ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 274, 2012

Anna Szymańska[*]

WYZNACZANIE SKŁADKI NETTO NA PODSTAWIE PRÓBY DLA RÓŻNYCH ROZKŁADÓW WIELKOŚCI SZKÓD W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH

1. ZASADY WYZNACZANIA SKŁADEK NETTO W UBEZPIECZENIACH

Jednym z podstawowych zagadnień matematyki aktuarialnej jest szacowanie wysokości składek netto. Metody wyznaczania składek netto zależą od działu i grupy ubezpieczeń. Odpowiednio oszacowane składki powinny zapewniać równowagę finansową ubezpieczyciela oraz jego konkurencyjność na rynku ubezpieczeniowym. W praktyce ubezpieczeniowej metody wyznaczania składek w przypadku konkretnego ubezpieczyciela są objęte tajemnicą.

W ubezpieczeniach majątkowych i pozostałych osobowych podstawą obliczenia składki jest oszacowanie składki netto na podstawie przewidywanej liczby i wielkości roszczeń, czyli na podstawie oceny i pomiaru ryzyka ubezpieczeniowego. Składka netto jest zatem funkcją określoną na zmiennej losowej, opisującej wielkość szkody.

Niech $\Pi(X)$ oznacza wysokość składki netto za ochronę przed stratą o wielkości X, gdzie X jest zmienną losową. Najczęściej spotykane w literaturze przedmiotu zasady wyznaczania funkcjonału składki[1]:

1. Zasada czystej składki (równoważności składki netto)

$$\Pi(X) = EX \tag{1}$$

2. Zasada wartości oczekiwanej

$$\Pi(X) = (1+\gamma)EX \tag{2}$$

gdzie $\gamma \geq 0$ nazywa się współczynnikiem bezpieczeństwa.

[*] Dr, Katedra Metod Statystycznych, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Uniwersytet Łódzki, 90-214 Łódź, ul Rewolucji 1905 r. nr 41/43.

[1] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston 2001.

3. Zasada wariancji

$$\Pi(X) = EX + \gamma VarX,\ \gamma \geq 0 \tag{3}$$

4. Zasada odchylenia standardowego

$$\Pi(X) = EX + \gamma\sqrt{VarX},\ \gamma \geq 0 \tag{4}$$

5. Zasada odchylenia absolutnego

$$\Pi(X) = EX + \gamma E\left|X - Me_S\right|,\ \gamma \geq 0 \tag{5}$$

6. Zasada percentylu (kwantyla rzędu ε)

$$\Pi(X) = \min\{x : F(x) \geq 1 - \varepsilon\} = F_X^{-1}(1 - \varepsilon) \tag{6}$$

7. Zasada maksymalnej straty

$$\Pi(X) = pEX + (1 - p)\max(X),\ p \geq 0 \quad i \quad \max(X) < \infty \tag{7}$$

8. Zasada zerowej użyteczności obejmuje grupę metod wyznaczania składki uwzględniającą preferencje ubezpieczyciela, posiadającego majątek w, wyrażone przy pomocy funkcji użyteczności $u(w) = Eu\left(w + \Pi(X) - X\right)$, $w \in (-\infty, +\infty)$. Zasada zerowej użyteczności z wykładniczą funkcją użyteczności jest nazywana zasadą wykładniczą[2] i ma postać

$$\Pi(X) = \frac{1}{\alpha}\log\left(Ee^{\alpha X}\right),\ \alpha > 0,\ Ee^{\alpha X} < \infty \tag{8}$$

9. Zasada wiarygodności – składkę netto wyznacza się jako średnią ważoną składki kolektywnej μ i indywidualnej składki $\overline{x}_i$ oszacowanej na podstawie historii roszczeń w przeszłości, czyli jako

$$\Pi(X_i) = Z_i\overline{x}_i + (1 - Z_i)\mu \tag{9}$$

gdzie $Z_i \in (0,1)$.

Tak zdefiniowaną składkę nazywa się *składką zaufania* dla *i*-tego kontraktu, natomiast Z_i *współczynnikiem zaufania*.

[2] C. D. Daykin, T. Pentikäinen, M. Pesonen, *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London 1994.

2. SZACOWANIE SKŁADEK NETTO

W ubezpieczeniach komunikacyjnych wielkość szkód jest najczęściej modelowana za pomocą rozkładu gamma, logarytmiczno-normalnego i Pareto[3]. Niech zmienna losowa X oznacza wielkość szkód. Funkcje gęstości rozkładu Pareto, logarytmiczno-normalnego oraz gamma mają odpowiednio postać[4]:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta + x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \tag{10}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x}\exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0, \mu \in R, \sigma > 0 \tag{11}$$

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp(-\lambda x), \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \tag{12}$$

W przeprowadzonym eksperymencie rozważano szacowanie składek netto dla portfela o łącznej wielkości szkód typu Pareto, logarytmiczno-normalnego i gamma za pomocą wybranych zasad wyznaczania składki. W przypadku rozkładu gamma nie można wyznaczyć analitycznej postaci dystrybuanty rozkładu. W takim przypadku można estymować parametry rozkładu, takie jak mediana na podstawie próby. W przeprowadzonym badaniu wygenerowano trzy pseudopopulacje o rozkładach Pareto, logarytmiczno-normalnym i gamma – każda o liczebności 10 000 (w dalszej części pracy pseudopopulacje będziemy nazywać populacjami). Wartość oczekiwana i wariancja w wygenerowanych populacjach odpowiadają w przybliżeniu średniej i wariancji wielkości szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC publikowanych przez PIU. Z każdej populacji losowano po 10 000 razy próby o liczebności 500 (badania prowadzono również dla liczebności prób: 50, 100, 150, 200, 250, 300, 1 000 losowanych 10 000 razy z populacji; próby o liczebności 500 pozwalały dość dokładnie szacować parametry populacji – biorąc pod uwagę własności estymatorów). Dla wylosowanych prób obliczono klasyczne i pozycyjne miary struktury oraz oszacowano wartości składki netto za pomocą pięciu wybranych metod.

[3] J. Lemaire, *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Nijhoff, Boston 1995.

[4] Cz. Domański, K. Pruska, *Nieklasyczne metody statystyczne*, PWE, Warszawa 2000.

Tabela 1

Wartości miar dla prób losowanych z badanych rozkładów

	Rozkład Pareto	Rozkład logarytmiczno-normalny	Rozkład Gamma
EX	4, 95	4,97	4,98
DX	5,27	5,43	5,43
D^2X	27,8200	29,4745	29,4609
Me	3,7681	3,3674	3,1821
A_s	28,5526	4,7115	2,2006
$\bar{x}_{\min}$	4,3280	4,1207	4,1250
$\bar{x}_{\max}$	6,6297	5,9608	5,9035
$\tilde{x}$	4,9498	4,9835	4,9999
$MSE(\hat{\theta})$	0,0549	0,0596	0,0596
$S_{\min}$	2,0544	3,5490	4,1951
$S_{\max}$	21,8361	9,4405	6,7058
Me_S	3,8534	5,2274	5,4051
$\tilde{S}_x^2$	27,3832	29,5918	29,4562
$V_S^{\min}$	45,9654	80,1304	92,8957
$V_S^{\max}$	360,5762	170,7191	130,9041
$Me_{\min}$	3,5418	2,7866	2,5293
$Me_{\max}$	4,0746	4,0431	4,1110
$\widetilde{Me}$	3,7745	3,3819	3,2120
d_{Me}	0,0553	0,1265	0,1850

Źródło: obliczenia własne.

EX – wartość oczekiwana populacji;
DX – odchylenie standardowe populacji;
Me – mediana populacji;

$$A_s = \frac{E(X - EX)^3}{D^3X}$$ – współczynnik asymetrii populacji;

$\bar{x}_{\min}$ – minimalna wartość średnich arytmetycznych z n-elementowej próby dla r repetycji;

$\bar{x}_{\max}$ – maksymalna wartość średnich arytmetycznych z n-elementowej próby dla r repetycji;

$\tilde{x} = \frac{1}{r}\sum_{j}^{r}\bar{x}_j$ – estymator średniej arytmetycznej dla próby o liczebności n z r-repetycji;

$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_i^{(j)}$ – średnia arytmetyczna dla j-tej repetycji;

$MSE(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta}-\theta)^2) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\left(\bar{x}_j - EX\right)^2$ – błąd średniokwadratowy estymatora $\hat{\theta} = EX$;

$S_{\min}$ – minimalna wartość odchyleń standardowych z n-elementowej próby dla r repetycji;

$S_{\max}$ – maksymalna wartość odchyleń standardowych z n-elementowej próby dla r repetycji;

$\tilde{S}_x^2 = \frac{1}{nr}\sum_{k}^{nr} x_k^2 - (\tilde{x})^2$ – estymator wariancji dla próby o liczebności n z r-repetycji;

Me_S – mediana odchyleń standardowych z n-elementowej próby dla r repetycji;

$V_S^{\min}$ – minimalna wartość współczynników zmienności z n-elementowej próby dla r repetycji;

$V_S^{\max}$ – maksymalna wartość współczynników zmienności z n-elementowej próby dla r repetycji;

$Me_{\min}$ – minimalna wartość median z n-elementowej próby dla r repetycji;

$Me_{\max}$ – maksymalna wartość median z n-elementowej próby dla r repetycji;

$\widetilde{Me} = \frac{1}{r}\sum_{j}^{r} Me_j$ – średnia arytmetyczna median z r-repetycji;

Me_j – mediana z j-tej repetycji;

$d_{Me} = \frac{1}{r}\sum_{j}^{r}\left|Me_j - Me\right|$ – odchylenie przeciętne mediany.

Dla badanych rozkładów wielkości szkód oszacowano za pomocą wybranych metod składki netto. Składki wyznaczono: dla próby na podstawie uzyskanych estymatorów parametrów z 10 000 repetycji oraz dla populacji na podstawie parametrów populacji. Wyniki prezentuje tab. 2.

Tabela 2

Wartości składki netto (j.p.) obliczone różnymi metodami

	Zasada wyznaczania składki netto				
	czystej składki	wartości oczekiwanej $\gamma = 1$	wariancji $\gamma = 1$	odchylenia standardowego $\gamma = 1$	kwantyla rzędu 0,5
Populacja (Pareto)	4,9535	9,907	32,77385025	10,228	3,7681
Próba (Pareto)	4,9498	9,8996	32,33199584	10,1826	3,7745
Populacja (log-norm)	4,9796	9,9592	34,453641	10,4086	3,3674
Próba (log-norm)	4,9835	9,967	34,57492404	10,4233	3,3819
Populacja (gamma)	4,9973	9,9946	34,45831284	10,4251	3,1821
Próba (gamma)	4,9999	9,9998	34,77001844	10,4561	3,212

Próba – wartość składki netto obliczona na podstawie estymatorów wartości oczekiwanej i mediany uzyskanych w 10 000 repetycjach;

Populacja – wartość składki netto obliczona na podstawie parametrów populacji.

Źródło: jak do tab. 1.

Tabele 3–5 prezentują składki netto dla trzech typów rozkładów oszacowane na podstawie: minimalnych i maksymalnych wartości średniej arytmetycznej i mediany uzyskanych w 10 000 repetycjach; estymatorów parametrów populacji uzyskanych w 10 000 repetycjach oraz na podstawie parametrów populacji. Wartość wariancji we wszystkich obliczeniach dla prób przyjęto równą estymatorowi wariancji wyznaczonemu w 10 000 repetycjach.

Tabela 3

Wartości składki netto (j.p.) obliczone różnymi metodami dla rozkładu Pareto

	Zasada wyznaczania składki netto				
	czystej składki	wartości oczekiwanej $\gamma = 1$	wariancji $\gamma = 1$	odchylenia standardowego $\gamma = 1$	kwantyla rzędu 0,5
Próba (min)	4,328	8,656	31,71019584	9,5608	3,5418
Próba (est)	4,9498	9,8996	32,33199584	10,1826	3,7745
Próba (max)	6,6297	13,2594	34,01189584	11,8625	4,0746
Populacja	4,95	9,9	32,7229	10,22	3,7681

Próba (min) – wartość składki netto obliczona na podstawie minimalnych wartości średniej arytmetycznej i mediany uzyskanych w 10 000 repetycjach;

Próba (est) – wartość składki netto obliczona na podstawie estymatorów wartości oczekiwanej i mediany uzyskanych w 10 000 repetycjach;

Próba (max) – wartość składki netto obliczona na podstawie maksymalnych wartości średniej arytmetycznej i mediany uzyskanych w 10 000 repetycjach;

Populacja – wartość składki netto obliczona na podstawie parametrów populacji.

Źródło: jak do tab. 1.

Tabela 4

Wartości składki netto (j.p.) obliczone różnymi metodami dla rozkładu logarytmiczno-normalnego

	Zasada wyznaczania składki netto				
	czystej składki	wartości oczekiwanej $\gamma = 1$	wariancji $\gamma = 1$	odchylenia standardowego $\gamma = 1$	kwantyla rzędu 0,5
Próba (min)	4,1207	8,2414	33,71212404	9,5605	2,7866
Próba (est)	4,9835	9,967	34,57492404	10,4233	3,3819
Próba (max)	5,9608	11,9216	35,55222404	11,4006	4,0431
Populacja	4,97	9,94	34,4549	10,4	3,3674

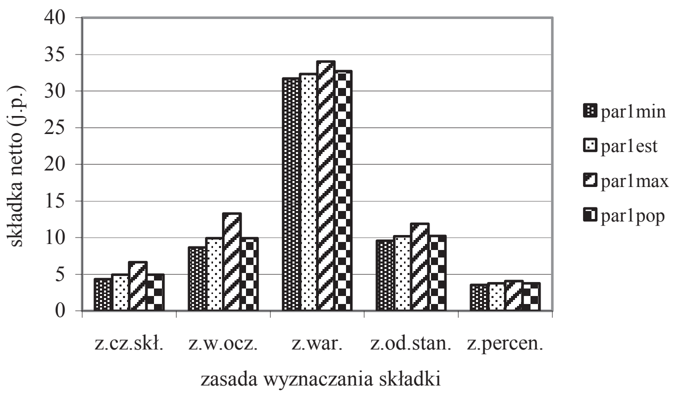
Źródło: jak do tab. 1.

Tabela 5

Wartości składki netto (j.p.) obliczone różnymi metodami dla rozkładu gamma

	Zasada wyznaczania składki netto				
	czystej składki	wartości oczekiwanej $\gamma = 1$	wariancji $\gamma = 1$	odchylenia standardowego $\gamma = 1$	kwantyla rzędu 0,5
Próba (min)	4,125	8,25	33,89511844	9,5812	2,593
Próba (est)	4,9999	9,9998	34,77001844	10,4561	3,212
Próba (max)	5,9035	11,807	35,67361844	11,3597	4,111
Populacja	4,98	9,96	29,7804	9,96	3,1821

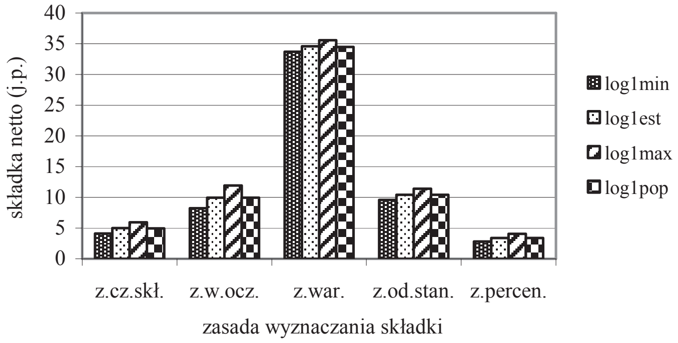
Źródło: jak do tab. 1.



Rys. 1. Wartość składki netto wyznaczonej różnymi metodami dla rozkładu Pareto

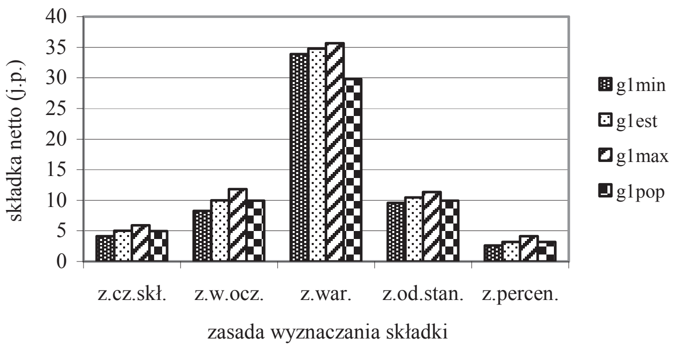
z.cz.skł. – zasada czystej składki; z.w.ocz. – zasada wartości oczekiwanej; z.war. – zasada wariancji; z.od.stan. – zasada odchylenia standardowego; z.percen. – zasada percentylu.

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 2. Wartość składki netto wyznaczonej różnymi metodami dla rozkładu logarytmiczno-normalnego

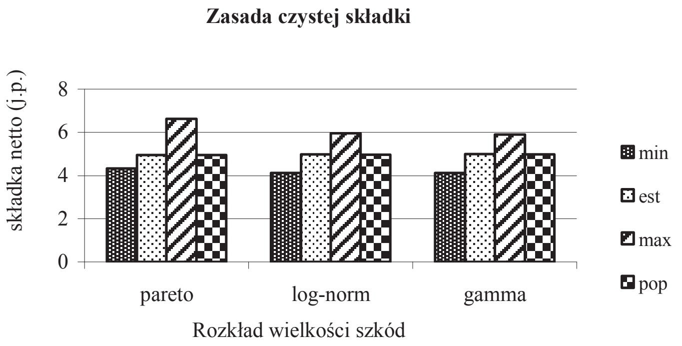
Ź r ó d ł o: jak do rys. 1.

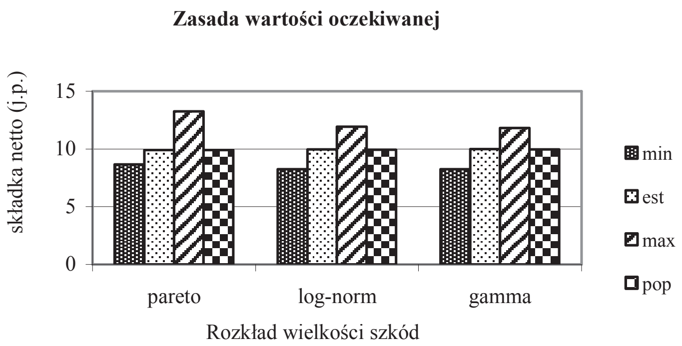


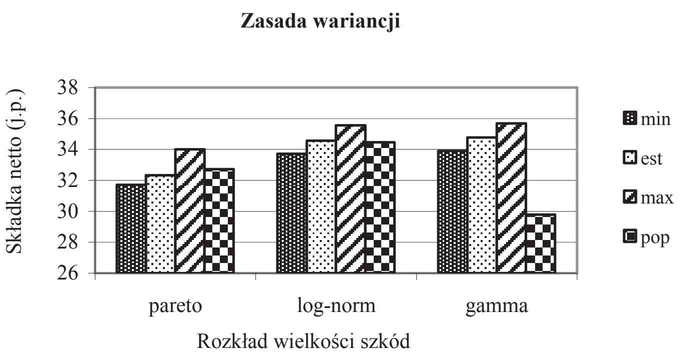
Rys. 3. Wartość składki netto wyznaczonej różnymi metodami dla rozkładu gamma

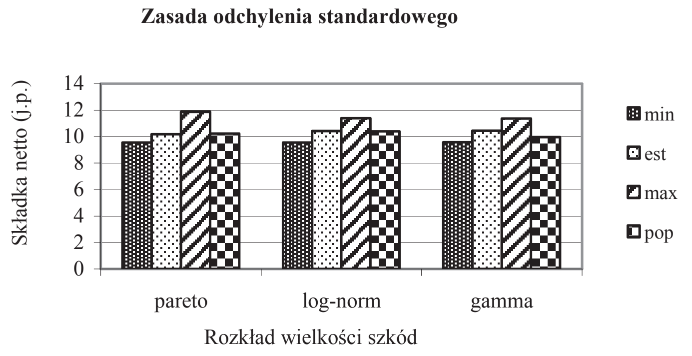
Ź r ó d ł o: jak do rys. 1.

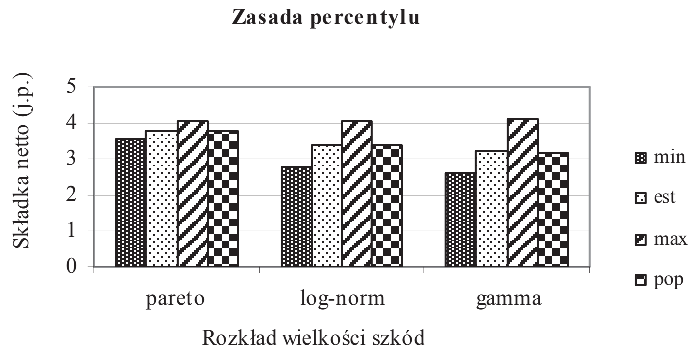
W tab. 6 obliczono rozpiętość mierzoną jako różnicę między: składką oszacowaną na podstawie maksymalnej wartości średniej arytmetycznej i mediany oraz minimalnej wartości średniej i mediany w 10 000 repetycjach.


Zasada czystej składki
składka netto (j.p.)
8
6
4
2
0
pareto
log-norm
gamma
Rozkład wielkości szkód
min
est
max
pop


Zasada wartości oczekiwanej
składka netto (j.p.)
15
10
5
0
pareto
log-norm
gamma
Rozkład wielkości szkód
min
est
max
pop


Zasada wariancji
Składka netto (j.p.)
38
36
34
32
30
28
26
pareto
log-norm
gamma
Rozkład wielkości szkód
min
est
max
pop





Rys. 4. Wartość składki netto według zasad wyznaczania składki oraz rozkładów wielkości szkód

Źródło: jak do rys. 1.

Tabela 6

Rozpiętość wartości szacowanych składek według metody wyznaczania składki i rozkładu wielkości szkód

Rozkład	Rozpiętość szacowanych składek				
	czystej składki	wartości oczekiwanej $\gamma = 1$	wariancji $\gamma = 1$	odchylenia standardowego $\gamma = 1$	kwantyla rzędu 0,5
Pareto	2,3017	4,6034	2,3017	2,3017	0,5328
Log-norm	1,8401	3,6802	1,8401	1,8401	1,2565
Gamma	1,7785	3,557	1,7785	1,7785	1,518

Źródło: jak do tab. 1.

3. PODSUMOWANIE

Uzyskane estymatory parametrów badanych rozkładów mają dobre własności. Wartości składek netto dla prób i populacji szacowane tymi samymi metodami nie różnią się istotnie. Oznacza to, że próba o liczebności 500 elementów pozwala dobrze oszacować parametry populacji oraz wysokość składki netto. Wyjątek stanowi składka szacowana metodą wariancji w przypadku rozkładu gamma – różniąca się co do wartości w przypadku populacji i próby.

W badaniu oszacowano również składki na podstawie najmniejszych i największych wartości parametrów uzyskanych w 10 000 repetycjach. Składki wyznaczone tą samą metodą na podstawie minimalnych i maksymalnych wartości średniej arytmetycznej i mediany różnią się co do wartości. W celu oceny różnic obliczono rozpiętości uzyskanych składek wyznaczanych tą samą metodą dla badanych rozkładów (wyniki prezentuje tab. 6). Największe różnice widać w przypadku rozkładu Pareto, co wynika z bardzo silnej asymetrii tego rozkładu. Dla badanych rozkładów największe rozpiętości otrzymano w przypadku składki wyznaczanej metodą wartości oczekiwanej, najmniejsze w przypadku zasady kwantyla rzędu 0,5. Zasada percentylu daje bardzo dobre wyniki w przypadku silnej asymetrii rozkładu (w tym przypadku rozkładu Pareto – tab. 6).

Składki netto obliczone za pomocą tej samej metody dla rozkładów wielkości szkód Pareto, logarytmiczno-normalnego i gamma, mają zbliżone wartości. Jest to wynik prawie jednakowych parametrów badanych rozkładów. Stąd wniosek, że większy wpływ na wysokość składki netto mają parametry rozkładu niż sama jego postać. Metoda szacowania składki netto ma jednak bardzo duży wpływ na wysokość składki, zwłaszcza w przypadku asymetrycznych rozkładów wielkości szkód. Największe wartości składki otrzymano dla metody wariancji (składka około 34 j.p.), najmniejsze dla metody pecentylu (składka około 3,4 j.p.).

Anna Szymańska

SETTING OF THE NET PREMIUM ON THE BASE OF THE SAMPLE FOR DIFFERENT DAMAGE SIZE DISTRIBUTION IN THE COMMUNITY INSURANCE

In the insurance theory a lot of methods of the net premium setting can be found. In the paper chosen theoretical methods of the net premiums setting in property insurance are presented. The influence of the damage size distribution on the size of the net premiums in community insurance estimated by different methods has been examined. Three size distributions of the damage size have been considered: the Pareto distribution, the logarithmic-normal distribution and the gamma distribution.

Key words: net premium, damage size distribution.