ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 166, 2003

*Anna Rutkowska-Ziarko**

ROZKŁAD STÓP ZWROTU PORTFELI AKCJI ZBUDOWANYCH W OPARCIU O SEMIWARIANCJĘ

Streszczenie. Porównano rozkłady stóp zwrotu portfeli zbudowanych w oparciu o klasyczny model Markowitza z portfelami efektywnymi minimalizującymi semiwariancję od założonej stopy zwrotu. Przeanalizowano podstawowe charakterystyki rozkładu stóp zwrotu oraz zbadano ich zgodność z rozkładem normalnym. Badania objęły wszystkie spółki (56), które w całym okresie od 01.01.1996 r. do 28.02.2001 r. były notowane na WGPW.

Żaden z badanych portfeli nie charakteryzuje się normalnym rozkładem stóp zwrotu. Dla portfeli minimalizujących semiwariancję od założonej stopy zwrotu, odstępstwo od rozkładu normalnego jest wyraźniejsze niż dla portfeli zbudowanych zgodnie z klasycznym modelem Markowitza.

Oznacza to, że dla polskiego rynku akcji właściwsze jest budowanie portfeli z wykorzystaniem semiwariancji od założonej stopy zwrotu niż wariancji.

Słowa kluczowe: portfel efektywny, ryzyko, stopa zwrotu, wariancja, semiwariancja, semiwariancja od założonej stopy zwrotu.

W klasycznym modelu Markowitza (1952) zakłada się, że inwestorzy dokonują wyboru pomiędzy poszczególnymi portfelami na podstawie średniej stopy zwrotu i wariancji. Takie podejście ma uzasadnienie, gdy stopy zwrotu porównywanych portfeli mają rozkład normalny lub funkcje użyteczności poszczególnych inwestorów są kwadratowe (Elton, Gruber 1997; Haugen 1996).

Kwadratowa funkcja użyteczności posiada pewne niepożądane własności, przez co źle opisuje faktyczne zachowania inwestorów (Haugen 1996). Przede wszystkim dla pewnej stopy zwrotu osiąga maksimum i jej wartość następnie maleje wraz z rosnącą stopą zwrotu. Jest to w jawnej sprzeczności z preferencjami inwestorów, którzy zawsze wolą posiadać więcej niż mniej.

Rozkłady stóp zwrotu niektórych spółek notowanych na WGPW istotnie odbiegają od rozkładu normalnego (Kolupa, Plebaniak 2000; Kowalewski, Kuziak 2001; Markowski 2000; Rutkowska-Ziarko 2002). Dodatkowo, aby

* Mgr, asystent, Katedra Statystyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski.

portfele zbudowane z akcji o normalnym rozkładzie stóp zwrotu miały również rozkład normalny, stopy zwrotu poszczególnych akcji powinny być niezależnymi zmiennymi losowymi, co jak pokazują badania, w praktyce nie występuje (Kolupa, Plebaniak 2000).

W pionierskiej pracy o wyborze portfela Markowitz (1959) – późniejszy noblista – proponuje alternatywną do wariancji miarę ryzyka, semiwariancję od założonej stopy zwrotu, która dobrze odwzorowuje rzeczywiste preferencje i obawy inwestorów, w sytuacji gdy traktują oni ryzyko jako możliwość uzyskania stopy zwrotu niższej od zadanej (Jajuga, Jajuga 1997). Poszukując efektywnego portfela dla takiej miary ryzyka, minimalizowana jest suma kwadratów odchyleń „w dół" od założonej stopy zwrotu, nie ma natomiast żadnych ograniczeń nałożonych na odchylenia „w górę" od założonej stopy zwrotu.

Celem artykułu jest porównanie rozkładu stóp zwrotu portfeli zbudowanych na podstawie klasycznego modelu Markowitza z portfelami efektywnymi, minimalizującymi semiwariancję od założonej stopy zwrotu.

Inwestor ma do dyspozycji k akcji, $A_1, A_2, ..., A_k$, z których można budować portfele. Skład portfela opisuje wektor: $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, ..., x_k)^T$ o składowych nieujemnych ($x_i \geqslant 0$) oraz unormowanych do jedności:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1 \tag{1}$$

W zapisie macierzowym:

$$\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{I}_k = 1 \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{I}_k = (1, 1, ..., 1)^T$ jest wektorem k-wymiarowym o składowych równych jeden.

Stopy zwrotu z_{it} każdej akcji $A_i (i = 1, 2, ..., k)$ są rejestrowane w ustalonych m jednostkach czasowych $(t = 1, 2, ..., m)$.
Średnią stopę zwrotu z portfela zawierającego k akcji wyraża:

$$\overline{z}_p = \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{z}_i = \boldsymbol{X}^T \overline{\boldsymbol{Z}} \tag{3}$$

gdzie $\overline{\boldsymbol{Z}} = (\overline{z}_1, ..., \overline{z}_k)^T$ jest wektorem średnich stóp zwrotu akcji.

Stopa zwrotu z_{pt} w momencie t zależy zarówno od składu portfela, jak i od stóp zwrotu poszczególnych akcji w momencie t:

$$z_{pt} = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Z}_t = \sum_{i=1}^{k} x_i z_{it}, \quad t = (1, ..., m) \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{Z}_t = (z_{it}, ..., z_{kt})^T$ jest t-tą kolumną macierzy $\boldsymbol{Z}$ o elementach z_{it}.

W klasycznym modelu Markowitza (1952) za miarę ryzyka przyjmuje się wariancję stopy zwrotu portfela:

$$s_p^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}(z_{ot}-\overline{z}_p)^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}X^T(Z_t-\overline{Z})(Z_t-\overline{Z})^T X = X^T W X \tag{5}$$

gdzie:

$$W = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}(Z_t-\overline{Z})(Z_t-\overline{Z})^T \tag{6}$$

jest $(k \times k)$ wymiarową macierzą wariancji-kowariancji z próby.

Problem wyznaczenia wektora X udziałów akcji sprowadza się do rozwiązania następującego zagadnienia optymalizacyjnego – zminimalizować:

$$s_p^2 = X^T W X \tag{7}$$

przy ograniczeniach:

$$X^T I_k = 1 \tag{8}$$

$$X^T\overline{Z} \geqslant \gamma \tag{9}$$

$$X \in R^k, \quad X \geqslant 0 \tag{10}$$

gdzie γ jest określoną z góry stopą zwrotu całego portfela, przy założeniu $\gamma \leqslant \max \overline{z}_i$.

Podstawiając za γ różne wartości z przedziału $<\min \overline{z}_i; \max \overline{z}_i>$, otrzymujemy granicę efektywną, utworzoną z portfeli posiadających najniższe wariancje dla poszczególnych zadanych stóp zwrotu. Postępując według tej procedury, możemy uznać za nieefektywne portfele o niskich ujemnych odchyleniach od zadanej stopy zwrotu i jednocześnie dużych odchyleniach dodatnich, a więc bardzo korzystne dla inwestorów mimo wysokiej wariancji.

Wyznaczenie portfeli efektywnych dla ryzyka, rozumianego jako możliwość osiągnięcia stopy zwrotu niższej od zadanej, sprowadza się do minimalizacji semiwariancji od założonej stopy zwrotu przy określonym z góry γ, a więc do rozwiązania następującego zagadnienia optymalizacyjnego – zminimalizować:

$$ds_p^2(\gamma) = X^T D(\gamma) X \tag{11}$$

przy ograniczeniach (8–10), gdzie $\boldsymbol{D}(\gamma)$ jest macierzą semiwariancji-semikowariancji od założonej stopy zwrotu γ o elementach $d_j(\gamma)$:

$$d_{ij}(\gamma) = \frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^{m} d_{ijt}(\gamma) \tag{12}$$

gdzie:

$$d_{ijt}(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z_{pt} > \gamma \\ (z_{it} - \gamma)(z_{jt} - \gamma) & \text{dla } z_{pt} \leqslant \gamma \end{cases} \tag{13}$$

Wyznaczając macierz $\boldsymbol{D}(\gamma)$, musimy wiedzieć, w których okresach stopa zwrotu całego portfela była niższa od założonej, a to zależy zarówno od założonej stopy zwrotu, jak i od składu portfela. Sprawia to, że wyznaczanie portfeli efektywnych dla semiwariancji od założonej stopy zwrotu jest bardziej złożone niż dla wariancji i może być rozwiązane w ramach procedury iteracyjnej (Rutkowska-Ziarko, Olesinkiewicz 2002), wychodzącej z dowolnego portfela spełniającego warunek (1), np. portfela Markowitza. Zagadnienie to różni się od klasycznego modelu Markowitza tym, że macierz wariancji-kowariancji we wzorze (7) została zastąpiona macierzą $\boldsymbol{D}(\gamma)$, która zależy nie tylko od założonej przez inwestora stopy zwrotu γ, ale także od wektora $\boldsymbol{X}$ otrzymanego w poprzedniej iteracji. Szczegóły metody wykorzystującej algorytm Wolfa (Grabowski 1982) programowania kwadratowego opisano w pracach (Olesinkiewicz, Rutkowska-Ziarko 2003; Rutkowska-Ziarko, Olesinkiewicz 2002).

Portfel efektywny minimalizujący ryzyko rozumiane jako wariancja stóp zwrotu będziemy nazywać portfelem Markowitza, natomiast minimalizujący semiwariancję od założonej stopy zwrotu – portfelem SEM.

W pracy (Rutkowska-Ziarko, Olesinkiewicz 2002) zbudowano portfele Markowitza i portfele SEM ze wszystkich spółek (56), które w całym okresie od 1.01.1996 r. do 28.02.2001 r. były notowane na giełdzie, dla następujących założonych półrocznych stóp zwrotu: 1%, 5%, 10%, ..., 35%, 40%, 44% (43,9997). Najwyższa stopa zwrotu, dla której przeprowadzono obliczenia wynika z faktu, że najwyższa średnia stopa zwrotu dla jednej spółki (Optimus) wynosiła 43,9997%.

Stopy zwrotu zostały obliczone według wzoru:

$$z_{it} = \frac{c_{i,t+s} - c_{it}}{c_{it}} 100\% \tag{14}$$

gdzie:

s – długość okresu inwestycyjnego wyrażona w dniach;

c_{it} – wartość notowania i-tego aktywu w momencie t;

$c_{i,t+s}$ – wartość notowania i-tego aktywu po s dniach inwestowania rozpoczętego w momencie t.

Liczba jednostek czasowych m, w których rejestrowane są stopy zwrotu, zależy od liczby notowań i od długości okresu inwestycyjnego:

$$m = n - s \tag{15}$$

gdzie n to liczba notowań.

Dla portfeli SEM i portfeli Markowitza obliczono następujące charakterystyki rozkładu stóp zwrotu: średnią, medianę, minimum, maksimum, rozstęp, wariancję, semiwariancję od założonej stopy zwrotu, współczynnik asymetrii oraz współczynnik spłaszczenia. Zbadano także normalność rozkładu stóp zwrotu testem D'Agostino-Pearsona. Z uwagi na dużą wartość m, która w naszym przypadku wynosi 1165, zastosowano zmodyfikowaną funkcję testową słuszną dla $m > 200$, o postaci (Domański 1990):

$$K^2 = \frac{m}{24}[4(b_1)^2 + b_2^2] \tag{16}$$

gdzie $b_1 = \frac{m_3}{S^3}$ jest współczynnikiem asymetrii, $b_2 = \frac{m_4}{S^4} - 3$ współczynnikiem spłaszczenia, S odchyleniem standardowym, a m_3, m_4 są momentami centralnymi trzeciego i czwartego rzędu.

Przy prawdziwości hipotezy H_0, zakładającej normalność rozkładu, statystyka K^2 ma rozkład χ^2 o dwóch stopniach swobody. Dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ wartość krytyczna tego testu wynosi 5,991.

Żaden z badanych portfeli nie ma normalnego rozkładu stóp zwrotu (tabela 1), przy czym odstępstwo od rozkładu normalnego jest wyraźniejsze dla portfeli SEM (wyższe wartości statystyki D'Agostino-Pearsona) i to zarówno pod względem skośności, jak i spłaszczenia. Wszystkie portfele są prawostronnie skośne, co jest korzystne dla inwestorów (Elton, Gruber 1997; Jajuga, Jajuga 1997; Kolupa, Plebaniak 2000; Haugen 1996), portfele SEM są bardziej „asymetryczne" i jednocześnie „bardziej wysmukłe" od portfeli Markowitza. Nawet dla portfeli efektywnych w sensie minimalnej wariancji nie jest spełnione podstawowe założenie klasycznego modelu Markowitza o normalności rozkładu stóp zwrotu.

Tabela 1. Badanie normalności rozkładu stóp zwrotu

γ	Typ portfela	Współczynnik asymetrii	Współczynnik spłaszczenia	Statystyka K^2
1	Markowitza	0,562	2,604	390,442
	SEM	1,411	3,852	1106,655
5	Markowitza	0,562	2,604	390,442
	SEM	1,336	3,311	878,555
10	Markowitza	0,746	1,060	162,465
	SEM	1,199	2,502	582,975
15	Markowitza	0,208	-0,263	11,776
	SEM	1,453	2,116	627,428
20	Markowitza	0,362	-0,562	40,836
	SEM	1,778	3,452	1192,333
25	Markowitza	0,761	0,340	118,130
	SEM	1,909	4,067	1510,758
30	Markowitza	0,911	0,640	181,183
	SEM	1,979	4,345	1676,601
35	Markowitza	1,427	2,677	743,243
	SEM	2,052	4,677	1879,746
40	Markowitza	1,957	4,518	1734,585
	SEM	2,110	4,964	2060,392
44	Markowitza	2,139	5,037	2119,772
	SEM	2,139	5,037	2119,772

Źródło: obliczenia własne.

Wybór portfeli, oparty na średniej i wariancji, nie jest więc uzasadniony. Przynajmniej dla części możliwych do zbudowania portfeli rozkład stóp zwrotu odbiega istotnie od normalnego. Dla polskiego rynku akcji powinno dokonywać się wyboru portfela inwestycyjnego na podstawie średniej i semiwariancji od założonej stopy zwrotu.

Dla wszystkich portfeli mediana jest niższa od średniej, przy czym dla portfeli Markowitza dla niskich założonych stóp zwrotu różnice między tymi dwiema miarami są niewielkie (tabela 2).

Należy zwrócić uwagę, że portfele SEM, posiadając wyższe minimum stopy zwrotu, charakteryzują się jednocześnie większym rozstępem. Zwiększenie obszarów zmienności nastąpiło tu na skutek zwiększenia wartości

Tabela 2. Wybrane charakterystyki rozkładu stóp zwrotu

γ	Typ portfela	Średnia	Mediana	Minimum	Maksimum	Rozstęp	Wariancja	Semiwariancja od założonej stopy zwrotu
1	Markowitza	5,193	4,709	–16,650	45,577	62,227	55,628	9,413
	SEM	9,090	7,699	–9,578	63,525	73,103	88,687	2,030
5	Markowitza	5,193	4,709	–16,650	45,577	62,227	55,628	23,845
	SEM	9,241	7,674	–10,013	62,283	72,296	90,238	9,865
10	Markowitza	10,000	9,036	–11,107	57,275	68,382	97,151	39,942
	SEM	10,000	8,317	–10,696	64,349	75,044	105,245	37,456
15	Markowitza	15,000	14,894	–26,649	79,500	106,149	337,767	160,849
	SEM	15,000	8,695	–15,684	106,986	122,671	422,585	124,021
20	Markowitza	20,000	18,581	–35,398	118,343	153,741	1023,215	461,182
	SEM	20,000	10,118	–26,400	179,411	205,811	1144,745	296,163
25	Markowitza	25,000	17,371	–55,568	219,991	275,558	2259,832	883,756
	SEM	25,000	10,758	–34,799	254,719	289,518	2298,594	565,450
30	Markowitza	30,000	15,937	–46,476	229,726	276,203	3011,620	1129,861
	SEM	30,000	10,764	–41,275	331,694	372,969	3963,904	944,795
35	Markowitza	35,000	15,711	–54,037	331,673	385,709	5005,334	1623,423
	SEM	35,000	10,296	–46,479	416,425	462,904	6273,316	1445,480
40	Markowitza	40,000	13,373	–55,567	468,135	523,702	8411,464	2132,939
	SEM	40,000	10,454	–52,084	506,215	558,299	9278,261	2084,128
44	Markowitza	44,000	11,290	–58,953	580,380	639,333	12377,242	2707,890
	SEM	44,000	11,290	–58,953	580,380	639,333	12377,242	2707,890

Źródło: obliczenia własne.

maksymalnych. Portfele SEM są bezpieczniejsze (niższa semiwariancja od założonej stopy zwrotu). Dla niskich założonych stóp zwrotu obydwa typy portfeli mają średnie stopy zwrotu wyższe od założonych, przy tym dla portfeli SEM efekt ten jest wyraźnie większy.

Portfele Markowitza, z założenia, mają minimalną wariancję, więc ze względu na tę miarę ryzyka posiadają przewagę nad portfelami SEM.

Oznacza to, że w portfelach SEM, w porównaniu z portfelami Markowitza, występuje większe rozproszenie stopy zwrotu wokół średniej, jednocześnie mniejsze są odchylenia poniżej, a większe powyżej założonej stopy zwrotu. Z tego względu należy portfele SEM uznać za lepsze dla inwestorów, ponieważ przy mniejszym ryzyku uzyskania stopy zwrotu niższej od założonej stwarzają jednocześnie szansę na wysokie stopy zwrotu.

LITERATURA

Domański C. (1990), *Testy statystyczne*, PWE, Warszawa.

Elton E. J., Gruber M. J. (1997), *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa.

Jajuga K., Jajuga T. (1997), *Inwestycje*, PWN, Warszawa.

Kolupa M., Plebaniak J. (2000), *Budowa portfela lokat*, PWE, Warszawa.

Kowalewski G., Kuziak K. (2001), *Empiryczna weryfikacja rozkładów stóp zwrotu polskiego rynku akcji*, „Prace Naukowe AE we Wrocławiu", 845.

Grabowski W. (1982), *Programowanie matematyczne*, PWE, Warszawa.

Haugen A. (1996), *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa.

Markowitz H. (1952), *Portfolio selection*, „Journal of Finance", 7.

Markowitz H. (1959), *Portfolio selection: efficient diversification of investments*, John Wiley & Sons, New York.

Markowski L. (2000), *Risk analysis of capital investments on the Warsaw Stock Exchange in the context of portfolio theory*, „Economic Science", 3.

Olesinkiewicz J., Rutkowska-Ziarko A. (2003), *Zastosowanie algorytmu Wolfa do wyznaczania portfela efektywnego*, „Acta Universitatis Lodziensis Folia Oeconomica" w druku.

Rutkowska-Ziarko A. (2002), *Semiwariancja stóp zwrotu jako miara ryzyka inwestycyjnego na przykładzie spółek notowanych na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych*, „Biuletyn Naukowy UWM", 15 (1).

Rutkowska-Ziarko A., Olesinkiewicz J. (2002), *Wykorzystanie semiwariancji do budowy portfela akcji*, „Przegląd Statystyczny", 4.

Anna Rutkowska-Ziarko

THE DISTRIBUTIONS OF THE RATES OF RETURN ON FIXED TARGET SEMI-VARIANCE PORTFOLIOS

Summary

The distributions of the rates of return on the fixed target portfolios and classic Markowitz's ones are compared on example of companies listed on the Warsaw Stock Exchange. The data used in the analysis refer to the period from 1.01.1996 to 28.02.2001. The basic parameters of returns distribution are calculated. The returns on portfolios are non-normally distributed.

The analysis of empirical results suggests that, for the Warsaw Stock Exchange, fixed target semi-variance is a more appropriate risk measure than variance.