ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 166, 2003

*Iwona Konarzewska**

WYCENA WYBRANYCH TRANSAKCJI OPCYJNYCH I ANALIZA WRAŻLIWOŚCI PRZY UŻYCIU TECHNIK SYMULACYJNYCH

Streszczenie. Spośród czynników wpływających na wartość opcji, a tym samym na wartość portfeli instrumentów zawierających opcje, których szacunek jest obarczony ryzykiem, należy wymienić: cenę instrumentu pierwotnego, wariancję stopy zwrotu z instrumentu pierwotnego, stopę zwrotu wolną od ryzyka.

Wycena każdego instrumentu finansowego ma na celu ustalenie jego wartości dla inwestora, będącej podstawą do podjęcia decyzji o zakupie. Spośród wielu stosowanych w praktyce strategii inwestowania w portfele instrumentów zawierających akcje lub opcje w artykule analizuje się strategie zabezpieczające przed ryzykiem, związane z modelami wyceny opcji – dwumianowym oraz Blacka-Scholesa.

Badaniu poddano rzeczywiste instrumenty rynkowe – warranty na akcje spółek giełdowych i strategie zabezpieczające z ich uwzględnieniem. Analizowano dynamikę wyceny wartości warrantów za pomocą symulacji Monte Carlo procesu cenowego akcji, aktualizując szacunki stóp zwrotu i zmienności. Obok ilustracji dynamiki cen akcji, ocen stóp zwrotu z akcji i dynamiki szacunków zmienności stóp zwrotu pokazano dynamikę szacunkowej wartości badanych instrumentów oraz rozkłady prawdopodobieństwa wartości warrantów.

Słowa kluczowe: opcje, warranty, modele wyceny opcji, symulacja stochastyczna.

1. WPROWADZENIE

Współczesny światowy rynek kapitałowy posługuje się bardzo ważnym i ciekawym instrumentem finansowym, należącym do klasy instrumentów pochodnych, jakim jest opcja. Przytoczymy najistotniejsze elementy charakteryzujące opcje, których aktywem bazowym jest akcja spółki, metody analizy wartości tego instrumentu oraz niektóre strategie inwestowania portfelowego z wykorzystaniem opcji. Wycena wartości tego instrumentu jest ściśle związana z przewidywaniami odnośnie do kształtowania się procesu generującego ceny czy też stopy zwrotu.

* Dr, starszy wykładowca, Katedra Badań Operacyjnych, Uniwersytet Łódzki.

Opcja jest instrumentem finansowym dającym posiadaczowi prawo do zakupu lub sprzedaży innego instrumentu finansowego (nazywanego pierwotnym, bazowym) po określonej cenie w terminie wykonania. Opcja nie stwarza zobowiązania dla kupującego (zajmującego tzw. pozycję długą), tylko dla sprzedającego (zajmującego tzw. pozycję krótką). Posiadacz opcji korzysta z nabytego prawa, jeżeli jest to opłacalne. Podstawowe rodzaje opcji ze względu na termin wykonania to: opcja amerykańska, którą można wykonać w dowolnym dniu między terminem nabycia a terminem wygaśnięcia, oraz opcja europejska, którą można wykonać jedynie w terminie wykonania.

W niniejszym artykule przyjrzymy się bliżej europejskiej opcji kupna akcji. Przytoczymy klasyczne modele wyceny tego instrumentu oraz dynamiczną metodę analizy jego wartości przy użyciu techniki symulacyjnej. Na rynku polskim opcje akcyjne zaczęły być notowane w systemie notowań ciągłych, począwszy od 24.11.1999 r. – warranty[1] kupna i sprzedaży na akcje spółek wystawiane przez BRE S.A. oraz od 2.11.2000 r. warranty kupna i sprzedaży na akcje spółek emitowane przez BDM SA. W artykule przytoczymy wyniki analiz przykładowo wybranych warrantów sześciomiesięcznych emitowanych przez BRE SA.

Wymieńmy charakterystyki opcji, definiujące ten kontrakt finansowy:

1) termin wygaśnięcia opcji – termin, po którym opcja traci ważność;

2) termin wykonania – termin, w którym opcja jest wykonana;

3) cena wykonania – ustalona w momencie wystawienia opcji i nie zmienia się;

4) cena opcji (premia) – cena kupna lub sprzedaży opcji;

5) cena instrumentu pierwotnego – wartość rynkowa instrumentu pierwotnego.

Odpowiedź na pytanie: „Kiedy posiadacz opcji skorzysta z posiadanego prawa?", brzmi:

– w przypadku opcji kupna, gdy cena rynkowa instrumentu pierwotnego będzie **wyższa** od ceny wykonania opcji;

– w przypadku opcji sprzedaży, gdy cena rynkowa instrumentu pierwotnego będzie **niższa** od ceny wykonania opcji.

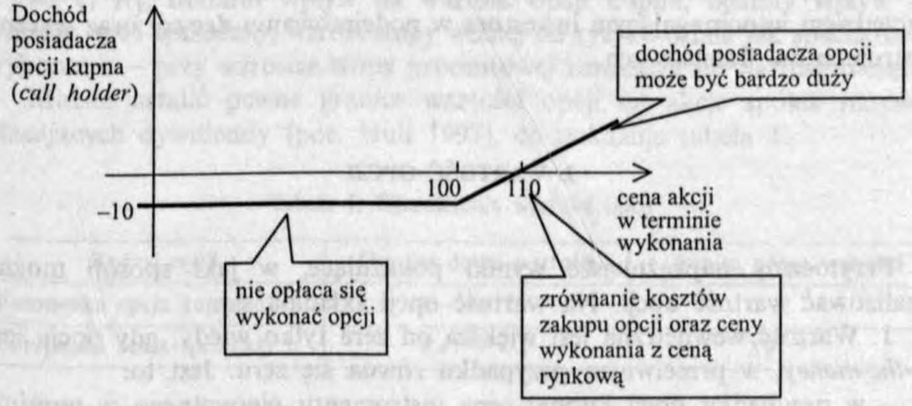
Opcja stanowi zabezpieczenie posiadacza przed ryzykiem niekorzystnego ruchu cen. Kosztem tego zabezpieczenia jest premia, jaką otrzymuje wy-

[1] Warranty są instrumentami o charakterze opcji, emitowanymi przez spółki lub instytucje finansowe. Dają one prawo zakupu/sprzedaży akcji spółki, które będą emitowane w przyszłości (w terminie wygaśnięcia) – warrant subskrypcyjny lub wypłatę w gotówce równą różnicy ceny rynkowej akcji i ceny wykonania – warrant opcyjny, podczas gdy opcje dotyczą akcji będących już w obrocie rynkowym. Na GPW w Warszawie obok warrantów opcyjnych na akcje spółek są notowane warranty na indeksy giełdowe (WIG20, NIF, subindeksy sektorowe indeksu WIG, TechWIG), warranty na bony skarbowe, warranty na kontrakty terminowe na WIG20.

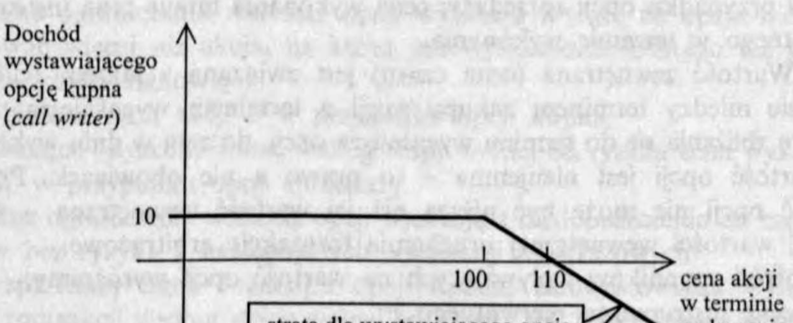
stawiający (sprzedający) opcję. Ryzyko posiadacza (kupującego) jest związane z możliwą stratą w wysokości jedynie ceny opcji (nie wykona on opcji, jeżeli nie będzie to opłacalne). Wystawiający opcję kupna może dużo stracić, jeżeli cena akcji w terminie wykonania opcji znacznie przekroczy cenę wykonania.

Na rysunkach 1 i 2 są prezentowane dochody posiadacza i wystawiającego opcję kupna akcji w zależności od ceny akcji w terminie wykonania – cena wykonania opcji – 100 zł, cena opcji – 10 zł. Rysunki te ilustrują również możliwe zagrożenia – ryzyko mierzone możliwą utratą dochodu w przypadku niekorzystnej ceny akcji w terminie wykonania.

Do transakcji zakupu/sprzedaży opcji kupna dochodzi, gdy jej uczestnicy mają różne oczekiwania odnośnie do poziomu ceny akcji w terminie wykonania. Kupujący liczy na to, że cena akcji przekroczy cenę wykonania, i zabezpiecza się na wypadek zdarzenia przeciwnego, płacąc cenę opcji.



Rys. 1. Dochód posiadacza opcji kupna



Rys. 2. Dochód wystawiającego opcję kupna

Sprzedający oczekuje, że na transakcji zarobi – opcja nie będzie wykonana, czyli że cena akcji w terminie wykonania z dużym prawdopodobieństwem będzie niższa od ceny wykonania opcji. Cena opcji jest wartością ryzyka, przed którego poniesieniem kupujący się zabezpiecza. Można postawić pytanie, czy cena ta jest dobrze określona – czy kupujący opcję nie płaci zbyt wiele lub czy też cena jest niedoszacowana.

Problemem wyceny opcji zajmowało się wielu badaczy – statystyków, ekonometryków, teoretyków i praktyków zarządzania finansami. Należy wymienić takie fundamentalne prace, jak: Black, Scholes (1973), Merton (1973).

W niniejszym artykule, obok krótkiego przedstawienia idei klasycznych już metod wyceny, pragniemy zwrócić uwagę na najważniejsze problemy z nimi związane, a mianowicie: problem prognozowania cen akcji oraz problem oceny zmienności stóp zwrotu z akcji. Stosowanie różnych metod prognozowania i estymacji prowadzi do różnych ocen ryzyka inwestowania. Pokażemy, że symulacja komputerowa procesu cenowego jest cennym narzędziem wspomagającym inwestora w podejmowaniu decyzji oraz wyceny instrumentów finansowych.

2. WARTOŚĆ OPCJI

Przytoczmy najważniejsze wyniki pokazujące, w jaki sposób można analizować wartość opcji. Na wartość opcji składają się:

1. Wartość wewnętrzna jest większa od zera tylko wtedy, gdy opcja jest *in-the-money*, w przeciwnym przypadku równa się zeru. Jest to:

– w przypadku opcji kupna: cena instrumentu pierwotnego w terminie wykonania minus cena wykonania;

– w przypadku opcji sprzedaży: cena wykonania minus cena instrumentu pierwotnego w terminie wykonania.

2. Wartość zewnętrzna (cena czasu) jest związana z faktem odległości w czasie między terminem zakupu opcji a terminem wygaśnięcia; maleje w miarę zbliżania się do terminu wygaśnięcia opcji, do zera w dniu wykonania.

Wartość opcji jest nieujemna – to prawo a nie obowiązek. Ponadto wartość opcji nie może być niższa niż jej wartość wewnętrzna – spadek poniżej wartości wewnętrznej uruchamia transakcje arbitrażowe.

Spośród czynników wpływających na wartość opcji wyróżnimy:

a) cenę instrumentu pierwotnego P;

b) cenę wykonania X;

c) czas do terminu wygaśnięcia opcji T;

d) wariancję stopy zwrotu z instrumentu pierwotnego σ^2;

e) stopę zwrotu wolną od ryzyka R_f.

Wartość opcji możemy przedstawić jako funkcję wymienionych czynników:

$$c = f(P,\ X,\ \sigma^2,\ T,\ R_f)$$

Zależność między wartością opcji a wyróżnionymi czynnikami, *ceteris paribus*, jest różnokierunkowa:

ad a) P, związek dodatni w przypadku opcji kupna, ujemny – w przypadku opcji sprzedaży;

ad b) X, związek ujemny w przypadku opcji kupna, związek dodatni w przypadku opcji sprzedaży;

ad c) T, dodatni wpływ na oba typy opcji – im dłuższy czas do terminu wygaśnięcia opcji, tym większa szansa, że opcja będzie *in the money*,

ad d) σ^2, dodatni wpływ na oba typy opcji; większa wariancja zwiększa szansę zarówno na wyższą cenę od ceny wykonania, jak i na niższą;

ad e) R_f, dodatni wpływ na wartość opcji kupna, ujemny wpływ na wartość opcji sprzedaży; wzrost stopy wolnej od ryzyka działa jak spadek ceny wykonania – przy wzroście stopy procentowej zmniejsza się wartość bieżąca.

Można ustalić pewne granice wartości opcji na akcje spółek nie wypłacających dywidendy (por. Hull 1997), co pokazuje tabela 1.

Tabela 1. Ograniczenia wartości opcji

Rodzaj opcji	Granica dolna wartości	Granica górna wartości
Europejska opcja kupna c	$P - Xe^{-R_fT}$	P
Europejska opcja sprzedaży p	$Xe^{-R_fT} - P$	Xe^{-R_fT}

Źródło: opracowanie własne.

Górne ograniczenia wartości opcji wynikają z tego, że opcja nie może kosztować więcej niż akcja, na którą jest wystawiona. Dlatego też granicę górną wartości stanowią:

1) bieżąca cena akcji P w przypadku opcji kupna;

2) bieżąca zdyskontowana według stopy wolnej od ryzyka cena wykonania opcji X w przypadku opcji sprzedaży.

Dolne ograniczenia wartości opcji wynikają z niedopuszczenia do czerpania zysków bez ryzyka z następujących transakcji arbitrażowych:

1) sprzedaży akcji i zakupu opcji kupna, zainwestowania wynikowej kwoty transakcji według stopy wolnej od ryzyka na T okresów, a w terminie wykonania realizacji opcji albo zakupu akcji na rynku;

2) pożyczenia kwoty według stopy wolnej od ryzyka na zakup akcji i opcji sprzedaży, a w terminie wykonania zwrotu pożyczki i wykonania opcji albo sprzedaży akcji na rynku.

W formułach zawartych w tabeli 1 wykorzystano rachunek dyskontowania ceny wykonania opcji według stopy wolnej od ryzyka z ciągłą kapitalizacją.

3. MODELE WYCENY OPCJI

3.1. Model dwumianowy jednookresowy

Omawiając model dwumianowy jednookresowy (Cox, Ross, Rubinstein), posłużymy się następującymi oznaczeniami:

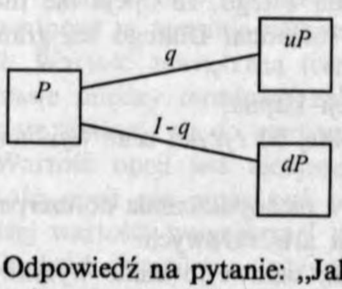
P – cena bieżąca instrumentu pierwotnego;
R_f – roczna stopa wolna od ryzyka;
X – cena wykonania;
c – cena opcji;
u – indeks wzrostu ceny instrumentu pierwotnego P, $u > 1$, $u > 1 + R_f$;
q – prawdopodobieństwo wzrostu ceny P do wartości uP;
d – indeks spadku ceny P, $0 < d < 1$;
$1 - q$ – prawdopodobieństwo spadku ceny P do wartości dP.

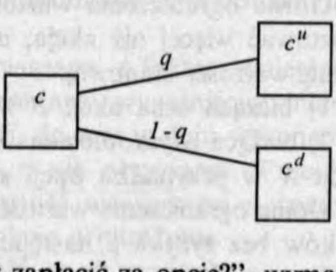
W odniesieniu do wspomnianego modelu przyjmiemy dwa założenia, że:
– wartość opcji kupna w przypadku wzrostu ceny P ma postać:

$$c^u = \max \{0;\ uP - X\};$$

– wartość opcji kupna w przypadku spadku ceny P to:

$$c^d = \max \{0;\ dP - X\}.$$





Odpowiedź na pytanie: „Jaką cenę możemy zapłacić za opcję?", wymaga, w ogólnym przypadku, znajomości funkcji użyteczności kupującego opcję. W przypadku inwestora neutralnego w stosunku do ryzyka, charakteryzującego się liniową funkcją użyteczności, oczekiwana wartość opcji może stanowić podstawę jej wyceny. Inwestor posiadający awersję do ryzyka, a takich jest większość, gotowy jest zapłacić cenę wyższą. Spróbujemy pokazać, jak może przebiegać wycena opcji kupna, jeżeli celem zakupu jest zabezpieczenie się inwestora przed ryzykiem zmiany ceny akcji.

Skonstruujmy portfel inwestycyjny składający się z jednej akcji w cenie P i wystawionych h opcji kupna tej akcji. Ile wynosi liczba opcji, aby taka inwestycja nie była obarczona ryzykiem?

Portfel inwestycyjny (zwany *hedging portfolio*) ma być pozbawiony ryzyka – rozumiemy przez to, że jego wartość nie będzie zależeć od wzrostu czy też spadku ceny akcji. Zatem dla tak skonstruowanego portfela zachodzi:

$$uP - hc^u = dP - hc^d.$$

Ilość opcji w portfelu, która zapewnia spełnienie powyższego warunku, to:

$$h = \frac{P(u-d)}{c^u - c^d} \tag{1}$$

Współczynnik h jest nazywany **współczynnikiem zabezpieczenia** (*hedge ratio*).

Inwestycja wolna od ryzyka powinna dać w okresie inwestowania stopę zwrotu równą stopie zwrotu wolnej od ryzyka – wartość bieżąca inwestycji musi być równa zdyskontowanej według stopy wolnej od ryzyka wartości przyszłej:

$$P - hc = \frac{uP - hc^u}{1 + R_f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{P - \dfrac{uP - hc^u}{1 + R_f}}{h} = \frac{P(1 + R_f)uP + hc^u}{h(1 + R_f)}.$$

Podstawiając jako ilość opcji h ilość zabezpieczającą inwestora przed spadkiem ceny akcji (*hedge ratio*), cenę opcji można dalej wyznaczyć jako:

$$c = \frac{P(1 + R_f - u) + \dfrac{Pc^u(u-d)}{c^u - c^d}}{\dfrac{P(u-d)}{c^u - c^d}(1 + R_f)} =$$

$$= \frac{1 + R_f - u + \dfrac{c^u(u-d)}{c^u - c^d}}{\dfrac{u-d}{c^u - c^d}(1 + R_f)} =$$

$$= \frac{(1+R_f-u)(c^u-c^d)+c^u(u-d)}{(u-d)(1+R_f)} =$$

$$= \frac{c^u(1+R_f-d)-c^d(1+R_f-u)}{(u-d)(1+R_f)} =$$

$$= \frac{c^u\frac{(1+R_f)-d}{u-d}+c^d\frac{u-(1-R_f)}{u-d}}{1+R_f}.$$

Jeżeli wprowadzimy następujące oznaczenie:

$$p = \frac{(1+R_f)-d}{u-d} \tag{2}$$

to zachodzi

$$1-p = \frac{(u-d)-(1+R_f)+d}{u-d} = \frac{u(1+R_f)}{u-d}.$$

Cenę opcji kupna przy przyjęciu powyższego oznaczenia można zapisać jako:

$$c = \frac{pc^u+(1-p)c^d}{1+R_f} \tag{3}$$

Parametr p, zdefiniowany wzorem (2), jest nazywany **prawdopodobieństwem zabezpieczenia** (*hedging probability*) i jest interpretowany jako prawdopodobieństwo wzrostu ceny akcji w warunkach równowagi, tzn. gdy nie ma ograniczeń ze strony rynku i inwestorzy mogą zakupić tyle opcji, ile potrzebują, oraz w przypadku gdy wszyscy inwestorzy konstruują portfele inwestycyjne wolne od ryzyka zmiany ceny akcji. Można to uzasadnić w następujący sposób.

Jeżeli rozważymy sytuację, w której cena akcji jest równa wartości bieżącej oczekiwanej przyszłej ceny akcji zdyskontowanej według stopy wolnej od ryzyka R_f, okazuje się, że wówczas prawdopodobieństwo wzrostu ceny jest równe prawdopodobieństwu zabezpieczenia p.

$$P = \frac{quP+(1+q)dP}{(1+R_f)} \Rightarrow q = \frac{(1+R_f)-d}{u-d}, \text{ co jest równe wartości } p.$$

Wynika z tego, że *hedging probability* można interpretować również jako prawdopodobieństwo wzrostu ceny akcji odpowiadające sytuacji, gdy akcje przynoszą oczekiwany zysk, równy stopie procentowej inwestycji bez ryzyka[2].

Sposób wyceny opcji kupna według formuły wyprowadzonej dla jednookresowego modelu dwumianowego, przy założeniu, że inwestorzy konstruują portfele bez ryzyka, posiada ważne zalety:

1. Cena opcji nie zależy od q, prawdopodobieństwa wzrostu ceny akcji. Zatem nawet gdy inwestorzy mają różne oczekiwania na temat q, mogą się zgodzić na pozostałe warunki i uzgodnić cenę opcji.

2. Przy wycenie opcji według tej formuły nie czyni się założeń na temat siły awersji indywidualnego inwestora do ryzyka[3] – zakłada się tylko, że funkcja użyteczności jest rosnąca.

3. Jedyną zmienną losową, od której zależy cena opcji, jest cena instrumentu pierwotnego.

Wzory (2) i (3) mają swoje odpowiedniki dla przypadku kapitalizacji ciągłej odsetek w okresie jednego roku:

$$p = \frac{e^{R_f t} - d}{u - d} \tag{2a}$$

$$c = [pc^u + (1-p)c^d]e^{-R_f t} \tag{3a}$$

gdzie t oznacza ilość rocznych odcinków czasu inwestycji do terminu wykupu opcji.

Przykład. Bieżąca cena akcji PKN Orlen wynosi $P_0 = 19$ zł. Załóżmy przykładowo, że za 3 miesiące od dnia dzisiejszego cena tej akcji w najbardziej niesprzyjających warunkach na rynku giełdowym wyniesie 18 zł lub w najkorzystniejszej sytuacji – 22 zł. Stopa wolna od ryzyka – przeciętne oprocentowanie lokat trzymiesięcznych – wynosi 7% rocznie.

Rozważmy trzymiesięczną europejską opcję kupna akcji o cenie wykonania 20 zł. Za 3 miesiące opcja ta będzie warta:

[2] Interpretacja ta musi budzić pewne kontrowersje. Z inwestycji w akcje, jako inwestycji związanej z ryzykiem, oczekuje się zazwyczaj dochodu wyższego od dochodu z inwestycji bez ryzyka (bony skarbowe, lokaty itp.), gdyż inaczej jest to wariant inwestycyjny zdominowany przez inwestycję bez ryzyka. Prawdopodobieństwo zabezpieczenia p, wymagające znajomości stopy wzrostu ceny u i stopy spadku ceny d, jest konstrukcją teoretyczną i można ją, naszym zdaniem, wykorzystać jedynie do porównań z szacunkami rozkładu prawdopodobieństwa ceny akcji na podstawie próby historycznej czy też w analizach empirycznych nad stosunkiem inwestorów do ryzyka.

[3] Jednak przy wycenie przyjmuje się, że portfel zabezpieczający jest całkowicie pozbawiony ryzyka, czyli wycena opcji jest na poziomie maksymalnym. Inwestor nie będący skrajnym pesymistą wyceni opcje poniżej wartości wyprowadzonej za pomocą formuły (3).

1) w najkorzystniejszej sytuacji 2 zł, gdyż można ją wykonać kupując akcję za 20 zł i natychmiast sprzedać za 22 zł;

2) 0 zł w sytuacji najmniej korzystnej – przy cenie akcji 18 zł wykonanie opcji nie będzie racjonalne.

Analiza pokazuje, że portfel, składający się z jednej akcji i wystawionych dwóch opcji kupna będzie posiadał taką samą wartość bez względu na stan rynku, co oznacza, że jest to inwestycja pozbawiona ryzyka (tabela 2).

Tabela 2. Analiza portfela akcji według stanu rynku

Stan rynku za 3 miesiące	Wartość portfela
Sprzyjający	$1 \cdot 22$ zł $- 2 \cdot 2$ zł $= 18$ zł
Niekorzystny	$1 \cdot 18$ zł $- 2 \cdot 0$ zł $= 18$ zł

Źródło: opracowanie własne.

Dzisiejsza wartość tego portfela to $18e^{-0,25 \cdot 0,007} = 17,68774$ zł. Ile zatem wynosi dzisiejsza wartość opcji kupna? Oznaczmy ją przez c. Zachodzi: $19 - 2c = 17,68774$, z czego wynika, że $c = 0,65613$ zł.

Takie podejście do wyceny opcji jest racjonalne bez względu na stosunek inwestora do ryzyka. Analizę wartości opcji można również przeprowadzić następująco:

Zakładając, że p oznacza prawdopodobieństwo, a stan rynku będzie za 3 miesiące sprzyjający (wzrost ceny akcji), natomiast $1 - p$, niekorzystny (spadek ceny akcji), możemy znaleźć wartość p odpowiadającą wyznaczonej powyżej cenie opcji. Oczekiwana wartość akcji za 3 miesiące wynosi:

$$E(P) = p \cdot (22) + (1 - p)(18).$$

Przyjmując neutralną wobec ryzyka postawę inwestorów na rynku oczekiwana, przyszła wartość akcji jest równa bieżącej cenie akcji rosnącej w ciągu 3 miesięcy według stopy wolnej od ryzyka:

$$E(P) = 19 \cdot e^{0,25 \cdot 0,07} = 19,33543.$$

Przyrównując do siebie oba wyrażenia, możemy obliczyć, przy jakim prawdopodobieństwie p (*hedging probability*) takie prognozy cenowe mogą się sprawdzić:

$$p = \frac{1,33543}{4} = 0,33386.$$

Dla większych wartości p oczekiwana cena rynkowa będzie wyższa, a tym samym wyższa będzie realna wartość opcji kupna.

Wartość trzymiesięcznej opcji kupna można wyznaczyć jako wartość oczekiwaną zdyskontowanych dochodów z jej posiadania:

$$E(c) = e^{-0{,}25 \cdot 0{,}12}[0{,}33386 \cdot (2) + (1 - 0{,}33386) \cdot (0)] = 0{,}656137 \text{ zł}$$

Warto kupić opcje za cenę nie przekraczającą $c = 0{,}65613$ zł, jeżeli inwestor ocenia prawdopodobieństwo wzrostu ceny akcji na wyższe niż p.

3.2. Rozwinięcie modelu dwumianowego do modelu z czasem ciągłym

Rozwijając dotychczasowe rozważania w kierunku zmniejszania jednostki czasowej wyznaczającej okres, definiujemy T jako czas trwania opcji, wyrażony jako część roku – miesiąc, tydzień, i dzielimy go na n mniejszych odcinków czasowych. Zwiększając n, czyli zmniejszając przedział czasowy między kolejnymi dwumianowymi zmianami cen instrumentu pierwotnego, dochodzimy w granicy do ciągłego procesu stochastycznego zmian cen.

Roczną stopę zwrotu R_f możemy przekształcić na stopy zwrotu dla podokresów według następującego wzoru:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{j}{n/T}\right)^{n/T} = e^j = (1 + R_f) \tag{4}$$

gdzie:

j – stopa zysku z inwestycji bez ryzyka dla podokresu przy podziale okresu T (T jest częścią roku) na n interwałów czasowych.

Rozważając proces stochastyczny dwumianowych ruchów ceny akcji w ciągu roku, przy $n \to \infty$, możemy proces ten aproksymować za pomocą normalnego rozkładu przyrostów ceny. Cox, Ross i Rubinstein (1979) znajdują następującą relację pomiędzy indeksami wzrostu i spadku a odchyleniem standardowym stóp zwrotu z akcji:

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}} \tag{5}$$

gdzie σ jest rocznym odchyleniem standardowym stopy zwrotu z akcji (instrumentu pierwotnego).

Rozwijając model do modelu z czasem ciągłym, biorąc pod uwagę, że cena akcji zmienia się w czasie powstaje problem dostosowywania składu portfela zabezpieczającego do ruchów ceny. W modelu zaproponowanym przez Blacka-Scholesa (1973) przyjmuje się, że takie dostosowywanie jest możliwe – można utrzymywać portfel zabezpieczający, dostosowując w sposób ciągły proporcje akcji i opcji kupna. Wartość portfela zabezpieczającego może być wyrażona w następujący sposób:

$$V_H = P + c \cdot h \tag{6}$$

gdzie

V_H – wartość portfela zabezpieczającego;
P – cena akcji;
c – cena opcji kupna;
h – ilość opcji kupna w portfelu zabezpieczającym.

Zmiana wartości portfela zabezpieczającego może być zatem zapisana następująco:

$$dV_H = dP + hdc \tag{7}$$

W modelu Blacka-Scholesa zakłada się, że cena akcji podlega geometrycznemu procesowi Browna. Stopa zwrotu z akcji może być przy takim założeniu zapisana jako:

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dW \tag{8}$$

gdzie

μ – chwilowa oczekiwana stopa zwrotu, tzw. współczynnik dryfu;
σ – chwilowe odchylenie standardowe stopy zwrotu, tzw. współczynnik dyfuzji;
dt – marginalny przyrost czasu;
dW – proces Wienera o zerowym współczynniku dryfu i jednostkowym współczynniku dyfuzji.

Ponieważ cena opcji jest funkcją ceny akcji, jej ruchy w czasie muszą być związane z ruchem ceny akcji. Black i Scholes (1973) pokazali, przy przedstawionych założeniach odnośnie do ceny akcji, że zmiany ceny opcji można opisać następującym stochastycznym równaniem różniczkowym:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial P} dP + \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 dt \tag{9}$$

We wzorze (9) opisującym dynamikę ceny opcji jedynym wyrażeniem losowym jest dP. Pozostałe wyrażenia są deterministyczne.

Zmianę wartości portfela zabezpieczającego, przy uwzględnieniu formuły (9) można wyrazić jako:

$$dV_H = dP + h\left[\frac{\partial c}{\partial P}dP + \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial P^2}\sigma^2 P^2 dt\right] \tag{10}$$

Eliminacja ryzyka w portfelu zabezpieczającym oznacza pozbycie się we wzorze (10) składnika związanego z dP. Można to osiągnąć, przyjmując ilość opcji kupna na jedną akcję w portfelu jako

$$h = -\frac{1}{\dfrac{\partial c}{\partial P}} \tag{11}$$

pamiętając, że ilość ta musi podlegać ciągłemu dostosowywaniu do ceny akcji. Warunkiem sukcesu procesu dostosowawczego jest równowaga rynkowa i efektywność rynku. Wartość portfela zabezpieczającego będzie wówczas rosła w sposób ciągły według stopy wolnej od ryzyka R_f.

$$\frac{dV_H}{V_H} = R_f dt \tag{12}$$

Jeżeli w portfelu zabezpieczającym jest jedna akcja, to podstawiając we wzorze (10) ilość opcji h według formuły (11) oraz wykorzystując założenie o stopie zwrotu z portfela zabezpieczającego (12), a także równanie (6) określające wartość portfela, otrzymujemy wyrażenie

$$\frac{\partial c}{\partial t} = R_f c - R_f P\frac{\partial c}{\partial P} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial P^2}\sigma^2 P^2 \tag{13}$$

Rozwiązanie równania (13) przy warunkach

$$c = \max(0, P - X),$$

$$c(P = 0) = 0$$

doprowadziło Blacka i Scholesa (1973) do następującego rozwiązania:

$$c = PN(d_1) - Xe^{-R_f T}N(d_2) \tag{14}$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P}{X}\right) + R_f T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

natomiast $N(d_1)$, $N(d_2)$ są wartościami dystrybuanty rozkładu normalnego $N(0,1)$ w punktach d_1 i d_2.

3.3. Wykorzystanie symulacji stochastycznej do wyceny opcji

Zgodnie z koncepcją wyceny opcji, zaproponowaną przez Coxa, Rossa i Rubinsteina (1979), cena opcji może być wyznaczona jako zdyskontowana według stopy wolnej od ryzyka wartość przepływów pieniężnych związanych z posiadaniem opcji na aktywa charakteryzujące się taką samą zmiennością jak aktywa, na które opcję wyceniamy, i stopą zwrotu równą stopie wolnej od ryzyka. Jeżeli opcja jest wyceniona zgodnie z tą regułą, nie istnieje możliwość uzyskania zysków arbitrażowych.

Oba podejścia prowadzą do tej samej ceny opcji, przy założeniu, że logarytmiczna stopa zwrotu z aktywów ma normalny rozkład prawdopodobieństwa. Należy zwrócić uwagę, że cena opcji nie zależy od stopy zwrotu z aktywów, na które jest wystawiona, lecz od stopy wolnej od ryzyka i zmienności stopy zwrotu z aktywów.

Cena aktywów w okresie T, w sytuacji gdy logarytmiczna stopa zwrotu z aktywów ma rozkład normalny, może być modelowana jako:

$$P_T = P_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma Z\sqrt{T}\right] \tag{15}$$

gdzie:

P_0, P_T – odpowiednio, cena bieżąca aktywów (znana) i cena w terminie wykonania opcji;

T – termin wykonania opcji w latach;

Z – zmienna losowa o standaryzowanym rozkładzie normalnym;

μ, σ – odpowiednio, roczna przeciętna stopa zwrotu z aktywów, roczne odchylenie standardowe stopy zwrotu z aktywów

W przeprowadzonym badaniu symulacyjnym posłużyliśmy się równaniem (15) do generowania cen akcji. Wartości μ, σ były szacowanie na podstawie półrocznej próby historycznej.

4. BADANIE EMPIRYCZNE – WARRANTY

Podstawą badania było 10 półrocznych warrantów na akcje spółek. Instrumenty te były po raz pierwszy notowane 19.11.2001 r., a termin wygaśnięcia przypadał na 17.05.2002 r. W tabeli 3 pokazujemy podstawowe dane i szacunki stóp zwrotu i zmienności instrumentów bazowych, wykonane na podstawie półrocznej próby historycznej.

W przypadku warrantów notowanych na GPW w Warszawie ostateczne rozliczenie jest dokonywane w gotówce. W przypadku warrantów kupna inwestor nie dostaje akcji, ale różnicę w cenach między ceną akcji na giełdzie (tzw. ostateczna cena rozliczeniowa jest określoną w dniu wygaśnięcia, ważoną obrotami średnią arytmetyczną wszystkich transakcji akcjami będącymi instrumentem bazowym) i ceną wykonania warrantu pomnożoną przez liczbę akcji spółki przypadającą na jeden warrant – mnożnik.

W tabeli 4 przedstawiamy wyniki wyceny warrantów na podstawie modelu Blacka-Scholesa (B-S)[4] w dniu pierwszego notowania, średnią wycenę uzyskaną metodą symulacyjną (5000 realizacji pseudolosowych ceny akcji) oraz uzyskaną w symulacjach cenę maksymalną i wybrane percentyle losowej wyceny opcji. Ponadto dokonano szacunków współczynnika zabezpieczenia h oraz prawdopodobieństwa zabezpieczenia p. Na tej podstawie oszacowano hipotetyczny zysk/stratę na dzień 17.05.2002 r. dla inwestora dokonującego w dniu 19.11.2001 r. zakupu portfela zabezpieczającego i kupującego opcje po cenie B-S. Jako stopę zwrotu wolną od ryzyka przyjęto obserwowaną przeciętną dla tego okresu stopę rentowności bonów skarbowych $R_f = 0{,}10281$. Wyniki tych szacunków są przedstawione również w tabeli 4. W celu określenia wartości współczynnika zabezpieczenia dokonano wyznaczenia „optymistycznej" ceny akcji, przyjmując dla zmiennej Z we wzorze (15) wartość 2, oraz ceny „pesymistycznej", przyjmując dla zmiennej Z we wzorze (15) wartość –2.

W badaniu symulacyjnym analizowano dynamikę wyceny wartości warrantów przy zmieniających się szacunkach stóp zwrotu i zmienności akcji w miarę napływu nowych obserwacji (na podstawie rolowanej półrocznej próby historycznej). Badania wskazują na duże rozbieżności wycen za pomocą wykorzystanych metod. Szczegółowe wyniki wyceny za pomocą symulacji Monte Carlo dla spółek Agora, PeKaO, Prokom, Softbank są pokazane na rysunkach 3 i 4. Ponadto przedstawiono na nich kształtowanie się cen akcji, przeciętnych stóp zwrotu i zmienności oraz rozkłady prawdopodobieństwa cen warrantów szacowanych w dniu pierwszego notowania.

[4] Model ten stanowi podstawę ustalania cen sprzedaży warrantów.

Tabela 3. Wyniki badań warrantów na akcje spółek

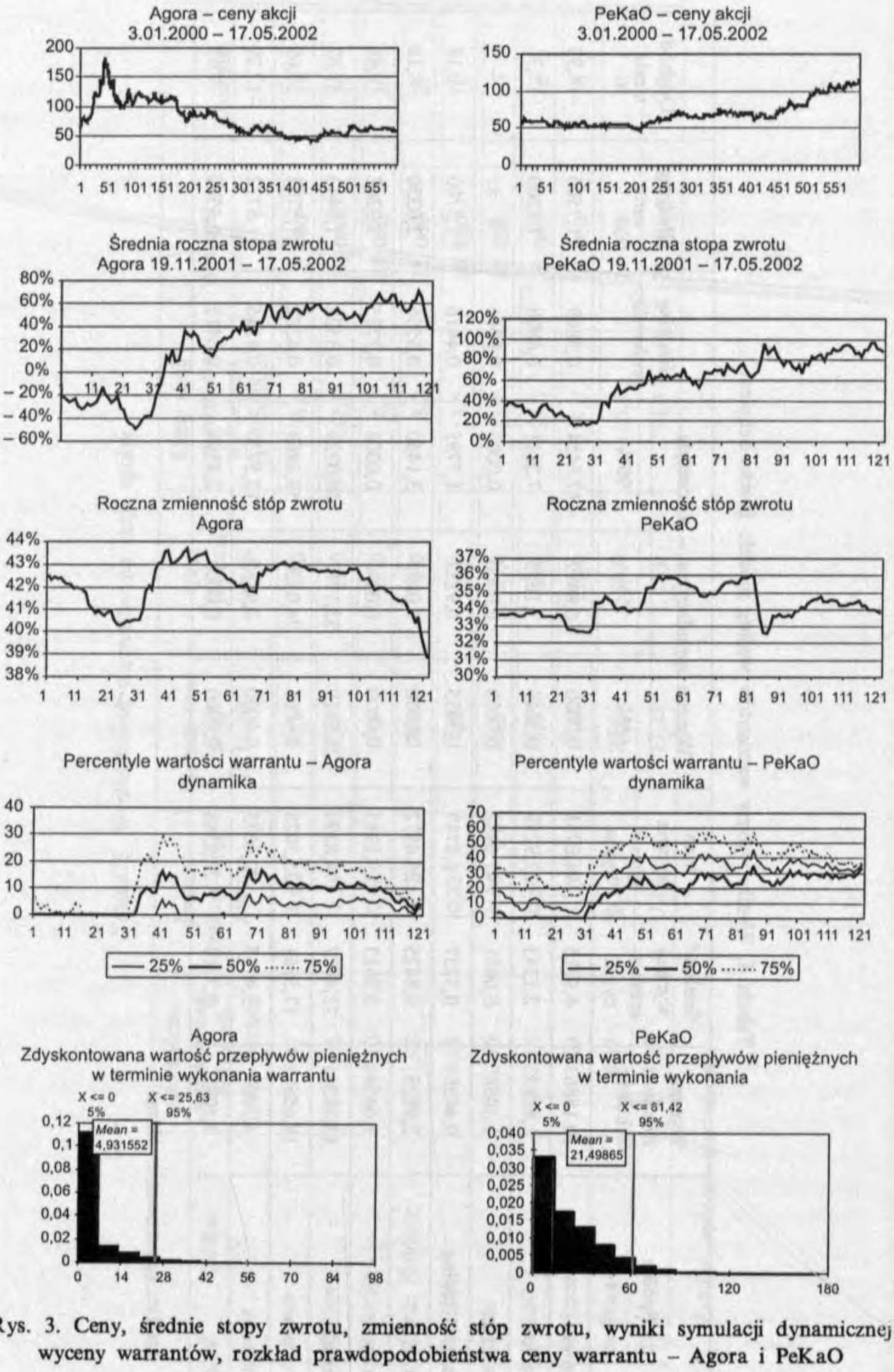
Spółka	Odchylenie standardowe dziennych stóp zwrotu	Średnia dzienna stopa zwrotu	Bieżąca cena akcji (19.11.2001)	Cena wykonania opcji	Cena akcji w terminie wykonania (17.05.2002)	Wielkość emisji	Mnożnik
Agora	3,47	0,62	58,1	55,0	58,6	5 000	10
Dębica	1,36	0,31	32,1	35,0	42,0	10 000	10
Elektrim	3,10	–0,06	18,6	27,0	4,1	15 000	10
Kable Holding	1,76	0,72	4,7	5,0	5,2	75 000	10
KGHM	4,14	0,22	14,8	14,0	13,6	20 000	10
Orbis	2,75	0,34	18,2	20,0	23,1	10 000	10
PeKaO	2,16	0,54	85,0	80,0	115,0	5 000	10
Prokom	3,60	1,03	117,0	120,0	154,0	3 000	10
Softbank	4,07	0,84	27,8	30,0	25,2	10 000	10
TPSA	3,57	1,06	17,25	18,0	14,9	20 000	10

Źródło: opracowanie własne.

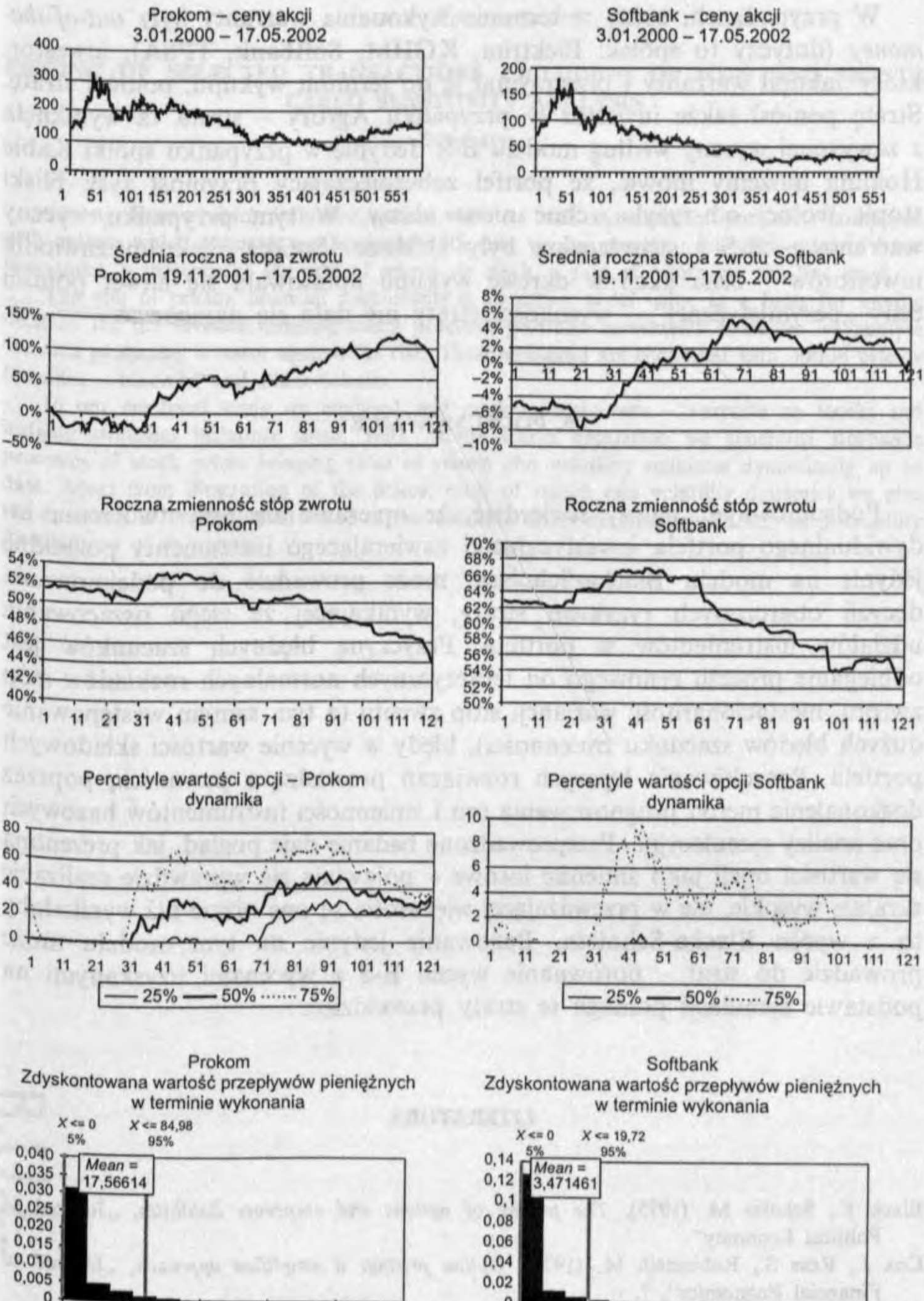
Tabela 4. Wyniki wyceny warriantów według modelu Blecka-Scholesa

Spółka	Wycena Blacka-Scholesa	Średnia' wycena symulacyjna	Max wycena symulacyjna	Wycena symulacyjna – percentyle			*Hedging probability*	*Hedging ratio*	Dochód strata
				60%	75%	90%			
Agora	10,1886	4,9316	94,8931	0,0000	6,0479	17,6454	0,5869	1,7500	–14,93
Dębica	1,8980	2,1243	27,9259	0,5649	3,1685	7,2811	0,4898	1,8200	17,36
Elektrim	1,3050	0,0651	41,6982	0,0000	0,0000	0,0000	0,8066	$+\infty$	–
Kable Holding	0,4436	0,5757	6,4747	0,3955	0,9222	1,7795	0,4416	1,5700	–0,18
KGHM	2,9225	0,8425	26,4572	0,0000	0,0000	3,1460	0,6556	2,0250	–8,18
Orbis	1,6454	0,2613	19,1985	0,0000	0,0000	0,0000	0,7735	3,9242	9,46
PeKaO	13,3824	21,4987	174,8390	22,8319	33,1917	50,0929	0,3528	1,2443	51,67
Prokom	18,6567	17,5661	335,3028	3,6061	24,0526	59,5863	0,4282	1,5783	53,69
Softbank	4,7007	3,4715	90,4673	0,0000	2,9275	12,5730	0,4246	1,6712	–12,29
TPSA	2,5083	0,7113	28,2388	0,0000	0,0000	2,4399	0,6415	2,3500	–9,43

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3. Ceny, średnie stopy zwrotu, zmienność stóp zwrotu, wyniki symulacji dynamicznej wyceny warrantów, rozkład prawdopodobieństwa ceny warrantu – Agora i PeKaO



Rys. 4. Ceny, średnie stopy zwrotu, zmienność stóp zwrotu, wyniki symulacji dynamicznej wyceny warrantów, rozkład prawdopodobieństwa ceny warrantu – Prokom i Softbank

W przypadkach, kiedy w terminie wykonania warranty były *out-of-the-money* (dotyczy to spółek: Elektrim, KGHM, Softbank, TPSA), inwestor, który zakupił warranty i przetrzymał je do terminu wykupu, poniósł stratę. Stratę poniósł także inwestor w przypadku Agrory – strata ta wyniknęła z zawyżonej wyceny według modelu B-S. Jedynie w przypadku spółki Kable Holding możemy mówić, że portfel zabezpieczający przyniósł zysk bliski stopie wolnej od ryzyka, choć nieco niższy. W tym przypadku wyceny warrantu – B-S i symulacyjna były zbliżone. Spółka Elektrim zawiodła inwestorów – cena akcji w okresie wykupu uplasowała się nawet poniżej ceny „pesymistycznej" – wysokości straty nie dało się oszacować.

5. PODSUMOWANIE

Podsumowując, należy stwierdzić, że opieranie się przy tworzeniu indywidualnego portfela inwestycyjnego zawierającego instrumenty pochodne jedynie na modelu Blacka-Scholesa, może prowadzić do podejmowania decyzji obarczonych ryzykiem straty, wynikającej ze złego oszacowania udziałów instrumentów w portfelu. Przyczyną błędnych szacunków jest odbieganie procesu cenowego od teoretycznych normalnych rozkładów stóp zwrotu, niestacjonarność wariancji stóp zwrotu (a tym samym występowanie dużych błędów szacunku zmienności), błędy w wycenie wartości składowych portfela. Poszukiwania lepszych rozwiązań prowadzą z pewnością poprzez doskonalenie metod prognozowania cen i zmienności instrumentów bazowych oraz analizy symulacyjne. Przeprowadzone badanie daje pogląd, jak prezentują się wartości opcji jako zmienne losowe – pojawiają się wprawdzie realizacje skrajnie wysokie, ale w przeważającej większości są one niższe niż wynikałoby to z wycen Blacka-Scholesa. Bazowanie jedynie na tym modelu może prowadzić do strat – porównanie wycen B-S z wycenami uzyskanymi na podstawie symulacji pomaga te straty przewidzieć.

LITERATURA

Black F., Scholes M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, „Journal of Political Economy".

Cox J., Ross S., Rubinstein M. (1979), *Option pricing: a simplified approach*, „Journal of Financial Economics", 7.

Hull J. (1997), *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG-Press, Warszawa.

Merton R. (1973), *Rational theory of option pricing*, „Bell Journal of Economics and Management Science", 4.

Iwona Konarzewska

PRICING OF SELECTED TRANSACTIONS INCLUDING OPTIONS AND MONTE CARLO SENSITIVITY ANALYSIS

Summary

Among factors which influence option value as well as values of portfolios composed with options which estimates are burdened with risk, we can mention: the stock price of basic instrument, a variance of the rate of return on stock, a rate of return on risk-free asset.

The aim of pricing financial instruments is to arrive at its value as a basis for buying decision for the investor. Among many practical portfolio investment strategies we analyse the ones protecting investor against the risk. These strategies are connected with option pricing formulas – binomial and Black-Scholes.

In our empirical study we analysed real market instruments – warrants on stocks and hedging strategies including them. With Monte Carlo simulation we generated stochastic processes of stock prices bringing rates of return and volatility estimates dynamically up to date. Apart from illustration of the prices, rates of return and volatility dynamics we give the dynamics of the estimated value of the warrants under examination as well as probability distributions of its values.