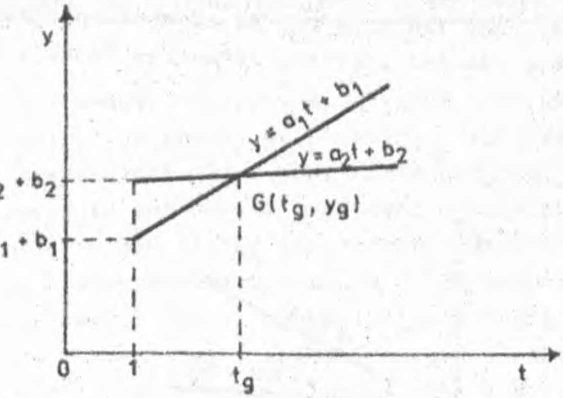
$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{Wy}{W} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{Wx}{W}$$

Rozwiązaniem tego układu jest punkt G (rys. 1) o współrzędnych t_g i y_g, który spełnia obydwa równania (2) i (3). Jest on punktem granicznym opłacalności stosowania dwóch różnych wartości użytkowych budynków mieszkalnych.

Punkt graniczny dzieli obszar na dwa przedziały:

I dla $1 \leqslant t \leqslant t_g$, czyli $1 \leqslant t \leqslant \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$.

II dla $t_g < t < \infty$, czyli $\dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} < t < \infty$



Rys. 1

W celu określenia, która funkcja i w jakim przedziale spełnia warunek $F(t, y) = \min$, wystarczy zbadać zachowanie się obu funkcji w pierwszym przedziale.
Dla $t = 1$ otrzymamy

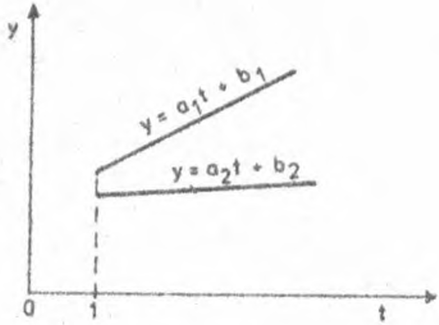
$$y_A = a_1 + b_1$$
$$Y_B = a_2 + b_2$$

W przypadku, gdy $Y_A < Y_B$, wówczas w pierwszym przedziale ekonomiczniejszy będzie budynek A, zaś gdy $Y_A > Y_B$, wówczas w przedziale pierwszym ekonomiczniejszy jest budynek B.
Odwrotne zachowanie spotykamy w przedziale drugim.

Analizując różne przypadki zachowania się kosztów eksploatacji dla dwóch dowolnych budynków można się spotkać z sytuacją, gdy układ równań nie będzie miał rozwiązania, tzn. gdy:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nie istnieje wówczas punkt graniczny $G(t_g, y_g)$, gdyż wykresy funkcji (1) kosztów eksploatacji obu budynków przebiegają równolegle w całym obszarze określoności funkcji. Wyznaczenie ekonomiczności jest wówczas możliwe, jeśli weźmiemy pod uwagę parametry b_1 i b_2. Gdy $b_1 < b_2$, to ekonomiczniejszy (pod względem kosztów eksploatacji) będzie budynek A, gdy zaś $b_1 > b_2$, to ekonomiczniejszy będzie budynek B. Może się również zdarzyć, że wykres funkcji (1) ma postać, jak na rys. 2.



Rys. 2

W tym przypadku wyznacznik (Wx) = 0, wtedy gdy $b_2 - b_1 = 0$, stąd $b_1 = b_2 = b$. Z równań (3) otrzymamy:

$$y = \frac{a_1 b - a_2 b}{a_1 - a_2} = b \qquad x = \frac{b - b}{a_1 - a_2} = 0$$

W tym przypadku warunek minimalizacji kosztów eksploatacji można osiągnąć rozpatrując parametry a_1 i a_2. Gdy $1 > a_2$, to ekonomiczniejszy będzie budynek B, zaś gdy $a_1 < a_2$, to ekonomiczniejszy będzie budynek A.

Jak widać w analizowanym przypadku jest możliwe (lecz z różną dokładnością) wskazanie, który z budynków mieszkalnych pod względem kosztów eksploatacji jest bardziej ekonomiczny.

5. Optymalizacja kosztów eksploatacji w przypadku dostatecznie dużej liczby budynków

Gdy weźmiemy pod uwagę 3 budynki mieszkalne o różnej wartości użytkowej, ponoszące różne koszty eksploatacji, obliczenie punktów granicznych jest trudniejsze niż w poprzednim przypadku. Wystąpić mogą do przeanalizowania dwa punkty graniczne i trzy przedziały.

W miarę zwiększania się liczby przyjętych, różnych wartości użytkowych budynków mieszkalnych, możliwych do zaprojektowania bądź praktycznego zrealizowania, wybór optymalnej wielkości kosztów eksploatacji jest bardzo uciążliwy i pracochłonny. Liczba przypadków granicznych rośnie w postępie arytmetycznym, dla n budynków będzie

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{punktów.}$$

W celu uproszczenia procedury obliczenia minimalizacji kosztów eksploatacji można wprowadzić zasadę doboru wartości użytkowej na podstawie właściwości obwiedni rodziny funkcji (1a)

5.1. Wyznaczenie równania obwiedni prostych

Rozważmy rodzinę funkcji kosztów eksploatacji budynków mieszkalnych:

$$F(t,\ y,\ c), \quad \text{gdzie } c \text{ jest parametrem} \tag{4}$$

Załóżmy, że rodzina ta ma obwiednię, tj. taką krzywą, która w każdym swym punkcie jest styczna przynajmniej do jednej krzywej z rodziny (4) i na żadnej nowej części nie jest identyczna z żadną z krzywych tej rodziny. W naszym przypadku wobec (1a) obwiednia będzie zbiorem punktów przecięcia się prostych.

W celu określenia równania obwiedni stosujemy niżej opisany tok postępowania. Na wstępie przeprowadzamy analizę równań kosztów jednostkowych poszczególnych budynków mieszkalnych. Na podstawie wielkości parametrów a i b określa się, który z budynków nie będzie brany pod uwagę. Następnie winniśmy zbadać związki istniejące między rozpatrywanymi funkcjami kosztów eksploatacji. Logiczną konsekwencją będzie znalezienie związku między parametrami a_i i b_i w równaniach $y = a_i t + b_i$. Określenie tego związku pozwoli sprowadzić funkcję $F(t, y, a, b) = 0$ do postaci:

$$F(t, y, d) = 0, \text{ gdzie } d \text{ jest parametrem} \tag{5}$$

Funkcja (5) jest równaniem rodziny prostych, tj. funkcji kosztów eksploatacji budynków mieszkalnych. Gdy dwie proste z rodziny $F(t, y, d) = 0$ i $F(t, y, d + h) = 0$ się przecinają, to wówczas współrzędne punktu otrzymuje się rozwiązując układ równań:

$$F(t, y, d) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{F(t, y, d + h) - F(t, y, d)}{h} = 0 \tag{6}$$

gdy $h \to 0$, lewa strona jest pochodną $\frac{\partial F}{\partial d}$

Punkty przecięcia prostych $F(t, y, d) = 0$ i $F_d(t, y, d) = 0$ są punktami granicznymi. Zbiór tych punktów stanowi szukaną obwiednię spełniającą warunki minimum kosztów eksploatacji. Równanie obwiedni znajduje się rugując parametr d z równań $F(t, y, d) = 0$ i $F_d(t, y, d) = 0$. W rezultacie otrzymuje się funkcję uwikłaną:

$$F(t, y, d(t, y)) = 0 \tag{7}$$

Wykorzystując właściwości obwiedni rodziny prostych dążymy do wskazania budynku o najekonomiczniejszych, najniższych kosztach eksploatacji. Wartości t będzie odpowiadał pewien punkt G położony na obwiedni. Wiemy, że w tym punkcie obwiednia będzie miała tylko jedną styczną. Styczna będzie należała do rodziny prostych związanych z tą obwiednią. W celu znalezienia równania tej stycznej wystarczy obliczyć pochodne cząstkowe względem t równania (7).

Mamy wówczas:

$$\frac{\partial F(t, y, d(t, y))}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

Wyznaczenie $y'(t)$ stanowi tangens kąta nachylenia tej stycznej do dodatniego kierunku osi t. Jest to zatem tangens kąta nachylenia jednej z prostych rodziny, a więc spełniającej warunek minimalizacji kosztów. Z kolei należy wyznaczyć pochodną cząstkową względem t z równania rodziny prostych $F(t, y, d) = 0$.

Mamy więc:

$$\frac{\partial F(t, y, d)}{\partial t} = 0 \qquad (9)$$

Porównując równania (8) i (9) wyznaczamy parametr d.

6. Przykład

Z danego osiedla mieszkaniowego wzięto pod uwagę 7 budynków mieszkalnych o różnej wartości użytkowej. Każdy z tych budynków w czasie eksploatacji ponosił różne koszty eksploatacji. Zależności kosztów eksploatacji od czasu użytkowania przedstawiają równania:

budynek 1	$y = 97{,}5\ t + 13$
budynek 2	$y = 45\ t + 25$
budynek 3	$y = 75\ t + 17$
budynek 4	$y = 120\ t + 11$
budynek 5	$y = 30\ t + 33$
budynek 6	$y = 22{,}5\ t + 40$
budynek 7	$y = 60\ t + 20$

Biorąc pod uwagę koszty eksploatacji stawiamy pytanie, który z powyższych budynków jest najbardziej ekonomiczny?

Rozwiązanie. Zgodnie z punktem 5 w pierwszej kolejności powinniśmy zbadać istnienie związku między parametrami a i b. Związek ten określimy obliczając odchylenia standardowe, a następnie współczynnik korelacji. Szczegółowe obliczenia wykazały, że odchylenie standardowe δa dla parametrów a_i wynosi 33, dla parametrów b_i wynosi $\delta_\delta = 9{,}9$. Współczynnik korelacji wyniósł $r = -0{,}935$. Ostatecznie zależność między a i b ma postać:

$$y = -3{,}21^{b}$$

Po analizie dochodzimy do wniosku, że zależność między a i b ma postać:

$$y = 15\, d \cdot t + \frac{100}{d + 1} \qquad d > 0 \qquad (10)$$

Jest to równanie rodziny prostych. Szukamy obwiedni tej rodziny rozwiązując równanie:

$$y - 15\, d \cdot t - \frac{100}{d + 1} = 0.$$

Obliczając pochodną i przyrównując ją do zera otrzymamy:

$$\frac{\partial\left(y - 15\, dt - \frac{100}{d + 1}\right)}{\partial d} = 0.$$

Otrzymujemy więc:

$$- 15\, t + \frac{100}{(d + 1)^2} = 0, \qquad \text{skąd} \quad d = \frac{10}{\sqrt{15t}} - 1.$$

Z powyższego otrzymamy dla $d = 0$, $t = 6\frac{2}{3}$. Rugując następnie parametr d i wstawiając go do równania (10) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &1^0 \quad y = 20\sqrt{15\, t} - 15\, t, \quad \text{dla} \quad t < 6\tfrac{2}{3} \ \text{i} \ t > 6\tfrac{2}{3} \\ &2^0 \quad y = 100, \qquad\qquad\quad \text{dla} \quad t = 6\tfrac{2}{3} \end{aligned} \tag{11}$$

Jest to obwiednia rodziny prostych, spełniająca warunek minimum kosztów eksploatacji w całym obszarze. W celu zbadania jej przebiegu obliczmy jej pierwszą pochodną względem t:

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{150}{\sqrt{15t}} - 15 \qquad \text{dla } t \leqslant 6\tfrac{2}{3}.$$

Obwiednia jest funkcją rosnącą, ponieważ $y'(t) > 0$ dla $x \leqslant 6\frac{2}{3}$. Pochodna $y'(t)$ stanowi tangens kąta nachylenia stycznej do obwiedni w punkcie t. Ta styczna jest zarazem jedną z prostych z rodziny, czyli jedną z funkcji kosztów eksploatacji. W celu wyznaczenia równania dla szukanej krzywej kosztów eksploatacji obliczmy pochodną cząstkową względem t z równania $F(t, y, d) = 0$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\left(15d \cdot t + \frac{100}{d + 1}\right)}{dt} = 15\, d$$

Z uwagi, że obydwa tangensy kąta muszą być sobie równe, otrzymamy:

$$15\,d = \frac{150}{\sqrt{15\,t}} - 15 \qquad \text{stąd} \quad d = \frac{10}{\sqrt{15\,t}} - 1$$

Dla wielkości $t = 0,5$ roku otrzymujemy $d = 2,65$. Po podstawieniu uzyskanego wyniku do równania (10) otrzymamy:

$$y = 39,8\,t + 27,4$$

Jest to równanie prostej "bezwzględnie najkorzystniejszej" stycznej w punkcie $t = 0,5$ do obwiedni. Oznacza to także, że budynek nr 5 ponosi koszty eksploatacji zbliżone do najbardziej ekonomicznych.

7. Uwagi końcowe

W świetle dotychczasowych rozważań widzimy, że przedstawiona metoda pozwala ocenić zrealizowane budynki mieszkalne w zależności od ponoszonych kosztów eksploatacji. Prezentowana metoda przyjmuje najprostszy przypadek, tzn. gdy koszty eksploatacji rosną prostoliniowo. W tym przypadku istnieje możliwość wskazania wartości użytkowej budynku, który ponosi optymalną wielkość kosztów eksploatacji.

Okazuje się, że jeżeli znamy choćby w przybliżeniu (liniowy) przebieg przyszłych kosztów eksploatacji, istnieje możliwość - na etapie projektowania - zastosowania rachunku ekonomicznej efektywności budynków mieszkalnych. Powstają możliwości dokonania optymalnego wyboru realizacji budynków mieszkalnych. Jednakże trzeba podkreślić, że w rzeczywistości proces wzrostu kosztów eksploatacji w czasie przebiega krzywoliniowo (parabolicznie). W rezultacie należałoby się zastanowić, jak dokonać optymalizacji kosztów eksploatacji w tym przypadku. W szczególności chodzi tu o przewidywanie wielkości tych kosztów, a także możliwość skonstruowania równania rodziny funkcji kosztów eksploatacji. Te problemy wymagają odrębnego opracownia.

Stanisław Wieteska

ATTEMPT AT OPTIMIZATION OF EXPLOITATION COSTS OF COOPERATIVE RESIDENTIAL BUILDINGS

One of essential elements of the economic calculus in the housing economy are problems of costs of exploitation and maintenance of residential buildings. The main point here is rationalization of the level of these costs.

The article is an attempt to present a method, which indicates buildings characterized by optimal levels of costs of their exploitation and maintenance. The presented method accepts the simplest case, that is when analyzed costs grow rectilinearly. The idea of this method boils down to analysis of an envelope of a set of functions of exploitation and maintenance costs of residential buildings.