

*Michał Pietrzak**

WYKORZYSTANIE FUNKCJI HÖLDERA W MODELOWANIU CEN SPÓŁEK NA WGPW

Streszczenie. W artykule rozważa się problem zmienności wariancji badanych szeregów czasowych, obserwowanych na rynkach finansowych. W tym celu rozpatruje się standardowy ruch Browna oraz przeprowadza się jego symulację. Porównując standardowy ruch Browna z rzeczywistymi notowaniami, oceniona się jego przydatność jako narzędzia opisu zmienności cen akcji. Następnie zostaje wprowadzony ułamkowy ruch Browna wraz z symulacjami dla różnych wartości wykładnika Hursta. Ułamkowy ruch Browna zostaje uznany za lokalne narzędzie opisu zmienności instrumentów finansowych. W celu przeprowadzenia globalnego opisu zmienności cen akcji, proponuje się wykorzystanie multiułamkowego ruchu Browna. Dodatkowo zostaje też opisane pojęcie funkcji Höldera oraz podana metoda jej symulacji. Celem artykułu jest ukazanie nowego podejścia w stosunku do procesów notowań cen akcji, poprzez propozycję nowego pojęcia „empirycznego zbioru informacji przetwarzanych”. W ten sposób model multiułamkowego ruchu Browna został podzielony na dwa podprocesy. Pierwszy podproces, jakim jest „empiryczny zbiór informacji przetwarzanych”, stanowiłby zbiór informacji dostępnych dla inwestora. Drugi podproces, jakim jest funkcja Höldera, ukazywałby możliwe zachowania, psychikę ludzką na rynkach finansowych. Na zakończenie zostały przeprowadzone empiryczne scenariusze, które potwierdzają możliwość, jak i sens rozbicia modelu cen na dwa podprocesy.

Słowa kluczowe: zmienność wariancji w finansowych szeregach czasowych, wykładnik Hursta, funkcja Höldera, multiułamkowy ruch Browna, empiryczny zbiór informacji przetwarzanych.

1. WPROWADZENIE

W artykule został rozpatrzony problem zmienności wariancji w finansowych szeregach czasowych. Wykorzystano pojęcie wykładnika Hursta, a następnie pojęcie funkcji Höldera do oceny stabilności wariancji na WGPW. Na podstawie badań stwierdzono brak stabilności wariancji, co umożliwiło wprowadzenie multiułamkowego ruchu Browna, jako modelu

* Mgr, absolwent Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu.

opisu cen na rynkach finansowych. Celem artykułu jest zaproponowanie nowego podejścia w stosunku do procesów notowań cen akcji, poprzez wprowadzenie nowego pojęcia „empirycznego zbioru informacji przetwarzanych”. Model multiłałmkowego ruchu Browna podzielono na dwa podprocesy. Pierwszy podproces, jakim jest „empiryczny zbiór informacji przetwarzanych”, stanowiłby zbiór informacji dostępnych dla inwestora. Drugi podproces, jakim jest funkcja Höldera, ukazywałby możliwe zachowania, psychikę ludzką na rynkach finansowych. Dopiero sprzężenie tych dwóch podprocesów ukazywałoby w pełni złożoność i niezwykłość na rynkach finansowych, w tym na WGPW. Na koniec przeprowadzono empiryczne scenariusze, które potwierdzają możliwość, jak i sens rozbicia modelu cen na dwa podprocesy.

2. STANDARDOWY RUCH BROWNA JAKO HIPOTETYCZNE NOTOWANIA

Standardowy ruch Browna został po raz pierwszy użyty do prognozowania zmian instrumentów finansowych przez Louisa Bacheliera. W pracy doktorskiej pt.: *Teoria spekulacji*, powstałej w 1900 r. wysunął on tezę, że ceny na rynkach finansowych opisuje jeden z procesów stochastycznych zwany standardowym ruchem Browna lub inaczej procesem błędzenia losowego. Wykorzystując standardowy ruch Browna do prognozy, Bachelier stwierdził, że wartość oczekiwana zmiany cen jest równa zeru. Oznaczałoby to, że najlepszą prognozą kolejnej ceny byłaby poprzednia cena. Standardowy ruch Browna jest szeroko omówiony w literaturze (Jajuga 1997; Martyn 1996; Mastalerz-Kodzisz 2001; Weron, Weron 1999).



Rys. 1. Porównanie rzeczywistych notowań spółki Wólczanka w zadanym przedziale czasu (29.10.1991–12.07.1994) ze standardowym ruchem Browna

Zmienność jest liczona za pomocą wariancji, którą odrębnie liczy się dla pierwszych 12 obserwacji, a następnie dla kolejnych 160 obserwacji. Biorąc pod uwagę zmienność obydwu procesów przedstawionych na rysunku 1, można stwierdzić, że dla pierwszych dwustu obserwacji zmienność notowań spółki Wólczanka jest znacznie niższa, niż stała zmienność standardowego ruchu Browna. Dla kolejnych obserwacji sytuacja diametralnie ulega zmianie. Zmienność notowań spółki Wólczanka nagle mocno wzrasta i znacznie przewyższa stałą zmienność ruchu Browna. Oznaczałoby to, że standardowy ruch Browna nie jest najlepszym narzędziem do opisu zmienności cen akcji.

$$W(t) = \int_0^t dW(s) \quad (1)$$

Należy zwrócić uwagę na konstrukcję standardowego ruchu Browna opisanego wzorem (1), gdzie $dW(s)$ jest zmienną losową o rozkładzie $N(0, \sqrt{d})$. Przyrost $dW(s)$ jest nazywany przyrostem po standardowym ruchu Browna. Poszczególne wartości procesu stanowią sumę niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Kolejna wartość procesu jest tworzona poprzez dodanie do poprzedniej sumy zmiennych przemnożonych przez odpowiadające im wagi nowej zmiennej losowej, także przemnożonej przez odpowiadającą jej wagę. Jeżeli potraktujemy zmienną losową jako pewną informację, to sumę zmiennych moglibyśmy uznać jako zbiór informacji. Kolejna wartość procesu byłaby wówczas tworzona poprzez dodanie nowej informacji do wcześniejszego zbioru informacji. Kolejne wartości procesu są wynikiem zsumowania wszystkich dotychczasowych przyrostów $dW(s)$, przemnożonych przez odpowiadające im wagi. Wszystkie wagi są równe jeden. Oznacza to, że zmienne losowe nie ulegają zmianie, czyli informacje nie są zniekształcane oraz informacje są od siebie niezależne. Wszystkie wagi są sobie równe. Oznacza to, że znaczenie wszystkich informacji jest jednakowe podczas tworzenia standardowego ruchu Browna.

3. UOGÓLNIENIE STANDARDOWEGO RUCHU BROWNA

Opisując zmienność cen akcji procesem standardowego ruchu Browna, zakładamy, że przyrosty cen akcji są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie normalnym. Jednak w latach czterdziestych i pięćdziesiątych H. E. Hurst, badając poziom wody w rzece Nil, odkrył, że przyrosty poziomu wody są ze sobą skorelowane na przestrzeni nawet wielu lat. Oznaczałoby to, że zmiany poziomu wody nie są zmiennymi losowymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie, jak początkowo zakładał

Hurst. Okazało się też, że zależności dotyczą o wiele dłuższych przedziałów czasu, niż ma to miejsce przy zależnościach krótkoterminowych. Hurst wysunął tezę o istnieniu długookresowej pamięci danych i stworzył narzędzie jej pomiaru, zwane wykładnikiem Hursta H . Pojęcie, jak i metody estymacji wykładnika Hursta podane są w pracach (Jajuga 1997; Peters 1997; Shiryayev 1994; Weron, Weron 1999; Zwolankowska 2000). Wykładnik ten ukazuje charakter danych, jak i siłę zależności między danymi. Dla $H = 0,5$ zależności między danymi nie występują i mamy do czynienia ze standardowym ruchem Browna. Dla $H < 0,5$ proces jest nazywany persystentnym, gdzie występują długoterminowe zależności. Natomiast dla $H > 0,5$ proces jest nazywany antypersystentnym. Mandelbrot, znając prace Hursta, wysunął tezę o istnieniu takich zależności na rynkach finansowych. Zaczęto badać dane ekonomiczne i odnaleziono własność długoterminowej zależności danych w notowaniach giełdowych i kursach walutowych. Odkrycie wykładnika Hursta zainspirowało B. Maldenbrota i J. van Nessa do próby dopasowania ułamkowego ruchu Browna, zaproponowanego przez Kołmogorowa do danych ekonomicznych. Stworzyli oni nową wersję procesu, korzystając z pojęcia całki stochastycznej. Ułamkowy ruch Browna, omawiany w pracach (Martyn 1996; Mastalerz-Kodzisz 2001; Shiryayev 1994; Weron, Weron 1999), jest uogólnieniem standardowego ruchu Browna. Proces ten prezentowany także w pracy (Norros, Valkeila, Virtamo 1996) można określić za pomocą wzoru (2), gdzie H jest wykładnikiem Hursta, $dW(s)$ jest przyrostem po standardowym ruchu Browna, natomiast c_H jest to stała określona wzorem (3).

$$B_H(t) = c_H \left\{ \int_{-\infty}^0 [t-s]^{H-0,5} - (-s)^{H-0,5} dW(s) + \int_0^t (t-s)^{H-0,5} dW(s) \right\} \quad (2)$$

$$c_H = \sqrt{\frac{2H\Gamma(1,5-H)}{\Gamma(0,5+H)\Gamma(2-2H)}} \quad (3)$$

Ten proces uwzględnia wartości wykładnika Hursta od zera do jedynki. B. Maldenbrot i J. van Ness zaproponowali także, by wykładnik Hursta uznać za pewną miarę ryzyka. Dla wartości wykładnika Hursta większych od $H = 0,5$, notowania charakteryzowałyby się mniejszą zmiennością niż notowania dla $H = 0,5$, czyli byłyby mniej ryzykowne. Natomiast dla wartości wykładnika Hursta mniejszych od $H = 0,5$, notowania posiadałyby większą zmienność niż notowania dla $H = 0,5$, co oznacza, że byłyby one bardziej ryzykowne.

Rysunek 2 przedstawia porównanie notowań spółki Wólczanka z ułamkowym ruchem Browna dla $H = 0,8$. Biorąc pod uwagę zmienność dwóch procesów, można stwierdzić, że dla pierwszych 12 obserwacji zmienność notowań spółki Wólczanka jest podobnej wielkości co stała zmienność

ułankowego ruchu Browna dla $H = 0,8$. Sytuacja się zmienia dla dalszych obserwacji. Zmienność notowań spółki Wólczanka nagle wzrasta i jest znacznie większa niż stała zmienność ułankowego ruchu Browna dla $H = 0,8$. Biorąc pod uwagę trafność opisu, można by stwierdzić, że dla pierwszych 12 obserwacji ułankowy ruch Browna dobrze opisuje zmienność notowań Wólczanki, natomiast dla dalszych obserwacji nie nadaje się on do opisu.



Rys. 2. Porównanie rzeczywistych notowań spółki Wólczanka z ułankowym ruchem Browna dla $H = 0,8$

Rysunek 3 przedstawia porównanie notowań spółki Wólczanka z ułankowym ruchem Browna dla $H = 0,35$. Biorąc pod uwagę zmienność dwóch procesów można stwierdzić, że dla pierwszych 12 obserwacji stała zmienność ułankowego ruchu Browna dla $H = 0,35$ jest znacznie większa niż zmienność notowań spółki Wólczanka. Sytuacja się zmienia dla dalszych obserwacji. Zmienność notowań Wólczanki nagle bardzo wzrasta i jest podobnej wielkości co stała zmienności ułankowego ruchu Browna dla $H = 0,35$. Oznaczałoby to, że ułankowy ruch Browna jest lepszym narzędziem opisu zmian cen akcji niż standardowy ruch Browna. Ma jednak tę wadę, że opisuje jedynie lokalnie notowania.

Należy także zwrócić uwagę na konstrukcję ułankowego ruchu Browna. Ułankowy ruch Browna jest procesem tworzonym po przyrostach standardowego ruchu Browna $dW(s)$, co wynika z przedstawionego wcześniej wzoru (2), określonego za pomocą całki stochastycznej. Przyrost po standardowym ruchu Browna jest niezależną zmienną losową o określonym rozkładzie normalnym. Przyrosty po standardowym ruchu Browna $dW(s)$ są przekształcane pod wpływem wag opisanych wzorem $(t-s)^{H-0,5}$. Wartości wag zależą przede wszystkim od odpowiednich wartości wykładnika Hursta. Dla $H = 0,5$ proces redukuje się do standardowego ruchu Browna. Dla $H > 0,5$ wszystkie wagi są mniejsze od jedności. Oznacza to, że



Rys. 3. Porównanie rzeczywistych notowań spółki Wólczanka z ułamkowym ruchem Browna dla $H = 0,35$

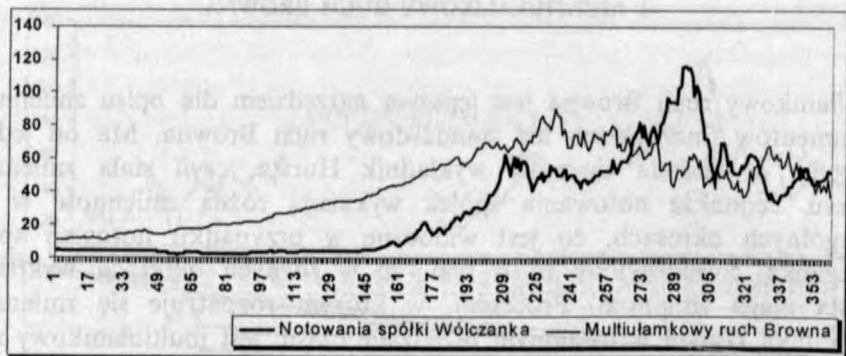
przyrosty standardowego ruchu Browna $dW(s)$ ulegają pomniejszeniu. Traktując przyrost standardowego ruchu Browna jako pewną informację, możemy stwierdzić, że wszystkie informacje użyte przy konstrukcji procesu zostają przemnożone przez wagi mniejsze od jedności. Kolejna wartość procesu byłaby tworzona poprzez dodanie nowej informacji o pomniejszonej wartości do wcześniejszego zbioru informacji, także o pomniejszonej wartości. Powoduje to, że ułamkowy ruch Browna dla $H > 0,5$ posiada mniejszą zmienność niż standardowy ruch Browna. Wszystkie wagi wykazują także tendencję spadkową, co sprawia, że wagi odpowiadające starszym informacjom mają większe wartości od wag przyporządkowanych informacjom nowszym. Oznacza to, że na przyszłą wartość procesu największy wpływ mają najstarsze informacje, czyli przyrosty $dW(s)$. Im informacje bliższe terażniejszości, tym mniejszy wpływ wywierają na wartość procesu. Właśnie to powoduje występowanie długoterminowych zależności między danymi. Dla $H < 0,5$ wszystkie wagi są większe od jedności. Oznacza to, że przyrosty standardowego ruchu Browna $dW(s)$ ulegają powiększeniu, co sprawia, że wszystkie informacje mają wówczas większe wartości niż stanowią w rzeczywistości. Kolejna wartość procesu byłaby tworzona poprzez dodanie nowej informacji o powiększonej wartości do wcześniejszego zbioru informacji, także o sporo powiększonej wartości. Powoduje to, że ułamkowy ruch Browna dla $H < 0,5$ posiada o wiele większą zmienność niż standardowy ruch Browna. Wszystkie wagi wykazują tendencję wzrostową, co oznacza, że wagi odpowiadające starszym informacjom mają mniejsze wartości od wag przyporządkowanych informacjom nowszym. Powoduje to, że na przyszłą wartość procesu największy wpływ mają informacje najbliższe terażniejszości. Im informacje starsze, tym mniejszy wpływ wywierają na wartość procesu.

4. MULTIŁAMKOWY RUCH BROWNA

Ułamkowy ruch Browna jest lepszym narzędziem dla opisu zmienności instrumentów finansowych niż standardowy ruch Browna. Ma on jednak tę wadę, iż zakłada się stały wykładnik Hursta, czyli stałą zmienność procesu. Jednakże notowania spółek wykazują różną zmienność w poszczególnych okresach, co jest widoczne w przypadku notowań spółki Wólczanka. Świadczyłoby to o tym, że w różnych okresach wykładnik Hursta ulega zmianom. Procesem, w którym rozpatruje się zmienność wykładnika Hursta w ustalonym przedziale czasu, jest multiułamkowy ruch Browna, rozpatrywany w pracach (Mastalerz-Kodzis 2001, Shiryaev 1994), określony za pomocą wzoru (4), gdzie $H(t)$ jest funkcją Höldera, której pojęcie i własności są omówione w pracy (Mastalerz-Kodzis 2001), a wyrażenie $dW(s)$ jest przyrostem po standardowym ruchu Browna. Ten proces jest uogólnieniem ułamkowego ruchu Browna, polegającym na tym, że zastępuje się stały wykładnik Hursta funkcją Höldera. Wartości funkcji Höldera należą do przedziału od zera do jedynki. Funkcja Höldera uzależnia wykładnik Hursta od czasu, dzięki temu uwzględnia się zmienność wykładnika Hursta w pewnym przedziale czasu. Najprościej można napisać, funkcja Höldera jest to funkcja, dla której argumentami jest czas, a wartościami wykładnik Hursta. Ostatecznie multiułamkowy ruch Browna jako proces jest wynikiem przekształcenia kolejnych przyrostów standardowego ruchu Browna $dW(s)$, pod wpływem wag $(t-s)^{H(t)-0,5}$. Wartości wag zależą przede wszystkim od odpowiednich wartości funkcji Höldera, a nie jak w przypadku ułamkowego ruchu Browna, od odpowiednich stałych wartości wykładnika Hursta.

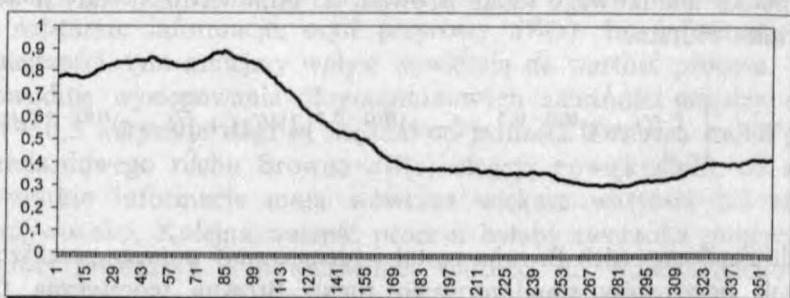
$$B_{H,t}(t) = c_H \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H(t)-0,5} - (-s)^{H(t)-0,5}] dW(s) + \int_0^t (t-s)^{H(t)-0,5} dW(s) \right\} \quad (4)$$

Multiułamkowy ruch Browna został wygenerowany poprzez przekształcenie kolejnych przyrostów standardowego ruchu Browna teoretyczną funkcją Höldera. Rysunek 4 przedstawia porównanie notowań spółki Wólczanka z multiułamkowym ruchem Browna. Teoretyczna funkcja Höldera została skonstruowana przez autora tak, że przyjmuje na początku wartość $H = 0,85$. Następnie wartości funkcji Höldera ulegają spadkowi aż do wartości $H = 0,30$. Powoduje to, że przebieg zmienności multiułamkowego ruchu Browna pokrywa się z przebiegiem zmienności notowań spółki Wólczanka. Oznaczałoby to, że multiułamkowy ruch Browna jest dobrym narzędziem opisu zmienności cen instrumentów finansowych w całym, badanym przedziale



Rys. 4. Porównanie notowań spółki Wólczanka z multiułamkowym ruchem Browna, wygenerowanym dla funkcji Höldera $H(t) = \text{Sin}\left(\frac{t}{45} + \frac{\pi}{3}\right)$

czasu. Efekt ten jest wynikiem zastąpienia stałego w czasie wykładnika Hursta – funkcją Höldera. Chcąc wytłumaczyć, dlaczego zachodzi powyższa zgodność, należałoby postawić tezę o podobieństwie wartości teoretycznej funkcji Höldera, dobranej przez autora oraz wartości wyestymowanej na podstawie notowań, empirycznej funkcji Höldera. Estymacja taka jest możliwa i rysunek 5 przedstawia wyestymowaną empiryczną funkcję Höldera na podstawie notowań spółki Wólczanka w zadanym przedziale czasu (29.10.1991–12.07.1994).



Rys. 5. Wyestymowana funkcja Höldera na podstawie spółki Wólczanka

Wyestymowana funkcja Höldera jest odzwierciedleniem zmian wykładnika Hursta w poszczególnych podokresach. Empiryczna funkcja Höldera przyjmuje na początku wartości $H = 0,8$, po czym jej wartości ulegają spadkowi i oscylują wokół wartości $H = 0,4$. Przebieg założonej teoretycznej funkcji Höldera dla multiułamkowego ruchu Browna zgadza się z przebiegiem

empirycznej funkcji Höldera dla spółki Wólczanka. Fakt ten potwierdza tezę o podobieństwie empirycznej i teoretycznej funkcji Höldera. Zarazem uzasadnia słuszność wykorzystania multiułankowego ruchu Browna dla opisu zmian cen akcji oraz potwierdza założenie o zmienności wartości wykładnika Hursta w czasie.

Metoda estymacji jest przedstawiona w pracy (Mastalerz-Kodzisz 2001). Estymację przeprowadza się dla szeregu czasowego o n obserwacjach. Rozpatrujemy multiułankowy proces ruchu Browna w postaci $B_{i,n} = B_{H(i/n)}(i/n)$, gdzie $0 \leq i \leq n$. Wówczas estymator $\hat{H}(i/(n-1))$ możemy określić za pomocą wzoru (5), gdzie k jest długością sąsiedztwa przy wyznaczaniu estymatora, $m = n/k$ jest liczbą całkowitą, natomiast $S_{k,n}(i)$ jest określone za pomocą wzoru (5).

$$\hat{H}_{i/(n-1)} = \frac{\log(\sqrt{\pi/2} \cdot S_{k,n}(i))}{\log(n-1)} \quad (5)$$

$$S_{k,n}(i) = \frac{m}{n-1} \sum_{j=i-k/2}^{i+k/2} |B_{j+1,n} - B_{j,n}| \quad (6)$$

5. PODZIAŁ MODELU CEN AKCJI NA DWA SPRZĘŻONE ZE SOBĄ PROCESY

Multiułankowy ruch Browna możemy potraktować jako wynik końcowy dwóch sprzężonych ze sobą procesów. Pierwszym procesem byłby standardowy ruch Browna $W(t)$, który można zdefiniować jako zbiór informacji przetwarzanych. Przyrosty po standardowym ruchu Browna $dW(s)$ byłyby pojedynczymi informacjami, które kolejno dochodzą i powiększają zbiór informacji. Zbiór informacji byłby natomiast przetwarzany przez proces, opisany funkcją Höldera. W wyniku przekształcenia zbioru informacji przetwarzanych pod wpływem wag zależnych od funkcji Höldera powstawałby multiułankowy ruch Browna. Możliwe jest postawienie pytania, jak wyglądałby empiryczny zbiór informacji $W_{emp}(t)$, którego teoretycznym przedstawieniem jest standardowy ruch Browna $W(t)$. Gdyby udało się wyestymować empiryczny proces $W_{emp}(t)$, opisany wzorem (8), z rzeczywistych notowań spółki, zastąpiłby on proces standardowego ruchu Browna i tworzyłby nowy empiryczny zbiór informacji przetwarzanych. Chcąc wyliczyć empiryczny zbiór informacji przetwarzanych $W_{emp}(t)$, konieczne staje się rozpatrzenie wzoru na multiułankowy ruch Browna, czego rezultatem jest jego redukcja do postaci określonej wzorem (7):

$$B_H(t) = c_H \left\{ \int_0^t (t-s)^{H(t)-0.5} dW_{emp}(s) \right\} \quad (7)$$

$$W_{emp}(t) = \alpha_0 + \sum_1^t dW_{emp}(s) \quad (8)$$

Następnie w celu wyestymowania empirycznego zbioru informacji przetwarzanych $W_{emp}(t)$, opisanego wzorem (8) należy:

1. Posiadać wartości cen akcji badanej spółki w zadanym okresie. Notowania spółki Indykpol przedstawia rysunek 6.



Rys. 6. Notowania spółki Indykpol (20.10.1995–11.09.2001)

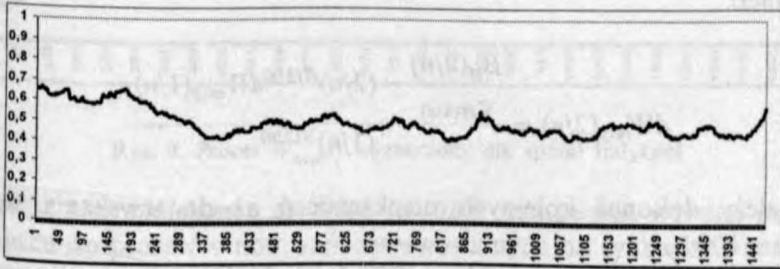
2. Obliczyć wykładnik Hursta dla badanego procesu, który będzie globalną miarą. Można użyć jednej z najbardziej powszechnych metod, analizę (R-S), przedstawioną w pracy (Weron, Weron 1999).

3. Przekształcić szereg w celu estymacji funkcji Höldera. Zakładając, że liczbą wszystkich obserwacji jest n , czas zostanie przekształcony z (t_1, t_2, \dots, t_n) na $(t_1/n, t_2/n, \dots, t_n/n)$. Następnie dokonujemy zmian wartości szeregu za pomocą formuły (9), w taki sposób dobierając wartość H , by wartość estymatora wykładnika Hursta, określonego wzorem (10) i przedstawionego w pracy (Shiryaev 1994), była równa wartości wykładnika Hursta, obliczonego za pomocą analizy (R-S):

$$B_H(t/n) = (1/n)^H B_H(t) \quad (9)$$

$$\hat{H} = \frac{\log[\sqrt{\pi/2} \left(\left(\sum_{t=1}^n |B_H(t/n) - B_H((t-1)/n)| \right) / n \right)]}{\log(1/n)} \quad (10)$$

4. Wyliczyć wartości funkcji Höldera dla zbioru argumentów $(t_1/n, t_2/n, \dots, t_n/n)$ za pomocą metody estymacji przedstawionej w pracy (Mastalerz-Kodzis 2001). Wartości wyestymowanej funkcji Höldera dla spółki Indykpol przedstawia rysunek 7.



Rys. 7. Wartości wyestymowanej funkcji Höldera na podstawie spółki Indykpol

5. Od każdej wartości w szeregu odjąć pierwszą wartość w szeregu. Pierwsza wartość będzie stałą α_0 występującą w równaniu na empiryczny zbiór informacji przetwarzanych $W_{emp}(t/n)$, czyli wartością, z której proces startuje. W ten sposób szereg skróci się nam o jedną obserwację.

6. Dokonać numerycznych obliczeń w celu uzyskania $n-1$ wartości $dW_{emp}(t/n)$, gdzie:

$$- dW_{emp}(0) = \alpha_0,$$

- następnie za pomocą pojęcia całki stochastycznej, której własności są omówione w pracy Sobczyka (1996), należy przekształcić wyrażenie:

$$B_H(2/n) c_{H(2/n)} \int_{1/n}^{2/n} ((2/n) - (t/n))^{H(2/n)-0,5} dW_{emp}(t/n)$$

na

$$\begin{aligned} B_H(2/n) &= c_{H(2/n)} \sum_{1/n}^{2/n} ((2/n) - (t/n))^{H(2/n)-0,5} dW_{emp}(t/n) = \\ &= c_{H(2/n)} [(1/n)^{H(2/n)-0,5} dW_{emp}(1/n)], \end{aligned}$$

co w ostateczności prowadzi do postaci:

$$dW_{emp}(1/n) = \frac{B_H(2/n)}{c_{H(2/n)}(1/n)^{H(2/n)-0,5}}$$

- kolejną wartość $dW_{emp}(2/n)$ otrzymujemy z przekształcenia następującego wyrażenia:

$$\begin{aligned}
 B_H(3/n) &= c_{H(3/n)} \sum_{1/n}^{3/n} ((3/n) - (t/n))^{H(3/n)-0.5} dW_{emp}(t/n) = \\
 &= c_{H(3/n)} [(2/n)^{H(3/n)-0.5} dW_{emp}(1/n) + (1/n)^{H(3/n)-0.5} dW_{emp}(2/n)]
 \end{aligned}$$

do postaci:

$$dW_{emp}(2/n) = \frac{B_H(3/n) - (2/n)^{H(3/n)} dW_{emp}(1/n)}{(1/n)^{H(3/n)}}$$

– należy dokonać kolejnych przekształceń aż do uzyskania wartości $dW_{emp}(n-1/n)$.

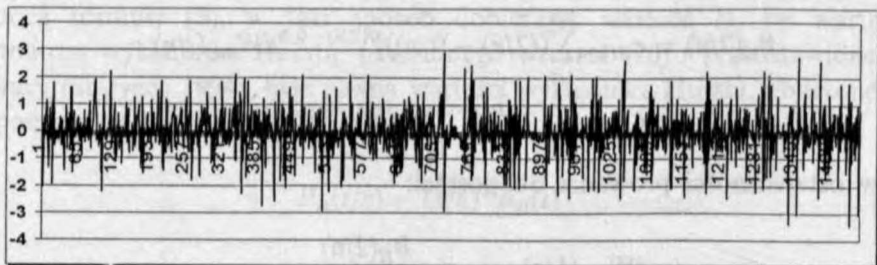
7. Z uzyskanych przyrostów $dW_{emp}(t/n)$ buduje następujący proces zgodnie ze wzorem (11).

$$W_{emp}(t/n) = \alpha_0 + \sum_{1/n}^{t/n} dW_{emp}(t/n) \quad (11)$$

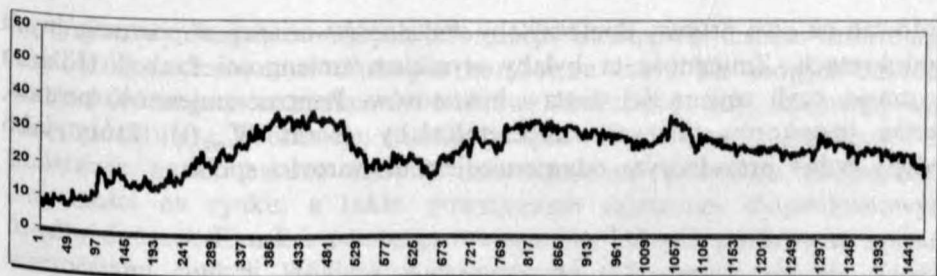
8. Na koniec wszystkie wartości $W_{emp}(t/n)$ są przekształcane zgodnie z formułą określoną wzorem (12), gdzie wartość H została ustalona w punkcie 3:

$$B_H(t) = B_H(t/n)/(1/n)^H \quad (12)$$

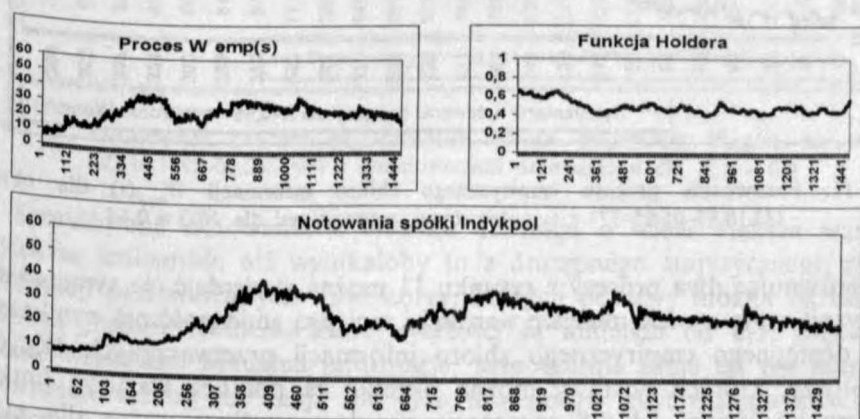
W ten sposób otrzymuje się empiryczny zbiór informacji przetwarzanych $W_{emp}(t)$. Wyniki estymacji przyrostów $dW_{emp}(s)$ obrazuje rysunek 8, natomiast empiryczny zbiór informacji przetwarzanych $W_{emp}(t)$, przeprowadzonej dla spółki Indypol w okresie (20.10.1995–11.09.2001), przedstawia rysunek 9.



Rys. 8. Empiryczne przyrosty $dW_{emp}(s)$

Rys. 9. Proces $W_{emp}(t)$ wyznaczony dla spółki Indykpol

Główną ideą niniejszego artykułu jest zaproponowanie nowego podejścia w stosunku do procesów notowań obserwowalnych na rynkach finansowych, które prezentuje rysunek 10. Podejście to miałyby polegać na utworzeniu dwóch nowych procesów, składających się na proces notowań spółek giełdowych. Dopiero sprzężenie tych dwóch procesów pozwoliłoby na utworzenie ostatecznego procesu notowań, zgodnie ze wzorem (7), gdzie pierwszym procesem byłby proces $W_{emp}(t)$, natomiast drugi proces stanowiłaby funkcja Höldera $H(t)$. Proces $W_{emp}(t)$ odzwierciedlałby informacje o spółce, dostępne dla inwestora. Byłyby to informacje o przeszłych cenach oraz dostępne informacje publiczne. Każda nowa informacja poszerzałaby proces $W_{emp}(t)$ i jednocześnie świadczyłaby o zmianie wartości spółki giełdowej. Powyższe informacje byłyby przetwarzane przez inwestorów, zgodnie z charakterem ich bieżących przekonań. Bieżące przekonania i sposób reagowania na dostępne informacje przez inwestorów opisywałaby funkcja Höldera. Wynikiem reakcji rynku na informacje, czyli rzeszy inwestorów posiadających określone postawy, byłyby notowania spółek giełdowych. Dopiero rozbitcie



Rys. 10. Podział modelu cen akcji na dwa sprzężone ze sobą procesy

notowań na dwa procesy tłumaczyłoby zmienność wariacji w poszczególnych podokresach. Zmienność ta byłaby wynikiem zmienności funkcji Höldera w czasie, czyli zmienności postaw inwestorów. Poprzez zmienność postaw, rzesza inwestorów znacznie zniekształcałaby proces $W_{emp}(t)$, który jako jedyny byłby prawdziwym odzwierciedleniem wartości spółki.

6. SCENARIUSZE NOTOWAŃ AKCJI SPÓŁKI INDYKPOL

6.1. Scenariusz pierwszy

Została dokonana symulacja na podstawie uzyskanego wcześniej empirycznego zbioru informacji $W_{emp}(t)$ dla spółki Indykpol. Istota symulacji polegała na przekształceniu procesu empirycznego zbioru informacji $W_{emp}(t)$ pod wpływem procesu opisanego funkcją Höldera o stałych wartościach $H(t) = 0,65$. Wycinek zbioru informacji $W_{emp}(t)$ został tak dobrany, by charakteryzował się tendencją wzrostową. W wyniku przeprowadzonej symulacji otrzymano hipotetyczne notowania spółki Indykpol, przedstawione na rysunku 11.



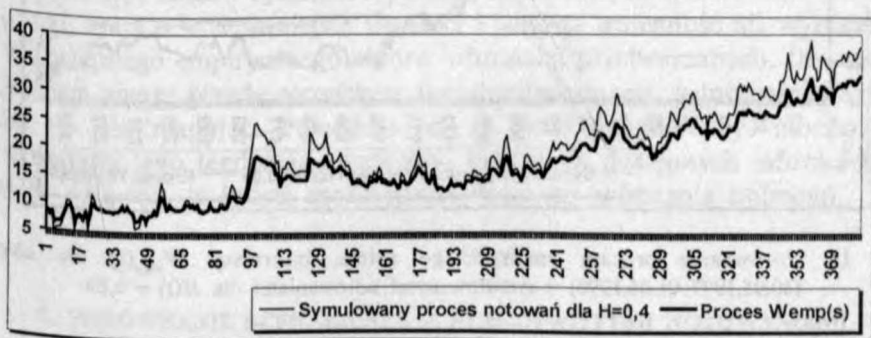
Rys. 11. Porównanie procesu empirycznego zbioru informacji $W_{emp}(t)$ dla okresu (23.10.95-05.05-97) z symulowanymi notowaniami dla $H(t) = 0,65$

Porównując dwa procesy z rysunku 11 można stwierdzić, że symulowane notowanie mają o wiele mniejsze wartości i mniejszą zmienność niż wynikałoby to z dostępnego empirycznego zbioru informacji przetwarzanych $W_{emp}(t)$. Inwestorzy, których postawy można określić za pomocą wartości funkcji Höldera większymi od 0,5 rozpatrują przede wszystkim ważne dla nich, stare informacje. Informacje bieżące nie mają dla tych inwestorów zbyt dużego znaczenia. Inwestorzy wierzą w pewien długookresowy scenariusz

na rynku, wynikający ze starych informacji. Uznają oni bieżące informacje, jako krótkookresowe, w dłuższym horyzoncie czasu nie mogące zakłócić długookresowego scenariusza inwestorów. Inwestorzy tacy odrzucają więc bieżące, aktualne informacje, wierząc w sprawdzenie się ich oczekiwań, na podstawie nawet bardzo starych informacji, co powoduje zmniejszenie zmienności na rynku, a także powstawanie zależności długookresowych między danymi. Rynek z przewagą inwestorów, których postawy są opisane wartościami funkcji Höldera większymi od 0,5, często reaguje bardzo niezrozumiale. Reaguje on zbyt słabo, niż wymagałaby tego bieżąca tendencja wzrostowa.

6.2. Scenariusz drugi

Została dokonana kolejna symulacja, której istota polegała na przekształceniu wybranego wcześniej wycinka procesu empirycznego zbioru informacji $W_{emp}(t)$ pod wpływem procesu opisanego funkcją Höldera o stałych wartościach $H(t) = 0,4$. W wyniku symulacji otrzymano hipotetyczne notowania spółki Indykpol, przedstawione na rysunku 12.



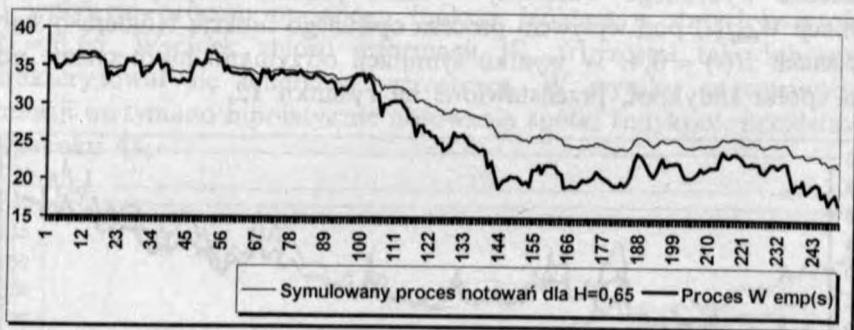
Rys. 12. Porównanie procesu empirycznego zbioru informacji $W_{emp}(t)$ dla okresu (23.10.1995–05.05.1997) z symulowanymi notowaniami dla $H(t) = 0,4$

Symulowane notowania z rysunku 12 mają o wiele większe wartości i większą zmienność niż wynikałoby to z dostępnego empirycznego zbioru informacji przetwarzanych. Inwestorzy, których postawy można określić za pomocą funkcji Höldera, której wartości są mniejsze od 0,5, rozpatrują przede wszystkim aktualne informacje, jednocześnie silnie na nie reagując. Informacje starsze nie mają dla tych inwestorów zbyt dużego znaczenia. Inwestorzy nie posiadają opracowanego długookresowego scenariusza na rynku, wynikającego ze starych informacji. Wierzą oni jedynie w scenariusz krótkookresowy, gdyż rynek, na którym inwestują, jest dla nich ryzykowny

i niepewny. Uznają oni bieżące informacje jako najważniejsze, choć informacje te potrafią zmieniać się z godziny na godzinę. Rynek z przewagą inwestorów, których postawy są opisane wartościami funkcji Höldera mniejszymi od 0,5, charakteryzuje się zwiększoną zmiennością. Rynek taki reaguje zbyt mocno, niż wynikałoby to z bieżącej sytuacji wzrostowej opartej na dostępnych informacjach.

6.3. Scenariusz trzeci

Została dokonana symulacja na podstawie funkcji Höldera o stałych wartościach $H(t) = 0,65$. Tym razem wycinek empirycznego zbioru informacji $W_{emp}(t)$ tak dobrano, by charakteryzował się tendencją spadkową, co przedstawia rysunek 13.



Rys. 13. Porównanie procesu empirycznego zbioru informacji $W_{emp}(t)$ dla okresu (30.05.1997–01.06.1998) z symulowanymi notowaniami dla $H(t) = 0,65$

W tym przypadku symulowane notowania z rysunku 13 charakteryzują się wyższymi wartościami oraz mniejszą zmiennością niż wynikałoby to z dostępnych informacji. Inwestorzy w małym stopniu biorą pod uwagę aktualne informacje o tendencji spadkowej. Podejmując decyzję, opierają się oni głównie na starszych informacjach, dzięki czemu ceny akcji nie tracą tak dużo na wartości. Rynek nie reaguje tak, jak wymagałaby tego silna tendencja spadkowa. Zbiór informacji $W_{emp}(t)$ jest znacznie zniekształcony pod wpływem ludzkiego działania, które opiera się na wierze, że tendencja spadkowa jest krótkookresowa. Poprzez swoje działania inwestorzy powodują długookresowe zależności między zmianami cen akcji, które to stają się mniej czułe na krótkookresowe załamania oraz charakteryzują się niższą zmiennością.

6.4. Scenariusz czwarty

Dokonano ostatniej symulacji na podstawie funkcji Höldera o stałych wartościach $H(t) = 0,4$. Wycinek empirycznego zbioru informacji $W_{emp}(t)$ charakteryzuje się tendencją spadkową. Całość przedstawia rysunek 14.



Rys. 14. Porównanie procesu empirycznego zbioru informacji $W_{emp}(t)$ dla okresu (30.05.1997–01.06.1998) z symulowanymi notowaniami dla $H(t) = 0,4$

Dokonując analizy rysunku 14, należy stwierdzić, iż symulowane wartości notowań mają o wiele mniejsze wartości i większą zmienność niż wynikałoby to z dostępnego empirycznego zbioru informacji przetwarzanych. Inwestorzy biorą pod uwagę przede wszystkim aktualne informacje, jednocześnie bardzo silnie na nie reagując. Powoduje to, że rynek reaguje zbyt mocno, niż wymagałaby tego tendencja spadkowa, oparta na dostępnych informacjach. Jest to sytuacja, w której może nawet dojść do załamania notowań.

7. PORÓWNANIE SCENARIUSZY Z RZECZYWISTYMI NOTOWANIAMISPÓLKI INDEKPOL

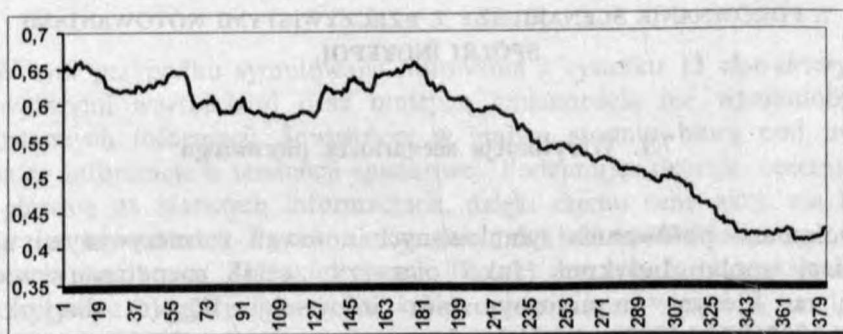
7.1. Weryfikacja scenariusza pierwszego

Dokonano porównania symulowanych notowań z rzeczywistymi notowaniami spółki Indekpol. Jako pierwszy został rozpatrzony scenariusz, w którym empiryczny zbiór informacji $W_{emp}(t)$ dla okresu (23.10.1995–05.05.1997) ma tendencję wzrostową, a symulowane notowania są tworzone poprzez przekształcenie tego zbioru funkcją Höldera o stałych wartościach $H(t) = 0,65$.

Porównując ze sobą rysunki 15 i 16 można łatwo zauważyć, że symulacja notowań dla stałych wartości $H = 0,65$ jest jak najbardziej trafna dla pierwszych 200 obserwacji. Kiedy wartości wyestymowanej funkcji Höldera wynoszą $H = 0,65$ (obserwacje od pierwszej do dwusetnej oscylują wokół tej wartości) i są równe wartościom funkcji Höldera użytym podczas symulacji, rzeczywiste notowania w pełni pokrywają się z symulowanymi notowaniami. Dla dalszych obserwacji, kiedy wartości H zmierzają do 0,4 i różnią się od wartości funkcji Höldera użytych podczas symulacji, rzeczywiste ceny akcji wykazują większą zmienność i znacznie różnią się od symulowanych notowań. To uzasadnia wykorzystanie multiułamkowego ruchu Browna jako modelu cen akcji na rynkach finansowych, a także rozdzielenie go na dwa podprocesy: empirycznego zbioru informacji przetwarzanych oraz podprocesu postaw inwestorów, opisanego funkcją Höldera.



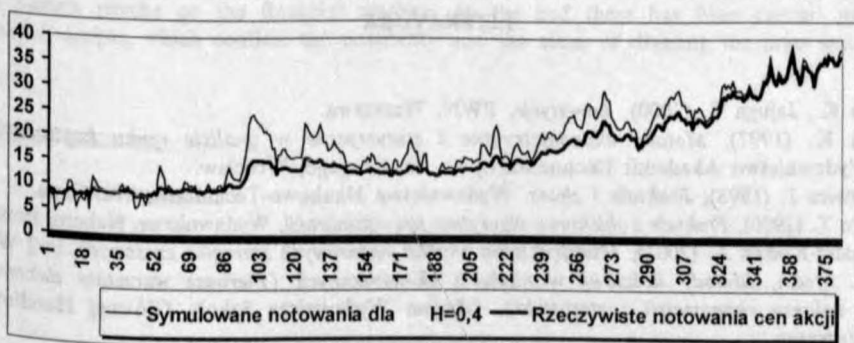
Rys. 15. Porównanie rzeczywistych notowań z symulowanymi notowaniami dla $H(t) = 0,65$



Rys. 16. Wyestymowana funkcja Höldera dla spółki Indypol (23.10.1995–05.05.1997)

7.2. Weryfikacja scenariusza drugiego

Następnie rozpatrzono scenariusz, w którym empiryczny zbiór informacji $W_{epm}(t)$ dla okresu (23.10.1995–05.05.1997) ma tendencję wzrostową, a symulowane notowania są tworzone poprzez przekształcenie empirycznego zbioru informacji $W_{epm}(t)$ funkcją Höldera o stałych wartościach $H(t) = 0,4$.



Rys. 17. Porównanie rzeczywistych notowań z symulowanymi notowaniami dla $H(t) = 0,4$

Porównując ze sobą rysunki 16 i 17 można stwierdzić, iż kiedy wartości wyestymowanej funkcji Höldera (obserwacje od pierwszej aż do trzydziestej) różnią się od stałej wartości $H = 0,4$ ustalonej dla symulowanych notowań, wyniki symulacji znacznie różnią się od rzeczywistych cen akcji. Dla końcowych 50 obserwacji, kiedy wartości funkcji Höldera dla rzeczywistych notowań oscylują wokół wartości $H = 0,4$ ustalonej dla symulowanych notowań, wartości symulacji pokrywają się z rzeczywistymi cenami akcji.

8. ZAKOŃCZENIE

Celem artykułu było zaproponowanie nowego podejścia w stosunku do procesów notowań cen akcji. Rozdzielono proces notowań na dwa sprzężone ze sobą podprocesy. Pierwszym był proces $W_{epm}(t)$, drugim zaś proces wyrażony za pomocą funkcji Höldera. Pierwszy podproces jest podrzędny względem drugiego. Oznacza to, że proces rzeczywistych notowań jest wynikiem przekształcenia procesu $W_{epm}(t)$ pod wpływem wag zależnych od funkcji Höldera. Dopiero złożenie dwóch podprocesów razem pozwala na ukazanie niezwykłości rynków finansowych. Obecność człowieka, jako inwestora, wywala na rynkach finansowych, oprócz zależności krótkookresowych, także zależności długookresowe, co nieraz powoduje niezrozumiałość zbyt słabej reakcji rynku na bieżące informacje. Najwięcej jednak emocji

wywołuje przekształcenie pod wpływem ludzkiej psychiki procesu notowań w proces antypersystentny. Ludzie reagują wówczas bardzo żywiołowo na aktualne informacje. Wystarczy jedna nagła informacja, która w innym przedziale czasowym nie wywołałaby nawet reakcji rynku, by w bieżącej sytuacji mogła wywołać załamanie się rynku.

LITERATURA

- Jajuga K., Jajuga T. (2000), *Inwestycje*, PWN, Warszawa.
- Jajuga K. (1997), *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. O. Langego, Wrocław.
- Kudrewicz J. (1993), *Fraktale i chaos*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Martyn T. (1996), *Fraktale i obiektowe algorytmy ich wizualizacji*, Wydawnictwo Nakom, Poznań.
- Mastalerz-Kodzis A. (2001), *Multifraktalna analiza finansowych szeregów czasowych*, [w:] Welfe A. (red.), *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych (Pierwsze warsztaty doktorskie z zakresu ekonometrii i statystyki)*, Oficyna Wydawnicza Szkoły Głównej Handlowej, Warszawa.
- Norros I., Valkeila E., Virtamo J. (1996), *An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions*, „Technical Report Preprint”, 133, University of Helsinki, Department of Mathematics, November.
- Peters E. (1997), *Teoria chaosu, a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa.
- Schuster H. G. (1995), *Chaos deterministyczny*, PWN, Warszawa.
- Shiryaev A. N. (1994), *Essentials of stochastic finance*, World Scientific, Singapore.
- Sobczyk K. (1996), *Stochastyczne równania różniczkowe*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Steward I. (1995), *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, PWN, Warszawa.
- Weron A., Weron R. (1999), *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Zawadzki H. (1996), *Chaotyczne systemy dynamiczne*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice.
- Zwolankowska M. (2000), *Metoda segmentowo-wariacyjna. Nowa propozycja liczenia wymiaru fraktalnego*, „Przegląd Statystyczny”, 1–2.

Michał Pietrzak

USING HÖLDER FUNCTION IN MODELING OF STOCK PRICES AT THE WARSAW STOCK EXCHANGE

Summary

In this work there is considered a problem of variation variability of the searched time series, observed on the financial markets. To do this one has to see through the standard Brownian motion and carry out its simulation. Comparing the standard Brownian motion with the realistic quotation there comes a note of its usefulness as a tool of showing the financial instruments varieties. Next there is introduced fractional Brownian motion with simulation for different quantities of Hurst exponent. The fractional Brownian motion is

considered as a local tool of showing the financial instruments varieties. To carry out the global description of assets' prices varieties, it is proposed to use multifractional Brownian motion. Also there is shown the idea of Hölder function and the method of its simulation. The basic target of this work is showing the new idea of the processes of quotation of assets' prices, through the proposal of a new idea "empirical set of information processing". This way multifractional Brownian motion model has been divided into two subprocesses. The first subprocess "empirical sets of information processing" is a complex of information available for the investor. The second subprocess, Hölder function, is showing the possible behavior and human psyche on the financial markets. In the end there has been carried out the empirical scripts, which confirm the possibility and the sense of dividing the price model.