

*Lesław Gajek\**

## LOSOWA FLUKTUACJA WYNIKÓW WYCENY PLANÓW EMERYTALNYCH<sup>1</sup>

**STRESZCZENIE.** W niniejszej pracy oszacowano statystyczną fluktuację wyników wyceny (za pomocą metody kredytu jednostkowego) zobowiązań planu emerytalnego. Pokazano, że wariancja względnej odchyłki wyniku wyceny od wyceny właściwej maleje wraz ze wzrostem stopy dyskontowej. Podano postać przybliżoną, przy wykorzystaniu centralnego twierdzenia granicznego, 95% przedziału ufności dla względnej odchyłki wyniku wyceny. Przy małych wartościach stopy dyskontowej i planach o liczności 250 członków, przedział ufności może mieć długość nawet rzędu 20%.

### I. WSTĘP

Podstawowymi parametrami wyceny planu emerytalnego są: koszt normalny, narosłe zobowiązania oraz deficyt aktuarialny. W celu wyliczenia tych parametrów korzystamy ze współczynników  $\ddot{a}_y^{(12)}$ , które oznaczają oczekiwaną wartość obecnie dożywotniej renty o wysokości 1/12 jednostki, płatnej z góry co miesiąc do końca życia emeryta w wieku  $y$ . Współczynniki  $\ddot{a}_y^{(12)}$  są z kolei obliczane na podstawie rozkładu długości życia w populacji. Pierwszym źródłem niepewności wyników wyceny planów emerytalnych jest różnica między **rzeczywistym** a **oszacowanym** przez aktuarium rozkładem długości życia w populacji. Używając terminologii statystycznej można by postawić na przykład pytanie, czy średni czas dalszego życia emeryta w wieku  $y$  jest oszacowany w sposób nieobciążony.

---

\* Prof., Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka.

<sup>1</sup> Praca zrealizowana w ramach Grantu KBN No. 1 H02B 018 14.

Jeżeli nawet odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, rodzą się natychmiast następujące dwa pytania:

- 1) jak duże mogą być losowe fluktuacje czasu pobierania emerytury z planu?
- 2) jak oszacować losowe fluktuacje wyceny zobowiązań w planie emerytalnym?

Odpowiedź na pierwsze pytanie można znaleźć w monografii (Anderson 1992), natomiast drugie pytanie według naszej najlepszej wiedzy pozostaje nadal bez odpowiedzi. Tymczasem oszacowanie losowej fluktuacji wyceny zobowiązań planu jest niezbędne dla oceny wiarygodności bilansu aktywów i pasywów planu, jak również dla określenia odpowiedniej strategii inwestowania oraz budowania rezerw. Dlatego w tej pracy zajmiemy się udzieleniem odpowiedzi na drugie pytanie. W tym celu najpierw przeanalizujemy szczegółowo model z ciągłym rozkładem czasu trwania dalszego życia i z ciągłą kapitalizacją (część II). W części III oszacujemy oczekiwaną wielkość kwadratu względnego odchylenia wyceny zobowiązań planu, określonych za pomocą metody **kredytu jednostkowego**, od zobowiązań faktycznych. Nie będziemy natomiast analizować precyzji przewidywań aktuarialisty, dotyczących zakończenia aktywnego uczestnictwa w planie z przyczyn emerytalnych lub poza emerytalnych. Odchylenia przewidywań aktuarialisty od faktycznego rozwoju planu są podstawą do określenia aktuarialnego zysku lub straty, zagadnienie to jest szczegółowo omawiane na przykład w (Anderson 1992). Problematyce planów emerytalnych poświęcone są również pozycje: (Bacinello 2000), (Boyle 1998) i (Logue, Rader 1998).

## II. MODEL STOCHASTYCZNY

Część wyników prezentowanych w tym paragrafie można znaleźć w (Anderson 1992), tym niemniej zamieszczamy je tutaj dla wygody Czytelnika. Niektóre wyniki, na przykład dotyczące oszacowań dla współczynnika zmienności  $\tau_T$ , wydają się być wcześniej nieznanymi.

Przypuśćmy, że emerytury płacone są w sposób ciągły oraz że odsetki są kapitalizowane w sposób ciągły ze stałą intensywnością  $\delta(t) = \delta$ . Niech  $T$  oznacza dalszy czas życia przypadkowego uczestnika planu (o z góry określonej bądź dowolnej płci), który dożył wieku  $x$ . Będziemy przyjmować, że  $T$  jest zmienną losową typu ciągłego o gęstości rozkładu  $f$ . Wówczas

$$P(t \leq T \leq t + dt) = f(t)dt$$

przy czym

$$f(t) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}, \quad (2.1)$$

gdzie  ${}_t p_x$  jest prawdopodobieństwem przeżycia przez uczestnika co najmniej  $t$  lat (pod warunkiem, że dożył wieku  $x$ ), natomiast  $\mu_{x+t}$  jest funkcją hazardu zmiennej losowej  $T$ . Zauważmy, że wartość oczekiwana  $T$ ,  $ET \equiv \overset{\circ}{e}_x$ , wyraża się następującym wzorem

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt \quad (2.2)$$

natomiast wariancja  $T$ ,  $\text{Var}T \equiv \sigma^2$ , wyraża się wzorem

$$\sigma^2 = 2 \int_0^{\infty} {}_t p_x dt - (\overset{\circ}{e}_x)^2 \quad (2.3)$$

(zobacz np. Gerber 1995). W tym paragrafie, zamiast  $\ddot{a}_y^{(12)}$ , rozważać będziemy oczekiwaną wartość obecną  $\bar{a}_x$ , dyskontowanej w sposób ciągły renty dożywotniej o jednostkowej nominalnej wartości rocznej. Jak wiadomo (patrz np. Gerber 1995)

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &\equiv E \bar{a}_T = \int_0^{\infty} \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta t}) f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\delta} (1 - e^{-\delta t}) \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} \bar{A}_x \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie  $\bar{A}_x$  oznacza jednorazową składkę netto na zakup dla danej osoby ubezpieczenia o wysokości jednostkowej płatnego w chwili śmierci. Pokażemy, że  $\bar{a}_x$  jest malejącą funkcją argumentu  $\delta$ . W tym celu obliczamy pochodną

$$\frac{d}{d\delta} \bar{a}_x = \frac{1}{\delta^2} \int_0^{\infty} [(\delta t + 1)e^{-\delta t} - 1] f(t) dt \quad (2.5)$$

Ponieważ dla dowolnego  $\delta > 0$  i  $t > 0$  zachodzi nierówność

$$\delta t + 1 < e^{\delta t},$$

dlatego dla każdego  $t > 0$ ,

$$(\delta t + 1)e^{-\delta t} - 1 < 0.$$

Uwzględniając powyższe w (2.5), otrzymujemy, że  $\frac{d}{d\delta} \bar{a}_x < 0$  dla każdego  $\delta > 0$ . A zatem  $\bar{a}_x$  jest malejącą funkcją argumentu  $\delta$ . Z tego i z (2.4) wynika, że

$$\begin{aligned} \sup_{\delta > 0} \bar{a}_x &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \bar{a}_x = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} t f(t) dt = ET = e_x. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dla naszych celów kluczowe znaczenie mają losowe odchyłki zmiennej losowej  $\bar{a}_T$  od jej wartości oczekiwanej  $\bar{a}_x$ . Miarą wielkości tych odchyłek jest  $\text{Var} \bar{a}_T$ . Oczywiście

$$\begin{aligned} \text{Var} \bar{a}_T &= \int_0^{\infty} \bar{a}_T^2 f(t) dt - \bar{a}_x^2 = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} \right) f(t) dt - \left[ \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} f(t) dt \right]^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \bar{a}_T^2 f(t) dt &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} \right]^2 f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\delta^2} - \frac{2}{\delta^2} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(t) dt + \frac{1}{\delta^2} \int_0^{\infty} e^{-2\delta t} f(t) dt, \end{aligned}$$

dlatego, korzystając z (2.7) i (2.4), otrzymujemy

$$\text{Var}\bar{a}_{\overline{T}} = \delta^{-2} \left[ \int_0^{\infty} e^{-2\delta t} f(t) dt - \left( \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(t) dt \right)^2 \right]. \quad (2.8)$$

Pokażemy, że  $\text{Var}\bar{a}_{\overline{T}}$  jest malejącą funkcją  $\delta$ . W tym celu policzymy pochodną  $\frac{d}{d\delta} \text{Var}\bar{a}_{\overline{T}}$ . Z (2.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} \text{Var}\bar{a}_{\overline{T}} &= 2\delta^{-3} \left\{ -\int_0^{\infty} \delta t e^{-2\delta t} f(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(t) dt \cdot \int_0^{\infty} \delta t e^{-\delta t} f(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \int_0^{\infty} e^{-2\delta t} f(t) dt - \left( \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(t) dt \right)^2 \right] \right\} = \\ &= 2\delta^{-3} \left[ -\int_0^{\infty} (\delta t + 1) e^{-2\delta t} f(t) dt + \int_0^{\infty} (\delta t + 1) e^{-\delta t} f(t) dt \cdot \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(t) dt \right] \quad (2.9) \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\frac{d}{d\delta} \text{Var}\bar{a}_{\overline{T}} = 2\delta^{-3} \left[ -\int hgf + \int hf \cdot \int gf \right],$$

gdzie  $h(t) = (\delta t + 1) \exp(-\delta t)$  oraz  $g(t) = \exp(-\delta t)$ . Ponieważ obie funkcje  $g$  i  $h$  są ściśle malejące dla  $\delta > 0$ , z nierówności Czebyszewa wynika, że

$$\frac{d}{d\delta} \text{Var}\bar{a}_{\overline{T}} < 0,$$

a zatem  $\text{Var}\bar{a}_{\overline{T}}$  jest funkcją malejącą parametru  $\delta$  dla  $\delta > 0$ . Stąd wynika, że

istnieje granica  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{d\delta} \text{Var}\bar{a}_{\overline{T}}$ , być może równa  $+\infty$ , i że jest to jej największa możliwa wartość. Policzymy zatem tę granicę:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{Var} \bar{a}_{\bar{T}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left[ \left( \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} \right)^2 - \left( \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\delta s}}{\delta} f(s) ds \right)^2 \right] f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ t^2 - \left( \int_0^{\infty} s f(s) ds \right)^2 \right] f(t) dt = \text{Var} T, \end{aligned} \quad (2.10)$$

przy założeniu, że  $\text{Var} T < \infty$ , które przyjmujemy, że jest zawsze spełnione. A zatem największa możliwa odchyłka  $\bar{a}_{\bar{T}}$  od  $\bar{a}_x$ , mierzona za pomocą wariancji, jest równa  $\text{Var} T$ .

Rozważmy teraz współczynnik zmienności  $\tau_{\bar{a}_{\bar{T}}}$  zmiennej losowej  $\bar{a}_{\bar{T}}$ . Z definicji

$$\tau_{\bar{a}_{\bar{T}}} = \frac{\sqrt{\text{Var} \bar{a}_{\bar{T}}}}{E \bar{a}_{\bar{T}}}, \quad (2.11)$$

przy czym, jak pokazaliśmy powyżej, licznik i mianownik prawej strony (2.11) są funkcjami malejącymi parametru  $\delta$ . Dlatego z dotychczasowych rozważań nie wynika, czy  $\tau_{\bar{a}_{\bar{T}}}$  jest malejącą, rosnącą, stałą, czy jeszcze innego rodzaju funkcją parametru  $\delta$ . Udowodnimy, że w istocie jest to funkcja ściśle malejąca. Korzystając z (2.4) i (2.7),  $\tau_{\bar{a}_{\bar{T}}}^2$  można zapisać w postaci

$$\tau_{\bar{a}_{\bar{T}}}^2 = \frac{\int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t})^2 f(t) dt}{\left[ \int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) f(t) dt \right]^2} - 1.$$

Oznaczmy  $\tau_{\bar{a}_{\bar{T}}}^2$ , traktowane jako funkcję parametru  $\delta$ , przez  $\phi(\delta)$ . Wówczas

$$\phi'(\delta) = 2 \frac{\int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) t e^{-\delta t} f(t) dt \int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) f(t) dt}{\left[ \int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) f(t) dt \right]^3} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t})^2 f(t) dt \int_0^{\infty} t e^{-\delta t} f(t) dt}{\left[ \int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) f(t) dt \right]^3} = \\
& = 2 \frac{\int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) f(t) dt \int_0^{\infty} t e^{-\delta t} f(t) dt}{\left[ \int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) f(t) dt \right]^3} \times \\
& \quad \times \left[ \int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) \frac{t e^{-\delta t} f(t)}{\int_0^{\infty} t e^{-\delta t} f(t) dt} dt - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) \frac{(1 - e^{-\delta t}) f(t)}{\int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) f(t) dt} dt \right]. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym (oznaczymy je przez  $\alpha$ ) jest postaci

$$\alpha = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) g_1(t) dt - \int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) g_2(t) dt, \tag{2.13}$$

gdzie

$$g_1(t) = \frac{t e^{-\delta t} f(t)}{\int_0^{\infty} t e^{-\delta t} f(t) dt}$$

oraz

$$g_2(t) = \frac{(1 - e^{-\delta t}) f(t)}{\int_0^{\infty} (1 - e^{-\delta t}) f(t) dt}$$

są gęstościami dwu rozkładów prawdopodobieństwa na półprostej  $(0, \infty)$ , których dystrybuanty oznaczymy odpowiednio przez  $G_1$  i  $G_2$ . Można pokazać, że rozkład o dystrybuancie  $G_1$  jest statystycznie zdominowany przez rozkład o dystrybuancie  $G_2$ , a następnie skorzystać z odpowiedniej nierówności dla całek względem takich rozkładów. Poniżej pokażemy, nie korzystając ze wspomnianej

własności dystrybuant  $G_1$  i  $G_2$ , że  $\alpha < 0$ . Zauważmy, że  $g_1$  i  $g_2$  są różniczkowalne, przy czym dla pewnej stałej  $c$  (zależącej być może od  $\delta$ ),

$$\frac{g_2(t)}{g_1(t)} = c \frac{e^{\delta t} - 1}{t}$$

jest dla  $\delta > 0$  funkcją rosnącą zmiennej  $t$ . Istotnie, ponieważ dla dowolnych  $\delta > 0$ ,  $t > 0$  zachodzi nierówność

$$e^{-\delta t} > 1 - \delta t,$$

dlatego  $e^{-\delta t}(1 - \delta t) \leq 1$ , skąd otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{g_2}{g_1} \right) = \frac{e^{\delta t}(\delta t - 1) + 1}{t^2} > 0.$$

Ponieważ  $g_2$  i  $g_1$  są różniczkowalne, ich iloraz jest rosnący oraz obie całkują się do 1, zatem istnieje  $t_0 > 0$  takie, że dla  $t > t_0$

$$\frac{g_2(t)}{g_1(t)} > 1,$$

natomiast dla  $0 < t < t_0$  zachodzi przeciwna nierówność. Prawą stronę (2.13) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^\infty (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t}) \left[ 1 - \frac{g_2(t)}{g_1(t)} \right] g_1(t) dt = \\ &= \int_0^{t_0} (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t}) \left[ 1 - \frac{g_2(t)}{g_1(t)} \right] g_1(t) dt = \\ &= \int_0^\infty (e^{-\delta t_0} - e^{-\delta t}) \left[ 1 - \frac{g_2(t)}{g_1(t)} \right] g_1(t) dt < 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu, że w obu całkach wyrażenie podcałkowe jest ujemne. Z (2.12) i (2.14) wynika, że  $\phi'(\delta) < 0$  dla każdego  $\delta > 0$ , a zatem  $\tau_{\bar{a}_7}$  jest malejącą funkcją parametru  $\delta$ . Dlatego



$$\sup \tau_{\bar{a}_T} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\text{Var} \bar{a}_T}}{E \bar{a}_T} = \frac{\sqrt{\text{Var} T}}{ET} = \tau_T, \quad (2.15)$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z (2.6) i (2.10), natomiast  $\tau_T$  oznacza współczynnik zmienności zmiennej losowej  $T$ .

Oszacujemy wielkość  $ET$ ,  $\text{Var}T$  oraz  $\tau_T$ , w przypadku typowego rozkładu czasu trwania dalszego życia. Z wielu prac dotyczących tej tematyki wynika, że dobry opis rzeczywistej populacji w wieku emerytalnym daje model Gompertza. Zgodnie z nim

$$\mu_{x+1} = \mu_x e^{bt},$$

gdzie  $\mu_x$  jest funkcją hazardu w chwili  $x$ , natomiast  $b$  jest pewną stałą. Ponieważ

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) = \exp\left[-\frac{\mu_x}{b}(e^{bt} - 1)\right], \quad (2.16)$$

stąd i z (2.1) otrzymujemy wzór na gęstość rozkładu czasu trwania dalszego życia w modelu Gompertza:

$$f(t) = \mu_x \exp\left[bt - \frac{\mu_x}{b}(e^{bt} - 1)\right].$$

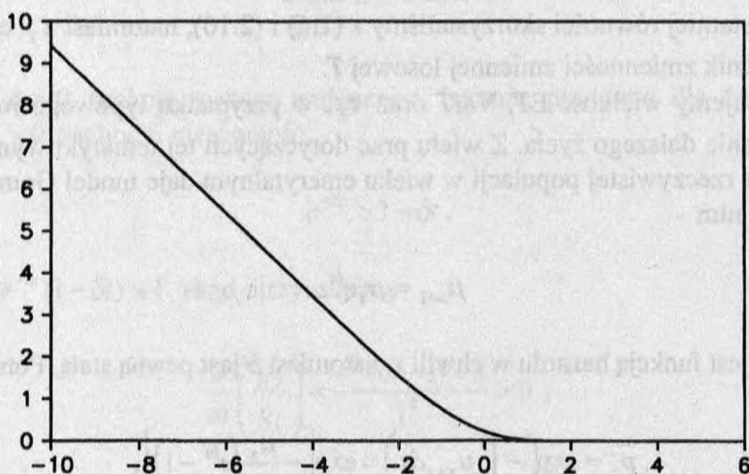
Korzystając ze wzorów (2.2) oraz (2.16), otrzymujemy

$$\begin{aligned} e_x &= \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\mu_x}{b}(e^{bt} - 1)\right] dt = \\ &= \frac{1}{b} e^{\mu_x/b} \int_{\log(\mu_x/b)}^\infty \exp(-e^u) du \equiv \\ &\equiv \frac{1}{b} e^{\mu_x/b} H\left(\log \frac{\mu_x}{b}\right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

gdzie funkcja

$$H(t) = \int_t^\infty \exp(-e^u) du$$

jest określona i różniczkowalna nieskończenie wiele razy na całej prostej. Ponadto łatwo widać, że jest to funkcja ściśle malejąca i ściśle wypukła. Wykres funkcji  $H$  podany jest na rysunku 2.1.



Rys. 2.1. Wykres funkcji  $H(t)$

Wprowadzając nowy parametr  $\theta = \log(\mu_x/b)$ , wzór (2.17) można zapisać w postaci

$$\dot{e}_x = \frac{1}{b} H(\theta) / \exp(-e^\theta). \quad (2.18)$$

Korzystając z któregośkolwiek ze standardowych programów do obliczeń numerycznych, można obliczyć ze wzoru (2.17) lub (2.18) wartość  $\dot{e}_x$  dla interesujących nas parametrów  $\mu_x$  i  $b$ .

Wyprowadzimy, ze wzorów (2.3) i (2.16), wzór na drugi moment zmiennej losowej  $T$ :

$$\begin{aligned} ET^2 &= 2 \int_0^\infty t \cdot p_x dt = 2 \int_0^\infty t \exp\left[-\frac{\mu_x}{b}(e^{bt} - 1)\right] dt = \\ &= \frac{2}{b^2} e^{\mu_x/b} \int_{\log(\mu_x/b)}^\infty \left(u - \log \frac{\mu_x}{b}\right) \exp(-e^u) du = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{b^2} \int_{\theta}^{\infty} (u - \theta) \exp(-e^u) du / \exp(-e^{\theta}). \quad (2.19)$$

Zdefiniujmy dla  $t \in \mathbf{R}$  funkcję

$$G(t) = \int_t^{\infty} (u - t) \exp(-e^u) du, \quad (2.20)$$

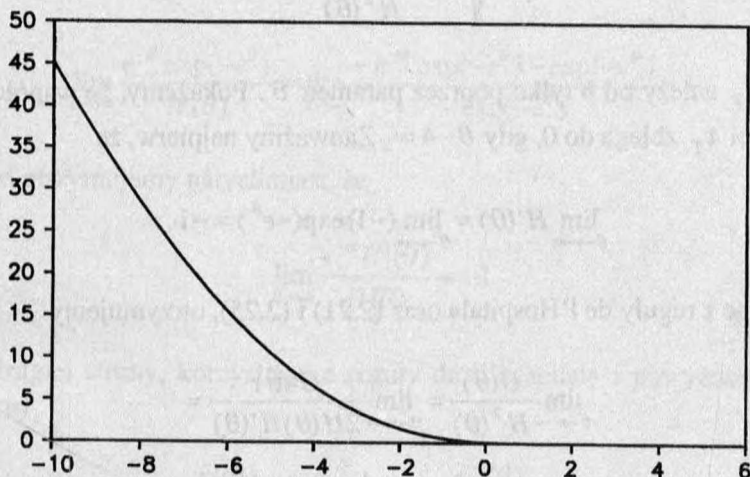
która jest nieujemna, różniczkowalna nieskończenie wiele razy, ściśle malejąca, ściśle wypukła, przy czym łatwo zauważyć, że

$$G'(t) = -H(t). \quad (2.21)$$

Korzystając z definicji funkcji  $G$ , (2.19) można zapisać w postaci

$$ET^2 = \frac{2}{b^2} G(\theta) / \exp(-e^{\theta}). \quad (2.22)$$

Wykres funkcji  $G$  przedstawiono na rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Wykres funkcji  $G(t)$

Wartość funkcji  $G$  można łatwo obliczyć numerycznie dla zadanych parametrów  $\mu_x$  i  $b$ , a następnie wykorzystać wzór (2.19) lub (2.22) do obliczenia  $ET^2$ .

Ze wzorów (2.18) i (2.22) wynika wzór na wariancję dalszego trwania życia

$$\begin{aligned} \text{Var}T &= (2G(\theta)\exp(-e^\theta) - H^2(\theta)) / (b\exp(-e^\theta))^2 = \\ &= (e_x)^2 \left[ 2 \frac{G(\theta)\exp(-e^\theta)}{H^2(\theta)} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ponieważ współczynnik zmienności  $\tau_T$  zmiennej losowej  $T$  wyraża się wzorem

$$\tau_T = \frac{\sqrt{\text{Var}T}}{e_x},$$

z (2.23) otrzymujemy, że

$$\tau_T = \sqrt{2 \frac{G(\theta)\exp(-e^\theta)}{H^2(\theta)} - 1}, \quad (2.24)$$

a zatem  $\tau_T$  zależy od  $b$  tylko poprzez parametr  $\theta$ . Pokażemy, że współczynnik zmienności  $\tau_T$  zbiega do 0, gdy  $\theta \rightarrow \infty$ . Zauważmy najpierw, że

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} H'(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (-1)\exp(-e^\theta) = -1. \quad (2.25)$$

Korzystając z reguły de l'Hospitala oraz (2.21) i (2.25), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{G(\theta)}{H^2(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{G'(\theta)}{2H(\theta)H'(\theta)} = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{-1}{2H'(\theta)} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Z (2.24) i (2.26) wynika, że w modelu Gompertza

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\text{Var}T}}{e_x} = 0,$$

tzn. przy małych wartościach parametru  $\theta$  współczynnik zmienności  $\tau_T$  jest w przybliżeniu równy 0. Warto podkreślić, że współczynnik zmienności  $\tau_T$  zależy jedynie od ilorazu wartości parametrów  $\mu_x$  i  $b$ . Przykładowo, dla  $\mu_x = 0,01$  i  $b = 0,15$  parametr  $\theta = -2,71$  i dokładna wartość współczynnika zmienności wynosi  $\tau_T = 0,417$ ; jeżeli  $b = 1,5$  przy tej samej wartości  $\mu_x$ , to  $\theta = -5,01$  i  $\tau_T = 0,27$ .

Pokażemy teraz, że dla dużych wartości parametru  $\theta$  współczynnik zmienności  $\tau_T$  jest w przybliżeniu równy 1. Ściśle mówiąc, pokażemy, że

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\text{Var}T}}{e_x} = 1.$$

Ponieważ  $H(\theta) \rightarrow 0$ , korzystając z reguły de l'Hospitala obliczamy, że

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{e^{-\theta} \exp(-e^\theta)}{H(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{-e^{-\theta} \exp(-e^\theta) - \exp(-e^\theta)}{-\exp(-e^\theta)} = 1. \quad (2.28)$$

Stąd otrzymujemy natychmiast, że

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{e^{-\theta} H'(\theta)}{H(\theta)} = -1.$$

Z drugiej strony, korzystając z reguły de l'Hospitala i powyższej granicy, dostajemy

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{G(\theta)}{e^{-\theta} H(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{G'(\theta)}{-e^{-\theta} H(\theta) + e^{-\theta} H'(\theta)} = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{-e^{-\theta} - e^{-\theta} \frac{H'(\theta)}{H(\theta)}} = 1. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Z (2.28) i (2.29) wynika, że

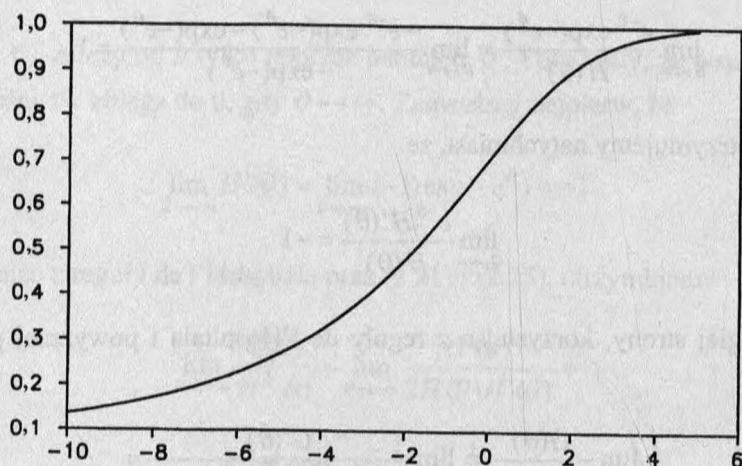
$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{G(\theta) \exp(-e^{-\theta})}{H^2(\theta)} = 1.$$

Uwzględniając powyższe w (2.24), dostajemy (2.27). Przybliżenie

$$\frac{\sqrt{\text{Var}T}}{e_x} \approx 1$$

jest tym dokładniejsze, im  $\mu_x$  jest większe w porównaniu z  $b$ . Jeżeli na przykład  $\mu_x = 0,55$ ,  $b = 0,07$ , to  $\theta = 2,06$  i  $\tau_T = 0,91$ .

Wiadomo (patrz (Anderson 1992), Wettersrand), że dalsze trwanie życia populacji mężczyzn w USA, którzy dożyli wieku 65 lat, jest dość dobrze opisane rozkładem Gompertza o parametrach  $\mu_x = 0,0204$ ,  $b = 0,097$  oraz  $\theta = -1,5592$ . Dokładna wartość współczynnika zmienności dla zmiennej  $T$ , obliczona bezpośrednio z (2.23) wynosi 0,526. Na rysunku 2.3 poniżej przedstawiono wykres współczynnika zmienności  $\tau_T$  rozkładu Gompertza, jako funkcji parametru  $\theta$ .



Rys. 2.3. Wykres funkcji  $\tau_T(\theta)$

### III. OSZACOWANIE STATYSTYCZNEJ FLUKTUACJI WYCENY ZOBOWIĄZAŃ

Przypuśćmy, że wszyscy członkowie planu przechodzą na emeryturę w tym samym wieku  $y$ . Narosłe w roku  $t$  zobowiązania wobec grupy  $A$ , aktywnych członków planu,  $AL_t$ , zgodnie z metodą kredytu jednostkowego w modelu z ciągłymi wypłatami wyrażają się następującym wzorem:

$$AL_t = \sum_{j \in A_t} B^j(x_j) \bar{a}_y \frac{D_y}{D_{x_j}},$$

gdzie  $D_y = v^y l_y$ . Oznaczamy przez  $T_j$  faktyczną długość życia na emeryturze  $j$ -tego uczestnika, planu pod warunkiem że dotrwał on w planie do emerytury; w przeciwnym razie położmy  $T_j = 0$  na mocy definicji. Stąd faktyczna wartość obecna w roku  $t$  narosłych zobowiązań wobec uczestników planu wynosi

$$AL_t^* = \sum_{j \in A_t} B^j(x_j) \bar{a}_{\tau_j} v^{y-x_j}.$$

Względna odchyłka  $AL_t^*$  od  $AL_t$  wyraża się wzorem

$$\Delta AL_t \equiv \frac{AL_t^* - AL_t}{AL_t} = \bar{a}_y^{-1} \sum_{j \in A_t} \left( \frac{l_{x_j}}{l_y} \bar{a}_{\tau_j} - \bar{a}_y \right) \pi_j, \quad (3.1)$$

gdzie

$$\pi_j \equiv B^j(x_j) \frac{D_y}{D_{x_j}} / \sum_{j \in A_t} B^j(x_j) \frac{D_y}{D_{x_j}}. \quad (3.2)$$

A zatem  $\Delta AL_t$  jest średnią ważoną odchyłek współczynników  $(l_{x_j}/l_y) \bar{a}_{\tau_j}$  od ich wartości oczekiwanej  $\bar{a}_y$ . Interesuje nas oszacowanie odchyłki  $\Delta AL_t$  w sytuacji, gdy stopa zwrotu  $\delta \geq 0$  przyjmuje najbardziej niekorzystną wartość. Jeżeli grupa uczestników planu jest jednorodna, to z (3.1) otrzymujemy, że

$$E \Delta AL_t = 0.$$

Aby zmierzyć średnią wielkość losowych fluktuacji  $\Delta AL_t$ , obliczymy wariancję odchyłki  $\Delta AL_t$ . Jeżeli zmienne losowe  $T_j'$  są statystycznie niezależne, to

$$\text{Var } \Delta AL_t = \frac{1}{\bar{a}_y^2} \sum_{j \in A_t} \pi_j^2 \left( \frac{l_{x_j}}{l_y} \right)^2 \text{Var } \bar{a}_{\frac{\bar{r}}{r_j}}. \quad (3.3)$$

Można bezpośrednio obliczyć, że

$$\text{Var } \bar{a}_{\frac{\bar{r}}{r_j}} = \bar{a}_y^2 \frac{l_y}{l_{x_j}} \left( 1 - \frac{l_y}{l_{x_j}} \right) + \text{Var } \bar{a}_{\frac{\bar{r}}{r}} \frac{l_y}{l_{x_j}}. \quad (3.4)$$

Stąd

$$\text{Var } \Delta AL_t = \sum_{j \in A_t} \frac{\pi_j^2}{y - x_j p_{x_j}} \left( y - x_j q_{x_j} + \frac{\text{Var } \bar{a}_{\frac{\bar{r}}{r}}}{\bar{a}_y^2} \right). \quad (3.5)$$

Z nierówności Schwartza otrzymujemy oszacowanie z dołu dla  $\text{Var } \Delta AL_t$ :

$$\frac{\text{Var } \bar{a}_{\frac{\bar{r}}{r}}}{n_t \bar{a}_y^2} \leq \text{Var } \Delta AL_t.$$

Niestety, ze wzoru (3.5) wynika, że  $\text{Var } \Delta AL_t$  zależy od  $\delta$  nie tylko poprzez  $\text{Var } \bar{a}_{\frac{\bar{r}}{r}} / \bar{a}_y^2$ , ale również poprzez  $\pi_j$  (patrz wzór (3.2)). Ponieważ dla każdego  $\delta \geq 0$  wagi  $\pi_j$  sumują się do 1, nie jest możliwe, aby wszystkie współczynniki  $\pi_j$  miały jednocześnie taki sam rodzaj monotoniczności ze względu na  $\delta$ . Okazuje się jednak, że przy pewnych sposobach grupowania danych zależność  $\pi_j$  od stopy procentowej nie odgrywa większej roli.

Przypuśćmy zatem, że zbiór  $A_t$  został podzielony na  $l$  kohort  $A_{t,i}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , w ten sposób, że dla wszystkich członków kohorty  $A_{t,i}$  wyrażenie  $B^j(x_j)(D_y / D_x)$  jest w przybliżeniu stałe (oznaczać je będziemy przez  $\beta_i$ ).



Wówczas

$$\Delta AL_t = \bar{a}_y^{-1} \sum_{i=1}^l \frac{\beta_i}{\sum_{i=1}^l \beta_i n_{t,i}} \sum_{j \in A_{t,i}} \left( \frac{l_{x_j}}{l_y} \bar{a}_{\bar{r}_j} - \bar{a}_y \right),$$

gdzie  $n_{t,i}$  oznacza licznosc kohorty  $A_{t,i}$ . Jezeli struktura placowo-wiekowa planu jest taka, ze licznosc kohorty maleje odwrotnie proporcjonalnie do  $\beta_i$ , tzn.  $n_{t,i} = c / \beta_i$ , to

$$\Delta AL_t = \frac{1}{\bar{a}_y l} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}} \sum_{j \in A_{t,i}} \left( \frac{l_{x_j}}{l_y} \bar{a}_{\bar{r}_j} - \bar{a}_y \right). \quad (3.6)$$

Tak wiec wzgledna precyzja oszacowania nabytych uprawnień jest srednia po kohortach z wartosci srednich odchytek wewnatrz kohort wspolczynnikow  $(l_{x_j} / l_y) \bar{a}_{\bar{r}_j}$  od ich wartosci oczekiwanej  $\bar{a}_y$ . Zakladajac, ze rozklad czasu dal-

szego trwania zycia jest dla wszystkich czlonkow planu taki sam, otrzymujemy (po skorzystaniu z (3.6))

$$E \Delta AL_t = 0.$$

Zakladajac statystyczna niezaleznosc rozkladow dalszego trwania zycia uczestnikow planu, otrzymujemy z (3.6)

$$\begin{aligned} \text{Var } \Delta AL_t &= \frac{1}{\bar{a}_y^2 l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}^2} \sum_{j \in A_{t,i}} \left( \frac{l_{x_j}}{l_y} \right)^2 \text{Var } \bar{a}_{\bar{r}_j} = \\ &= \frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}^2} \sum_{j \in A_{t,i}} \frac{1}{p_{y-x_j}} \left( 1 - p_{y-x_j} + \tau_{\bar{a}_{\bar{r}_j}}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wydaje sie, ze poniewaz  $p_{y-x_j}$  sa na ogol bliskie 1, dosc dokladne powinno byc przyblizenie

$$\text{Var } \Delta AL_t \approx \frac{\tau_{\bar{a}_{\bar{r}_j}}^2}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}}, \quad (3.8)$$

otrzymane z (3.7) po zastapieniu  $p_{y-x_j}$  przez 1.

W rzeczywistości przybliżenie (3.8) może być jednak mało precyzyjne. Aby to dokładniej zbadać, przekształcimy najpierw wzór (3.7) do postaci

$$\begin{aligned} \text{Var } \Delta AL_t &= \frac{\tau_{\bar{a}_\tau}^2}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}^2} \sum_{j \in A_{t,i}} \frac{1}{y-x_j p_{x_j}} + \frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}^2} \sum_{j \in A_{t,i}} \left( \frac{1}{y-x_j p_{x_j}} - 1 \right) = \\ &= \frac{\tau_{\bar{a}_\tau}^2}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}} + \frac{\tau_{\bar{a}_\tau}^2 + 1}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}^2} \sum_{j \in A_{t,i}} \left( \frac{1}{y-x_j p_{x_j}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Niech

$$H_{t,i} = \left[ \frac{1}{n_{t,i}} \sum_{j \in A_{t,i}} \frac{1}{y-x_j p_{x_j}} \right]^{-1}$$

oznacza średnią harmoniczną prawdopodobieństw  $_{y-x_j} p_{x_j}$  w kohorcie  $A_{t,i}$ .

Wówczas

$$\text{Var } \Delta AL_t = \frac{\tau_{\bar{a}_\tau}^2}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}} + \frac{\tau_{\bar{a}_\tau}^2 + 1}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}} (H_{t,i}^{-1} - 1). \quad (3.9)$$

Porównajmy przybliżenie (3.8) i wzór dokładny (3.9); iloraz  $\varepsilon$  składnika opuszczonego do pozostawionego wyraża się wzorem

$$\varepsilon = \frac{\tau_{\bar{a}_\tau}^2 + 1}{\tau_{\bar{a}_\tau}^2} \sum_{i=1}^l (H_{t,i}^{-1} - 1) \alpha_i, \quad (3.10)$$

gdzie  $\alpha_i = n_{t,i}^{-1} / \sum_{i=1}^l n_{t,i}^{-1}$ . A zatem  $\varepsilon$  jest średnią ważoną odchyłek od 1 odwrotności średnich harmoniczných prawdopodobieństw  $_{y-x_j} p_{x_j}$  we wszystkich kohortach, pomnożoną przez współczynnik

$$\frac{\tau_{\bar{a}_T}^2 + 1}{\tau_{\bar{a}_T}^2},$$

który może być bardzo duży dla małych współczynników zmienności  $\tau_{\bar{a}_T}^2$ .

Ze wzoru (3.6) wynika, że jeżeli liczebność kohort jest dość duża, to  $\Delta AL_t$  ma w przybliżeniu rozkład normalny o wartości oczekiwanej zero i wariancji danej wzorem (3.7). A zatem z prawdopodobieństwem około 0,95 dla dowolnego  $\delta \geq 0$  są spełnione nierówności

$$-\frac{1,96\sigma}{e_y} \sqrt{\frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}}} \leq \Delta AL_t \leq \frac{1,96\sigma}{e_y} \sqrt{\frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}}}, \quad (3.11)$$

jeżeli stosujemy wzór przybliżony (3.8). Natomiast, jeżeli przybliżenie (3.8) jest zbyt niedokładne, to zamiast (3.11) należy używać dokładniejszego przedziału ufności

$$\left( -1,96 \sqrt{\frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}^2} \sum_{j \in A_{t,i}} \frac{y-x_j q_{x_j} + \sigma^2 / e^{\circ 2}}{y-x_j p_{x_j}}}, 1,96 \sqrt{\frac{1}{l^2} \sum_{i=1}^l \frac{1}{n_{t,i}^2} \sum_{j \in A_{t,i}} \frac{y-x_j q_{x_j} + \sigma^2 / e^{\circ 2}}{y-x_j p_{x_j}}} \right),$$

który dla każdego  $\delta \geq 0$  ma poziom ufności (co najmniej) około 0,95.

Powyższe odchyłki pojawiają się z powodu naturalnej fluktuacji śmiertelności osobników w populacji.

**Przykład 3.1.** W praktyce grupę uczestników planu można dzielić na 5–25 kohort; dla celów porównawczych przyjmijmy, że jest to 6 kohort. W tabeli 3.1 przedstawiono długości przedziałów ufności dla pięciu przypadków planów o różnych licznościach.

Tabela 3.1

Lp.	$n_t$	Długość przedziału ufności dla $\Delta AL_t$ (w %)
1	144	26,2%
2	250	19,9%
3	500	14,1%
4	1000	9,9%
5	10000	3,1%

Jak widać, nawet przy planach o stosunkowo dużej liczebności (250–1000) względny błąd predykcji narosłych zobowiązań, spowodowany statystyczną zmiennością śmiertelności w populacji, może być duży.

## BIBLIOGRAFIA

- Anderson A. W. (1992), *Pension Mathematics for Actuaries*. Winsted, ACTEX Publications.
- Bacinello A. R. (2000), *Valuation of Contingent-claims Characterising Particular Pension Schemes*, „Insurance Mathematics and Economics”, 27.2, 177–188.
- Boyle P. P. (1998), *Financial Economics: With Applications to Investments, Insurance & Pension*, Society of Actuaries.
- Gerber H. (1995): *Life Insurance Mathematics*. Berlin, Springer.
- Logue D. E., Rader J. S. (1998): *Managing Pension Plans: A Comprehensive Guide to Improving Plan Performance (Financial Management Association Survey and Synthesis Series)*, Harvard Business School Pr.
- Wettersrand W. H., *Parametric Models for Life Insurance Mortality Data: Gompertz Law Over Time*. TSA XXXIII.

Lesław Gajek

## RANDOM FLUCTUATION OF PENSION PLANS VALUATION

In the paper the statistical fluctuation of the results of pension plan valuation (by use of unit credit method) is estimated. It is shown that the variance of the relative deviation of the valuation result from the proper valuation decreases with the increase of discount rate. The approximate form is given, with the aid of the central limit theorem, of the 95% confidence interval for the relative deviation of the valuation result. For small values of discount rate and plans for 250 members the confidence interval can have the length of 20%.