ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 166, 2003

*Lesław Markowski**

ANALIZA RYZYKA I WYCENA AKTYWÓW KAPITAŁOWYCH NA PRZYKŁADZIE GPW W WARSZAWIE

Streszczenie. Artykuł jest poświęcony analizie modelu wyceny kapitału CAPM oraz ściśle z nią związanej teorii modelu pojedynczego indeksu Sharpe'a. W jego części wstępnej skoncentrowano się na krótkim przedstawieniu modelu jednowskaźnikowego oraz omówieniu własności wynikających bądź to z jego konstrukcji, bądź z przyjętych założeń. Opierając się na modelu jednoindeksowym, dokonano dekompozycji ryzyka całkowitego na część specyficzną i systematyczną. Określono przy tym właściwą, w kontekście tego modelu, miarę ryzyka w postaci współczynnika beta.

Ponadto w artykule podjęto próbę weryfikacji hipotezy o efektywności rynku kapitałowego w Polsce oraz, co wynika z powyższego, że papiery wartościowe notowane na tym rynku są wyceniane zgodnie z rynkowym modelem równowagi CAPM. Zademonstrowane metody i techniki badań, związanych z tą problematyką na rozwiniętych rynkach kapitałowych (NYSE – New York Stock Exchange).

Pragnąc zbadać wpływ czynnika rynkowego na dane inwestycje oraz wielkość ryzyka związanego z tymi inwestycjami, posłużono się pojedynczymi walorami notowanymi na warszawskiej giełdzie oraz portfelami równomiernymi, poczynając od dwuelementowych, a kończąc na stuelementowych. Metodologia taka pozwoli określić graniczne własności procesu dywersyfikacji portfela, pomijając problem efektywności inwestycji portfelowych.

Otrzymane wyniki świadczą, iż zwiększając rozmiary portfeli o kolejne walory, nie jesteśmy w stanie uniknąć poniesienia ryzyka systematycznego, związanego z koniunkturą panującą na rynku. Ryzyko specyficzne natomiast, w postaci wariancji resztowej, może zostać w znacznej części wyeliminowane w drodze dywersyfikacji portfela. Jednakże badania pokazały, że składniki resztowe z modelu Sharpe'a dla poszczególnych dwóch walorów czy portfeli charakteryzują się dodatnimi korelacjami, co może świadczyć o istnieniu innych, oprócz ryzyka rynku, czynników systematycznie wpływających na ceny notowanych akcji.

Dalsza analiza skłania do odrzucenia modelu CAPM jako teorii, zgodnie z którą wyceniane są walory w GPW w Warszawie, co koresponduje z wynikami odnośnie do modelu jednoindeksowego. Inwestując w portfele papierów wartościowych, inwestorzy są nagradzani nie tylko za akceptację ryzyka systematycznego, ale również za podjęcie ryzyka specyficznego danego portfela.

Słowa kluczowe: model pojedynczego indeksu (model jednowskaźnikowy), ryzyko specyficzne, ryzyko systematyczne, dywersyfikacja portfela, współczynnik beta, wariancja resztowa, model CAPM, portfel rynkowy, rynkowa premia za ryzyko.

* Mgr, Katedra Statystyki i Informatyki, Wydział Zarządzania Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie.

1. WSTĘP

Teoria finansów ostatnich kilkudziesięciu lat to przede wszystkim skupienie uwagi na analizie ryzyka i wycenie instrumentów finansowych, a zwłaszcza papierów wartościowych rynku kapitałowego o zmiennym dochodzie, tj. akcji. Prężnie rozwijające się rynki kapitałowe świata, jak i polska giełda papierów wartościowych, dają pole do empirycznej weryfikacji teoretycznych postulatów.

Badanie kolejnych notowań pojedynczych papierów wartościowych pokazuje, iż na rynku kapitałowym istnieją okresy spadku (bessa), stabilizacji bądź wzrostu (hossa) kursów tych papierów. Biorąc pod uwagę wszystkie walory występujące na danym rynku kapitałowym, rozumiane jako agregatowy portfel, możemy badać ogólne tendencje panujące na rynku (giełdzie). Rodzą się zatem przypuszczenia, że określony stan koniunktury giełdowej będzie oddziaływać na pojedyncze papiery wartościowe. Jeśli tak, to w jakim stopniu i co będzie miarą wielkości tego oddziaływania? Z drugiej strony, stan rynku kapitałowego jest wynikiem podjętych decyzji inwestorów. Jaka jest zatem wypadkowa działań wszystkich inwestorów ustalających równowagę rynkową i jaka jest właściwa struktura wyceny aktywów kapitałowych w warunkach tej równowagi?

Badania prowadzone na rozwiniętych rynkach kapitałowych dają próbę odpowiedzi na tak postawione problemy. Opracowania teoretyczne zaowocowały pojawieniem się modeli wielowskaźnikowych, a w szczególności modelu jednoindeksowego, autorstwa Williama Sharpe'a. Twórca ten określił zależność rentowności pojedynczych walorów od rynku jako całości (portfela rynkowego), którego reprezentantem jest indeks giełdowy. Na bazie tego modelu, Sharpe podał inny, w odróżnieniu do klasycznej teorii Markowitza, sposób wyznaczenia ryzyka inwestycji, precyzując przy okazji właściwą dla tego modelu miarę ryzyka. W wyniku dalszych prac został sformułowany niezależnie przez Sharpe'a (1964), Lintnera (1965) i Mossina (1966) model równowagi rynku kapitałowego (Capital Asset Pricing Model – CAPM), służący do opisu kształtowania się cen i stóp zwrotu instrumentów finansowych.

Prezentowany artykuł jest próbą weryfikacji teorii określonej przez model pojedynczego indeksu oraz słuszności założeń modelu CAPM w kontekście inwestycji portfelowych na giełdzie warszawskiej.

2. MODEL RYNKOWY A MODEL CAPM

W ogólnym pojęciu model pojedynczego indeksu (Single Index Model) Sharpe'a (1963) zakłada, że stopy zwrotu papierów wartościowych kształtują się zgodnie z tendencją panującą na danym rynku kapitałowym. Innymi słowy, wyjaśnienia skorelowania stóp zwrotu walorów należy upatrywać we wspólnej ich reakcji na zmiany występujące na rynku. Wyznacznikiem ogólnej koniunktury giełdowej jest agregatowy indeks giełdowy. Zależność między stopami zwrotu poszczególnych walorów a stopą zwrotu indeksu giełdowego można wyrazić następująco (Elton, Gruber 1998):

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \xi_{it} \quad (i = 1, ..., K) \quad (t = 1, ..., T) \tag{1}$$

gdzie:

R_{it} – stopa zwrotu *i*-tego waloru, α_i – wyraz wolny modelu; (składnik stopy zwrotu *i*-tego waloru niezależny od sytuacji na rynku);

β_i – współczynnik beta *i*-tego waloru, mierzący reakcję waloru na zmiany indeksu giełdowego;

R_{Mt} – stopa zwrotu indeksu giełdowego w *t*-tym okresie, ξ_{it} – składnik zakłócający równania.

Równanie (1) jest nazywane linią charakterystyczną danego waloru (*characteristic line*). Współczynnik beta pozwala wyodrębnić walory, reagujące w mniejszym ($\beta_i < 1$) oraz większym stopniu ($\beta_i > 1$) na zmiany indeksu rynkowego.

Model opisany równaniem (1) jest procesem spełniającym następujące własności struktury stochastycznej, wynikające z jego konstrukcji, bądź też z przyjętych założeń:

(a) $E(\xi_{it}) = 0$, $E(\xi_{it}^2) = \sigma_{\xi_i}^2$, (b) $E(R_{Mt}\xi_{it}) = 0$, (c) $E(\xi_{it}\xi_{jt}) = 0$ dla $i \neq j$

Pierwsza (a) z nich oznacza, że składniki losowe charakteryzują się wartością oczekiwaną równą zero oraz stałą wariancją w czasie. Druga własność (b) określa brak korelacji między składnikami resztowymi a zmienną niezależną, którą jest stopa zwrotu z indeksu giełdowego. Założenie trzecie (c) będące pewnym uproszczeniem modelu oznacza, iż składniki losowe równań modelu dla *i*-tego i *j*-tego waloru, związane ze specyficzną stopą zwrotu, są nieskorelowane. Oznacza to, że jedyną przyczyną jednakowych, systematycznych zmian stóp zwrotu walorów jest ich wspólna, podobna reakcja na zmiany stopy zwrotu z rynku. Ewentualna ich korelacja może świadczyć o istnieniu innych, oprócz koniunktury giełdowej, systematycznych (makroekonomicznych) czynników generujących stopy zwrotu papierów wartościowych.

W aspekcie procesu generującego stopy zwrotu z akcji opisanego równaniem (1), wariancję stopy zwrotu pojedynczego waloru, σ_i^2 oraz portfela σ_p^2, możemy wyrazić:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\xi_i}^2, \quad \sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\xi_p}^2 \tag{2}$$

gdzie:

σ_M^2 – wariancja indeksu rynkowego;

$\sigma_{\xi_i}^2$ – wariancja resztowa modelu pojedynczego indeksu dla i-tego waloru;

$\beta_p = \sum_{i=1}^{K} x_i\beta_i$ – współczynnik beta danego portfela, który jest średnią ważoną współczynników beta akcji wchodzących w skład tego portfela, gdzie wagami x_i są udziały tych akcji w portfelu;

$\sigma_{\xi_r}^2 = \sum_{i=1}^{K} x_i^2\sigma_{\xi_i}^2$ – wariancja resztowa danego portfela.

W ramach modelu jednoindeksowego całkowite ryzyko inwestycji (pojedynczych papierów wartościowych bądź portfeli) możemy zdekomponować na dwa składniki. Pierwszym jest ryzyko systematyczne $\beta^2\sigma_M^2$, mówiące, w jakim stopniu stopa zwrotu z danej inwestycji reaguje na zmiany stopy zwrotu z rynku β oraz z jaką siłą rynek oddziałuje na poszczególne walory bądź portfele σ_M^2. Widać zatem, że ryzyka tego nie można zmniejszyć w miarę wzrostu liczby walorów w portfelu. Z uwagi na stałość wariancji rynku współczynnik beta jest właściwą miarą ryzyka danej inwestycji, które często jest nazywane ryzykiem rynkowym.

Drugi składnik σ_ξ^2 obrazuje tzw. ryzyko specyficzne lub nierynkowe portfela. Wariancja resztowa portfela jest średnią ważoną wariancji resztowych akcji znajdujących się w portfelu, gdzie wagami są kwadraty ich udziałów w portfelu. Zwiększając zatem rozmiary portfela, wariancja ta będzie zmierzać do zera, lecz nigdy go nie osiągnie, co równoznaczne jest z wyeliminowaniem niespełna całego ryzyka specyficznego portfela. Dzieje się tak, ponieważ składniki resztowe niektórych akcji w pewnych okresach są liczbami dodatnimi, a w przypadku innych akcji reszty przyjmują wartości ujemne. Wiedząc, że składniki resztowe portfela są średnimi ze składników resztowych walorów wchodzących w jego skład, będą one przyjmowały stosunkowo coraz to mniejsze wartości, gdy skład portfela będzie powiększany o nowe walory.

Budując portfele równomierne, gdzie $x_i = \frac{1}{K}$ dla $i = 1, ..., K$, wyrażenie wariancji resztowej możemy zapisać w sposób alternatywny, a mianowicie:

$$\sigma_{\xi_p}^2 = \sum_{i=1}^{K} x_i^2\sigma_{\xi_i}^2 = \frac{1}{K^2}\sum_{i=1}^{K}\sigma_{\xi_i}^2 = \frac{1}{K}\frac{1}{K}(\sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2 + ... + \sigma_{\xi_K}^2) = \frac{\overline{\sigma}_{\xi_i}^2}{K} \tag{3}$$

Wariancja resztowa portfela równomiernego zatem jest równa średniej z wariancji resztowych akcji wchodzących w jego skład, podzielonej przez liczbę akcji w tym portfelu. Logiczną konsekwencją zmniejszania się wariancji resztowej portfela w miarę wzrostu jego liczebności będzie zwiększający się procent wyjaśnionej zmienności (R^2) stóp zwrotu tego portfela poprzez zmienność stóp zwrotu indeksu giełdowego.

Należy podkreślić, że dokładność, z jaką na podstawie modelu jednoindeksowego będzie wyznaczona wariancja resztowa i tym samym całkowita wariancja portfela, zależy od tego, w jakim stopniu założenia modelu o braku korelacji między składnikami losowymi pojedynczych walorów w portfelu odpowiadają rzeczywistości. Model jednoindeksowy bowiem może zaniżać oszacowania wariancji resztowej w przypadku dodatnich korelacji składników losowych albo zawyżać w sytuacji ich ujemnego skorelowania. Prawdziwą wartość wariancji resztowej uzyskalibyśmy, uwzględniając we wzorze (3) również niezerowe niediagonalne elementy macierzy wariancji-kowariancji składników resztowych.

Wyprowadzona zależność modelu CAPM daje potwierdzenie rozważaniom dotyczącym dekompozycji ryzyka całkowitego walorów z punktu widzenia modelu Sharpe'a. Specyfikacja tego modelu pozwala określić właściwą miarę ryzyka oraz sprecyzować zależność między oczekiwaną stopą zwrotu i ryzykiem dla dowolnego waloru, przy założeniu racjonalnych zachowań indywidualnych inwestorów na rynku znajdującym się w równowadze. Formalnie zależność ta przedstawia się następująco:

$$\mu_i - R_f = \beta_i(\mu_M - R_f); \quad (i = 1, ..., K) \tag{4}$$

gdzie:

μ_i, μ_M – oczekiwane stopy zwrotu odpowiednio i-tego waloru i portfela rynkowego;

R_f – stopa zwrotu wolna od ryzyka;

β_i – współczynnik beta i-tego waloru z modelu Sharpe'a.

Równanie (4) nazywane liniami rynku papierów wartościowych (Security Market Line – SML), będące standardowym sposobem zapisu modelu CAPM pokazuje, że w warunkach równowagi premie za ryzyko dla poszczególnych walorów ($\mu_i - R_f$) są proporcjonalne do premii za ryzyko rynku ($\mu_M - R_f$). Współczynniki β_i, występujące w równaniu (4), będące miernikami ryzyka systematycznego każdego waloru, określają jednocześnie, jaką część premii za ryzyko rynku stanowi premia za ryzyko dla danego waloru. Model CAPM przedstawia zatem wycenę walorów przy założeniu, że jedynym czynnikiem systematycznym wpływającym na ceny (stopy zwrotu) wszystkich walorów są zmiany koniunktury na rynku.

Jeżeli model CAPM poprawnie określa ceny równowagi walorów na rynku, wówczas na parametry modelu jednoindeksowego α_i i β_i są nałożone ograniczenia. Przyrównując równanie wyceny kapitału (4) do równania modelu rynkowego, wyrażonego w kategoriach wartości oczekiwanych, dla i-tego waloru mamy:

$$R_f + (\mu_M - R_f)\beta_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M \tag{5}$$

skąd otrzymujemy:

$$\alpha_i = (1 - \beta_i)R_f \tag{6}$$

W warunkach równowagi zatem, parametry modelu rynkowego są powiązane zależnością nieliniową ze stopą zwrotu wolną od ryzyka, czyli:

$$R_f = \frac{\alpha}{1 - \beta} \tag{7}$$

W równowadze, przyjmując nieujemną stopę zwrotu wolną od ryzyka, prawdziwe muszą być zatem układy nierówności:

1) jeżeli $\beta_i > 1$, czyli stopa zwrotu i-tego waloru przyrasta szybciej niż indeks rynku, wtedy poziom stopy zwrotu i-tego waloru niezależny od rynku powinien być niedodatni ($\alpha_i < 0$).

2) jeżeli $\beta_i < 1$, czyli stopa zwrotu i-tego waloru przyrasta wolniej niż indeks rynku, wtedy poziom stopy zwrotu i-tego waloru niezależny od rynku, powinien być nieujemny ($\alpha_i < 0$).

3. DANE

Analiza relacji modelu pojedynczego indeksu oraz badanie zależności stóp zwrotu inwestycji kapitałowych względem ryzyka wyrażonego współczynnikiem beta obejmowało pięcioletni okres funkcjonowania Giełdy Papierów Wartościowych, a mianowicie lata 1996–2000. Wybór okresu badania jest związany z faktem, iż szeregi czasowe stóp zwrotu dla większości walorów są relatywnie krótkie. Dopiero od roku 1996 możemy dysponować względnie długimi szeregami stóp zwrotu. Analizie poddano obserwacje dla 217 notowanych walorów, z czego do badania wzięto tylko te, dla których okres notowań był nie krótszy niż 1 rok, a mianowicie 190 walorów. W badaniu wykorzystano szeregi czasowe miesięcznych stóp zwrotu walorów (maksymalnie 60 obserwacji). Dobrana w ten sposób próba umożliwia w pewnym stopniu stabilne oszacowania współczynników modelu jednoindeksowego oraz pozwala na odpowiednie zróżnicowanie portfeli pod względem osiąganego ryzyka.

W badaniu zastosowano procedurę losowego generowania portfeli o zadanej liczebności spośród wyjściowego zestawu pojedynczych akcji. W każdym eksperymencie uszeregowanie walorów jest tasowane. Spośród losowo ustawionych wszystkich walorów losowanych jest K walorów, które tworzą portfel. Wszystkie portfele analizowane w badaniach były równomierne, tzn. wagi portfelowe dla każdego waloru były równe $x_i = 1/K$.

W badaniu generowano portfele o liczebnościach $K = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 100$, aby określić wpływ efektów dywersyfikacji na otrzymane rezultaty. Z wyjątkiem portfeli jednoelementowych, których liczba j równała się liczbie walorów ($j = 190$), dla pozostałych K generowano $j = 10\,000$ losowych portfeli. Zastosowana procedura zagwarantowała zatem odpowiednią reprezentację portfeli (efektywnych i nieefektywnych) należących do zbioru możliwości inwestycyjnych. Co więcej, powtarzane eksperymenty dla zadanej liczebności portfela K pokazały, że rozkłady uzyskanych oszacowań interesujących nas parametrów, przy liczbie powtórzeń 10 000, różnią się nieistotnie.

Wszystkie parametry modelu Sharpe' a szacowano względem głównego indeksu giełdy warszawskiej, a mianowicie Warszawskiego Indeksu Giełdowego (WIG).

4. WYNIKI

4.1. Oszacowania współczynników modelu jednoindeksowego

Dla każdego utworzonego portfela o zadanej liczebności oszacowano KMNK parametry modelu jednoindeksowego Sharpe'a. Testowana postać modelu przedstawia się następująco:

$$R_{Kjt} = \alpha_{Kj} + \beta_{Kj} R_{Mt} + \varepsilon_{Kjt} \tag{8}$$

$(K = 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 100;\ j = 1, ..., 10\,000;$
$t = 1, ..., \leqslant T = 60)$

gdzie:

R_{Kjt} – stopa zwrotu portfela o zadanej liczebności K w miesiącu t, wygenerowanego w j-tym powtórzeniu;

α_{Kj} – wyraz wolny dla K, j-tego portfela;

β_{Kj} – współczynnik ryzyka systematycznego dla K, j-tego portfela;

R_{Mt} – stopa zwrotu indeksu giełdowego WIG przyjęta jako aproksymanta stopy zwrotu portfela rynkowego;

ε_{Kjt} – składnik ryzyka specyficznego dla K, j-tego portfela.

Tabela 1 podaje średnie wartości oszacowań parametrów α i β, obliczone średnie wartości statystyki t-Studenta dla tych współczynników oraz frakcje współczynników istotnych w modelu jednoindeksowym dla pojedynczych walorów i wszystkich portfeli o danej liczebności.

Parametr α określa część stopy zwrotu, która jest niezależna od sytuacji na rynku. Pojedyncze walory oraz portfele charakteryzują się ujemną wartością tego współczynnika, która dla portfeli 10- i więcej elementowych stabilizuje się na poziomie –0,19. Wielkości ocen tego parametru, co do bezwzględnej wartości, zmniejszają się w miarę wzrostu liczebności portfela, co świadczy o spadającym udziale stopy zwrotu niezależnej od rynku. Wartości statystyki t-Studenta rzędu (–0,2; –0,3) przemawiają za statystyczną nieistotnością tych parametrów i powodują, że udział istotnych współczynników α jest niewielki. Dla portfeli kilkuelementowych wynosi on ok. 2%, by następnie zmniejszać się nawet do zera dla portfeli 50- i 100-elementowych.

Tabela 1. Oceny współczynników modeli jednowskaźnikowych w latach 1996–2000

K	$\hat{\mu}_\alpha$	$\bar{t}_\alpha$	f_i	$\hat{\mu}_\beta$	t_β	f_i	R^2
1	–0,434	–0,24	3,07	0,664	2,98	65,64	0,195
2	–0,419	–0,26	2,69	0,689	4,14	85,72	0,258
3	–0,373	–0,27	2,66	0,703	4,93	93,80	0,307
4	–0,296	–0,24	2,15	0,712	5,55	97,29	0,345
5	–0,267	–0,24	2,03	0,717	6,05	98,51	0,379
10	–0,196	–0,22	1,11	0,725	7,73	99,80	0,490
15	–0,192	–0,24	0,64	0,726	8,75	100,00	0,553
20	–0,191	–0,26	0,31	0,727	9,39	100,00	0,591
25	–0,190	–0,27	0,17	0,727	9,87	100,00	0,616
30	–0,190	–0,27	0,06	0,727	10,23	100,00	0,634
35	–0,191	–0,28	0,05	0,727	10,52	100,00	0,647
40	–0,191	–0,29	0,03	0,727	10,74	100,00	0,658
45	–0,190	–0,29	0,01	0,727	10,92	100,00	0,666
50	–0,191	–0,29	0,00	0,727	11,08	100,00	0,673
100	–0,191	–0,31	0,00	0,727	11,84	100,00	0,705

Źródło: opracowanie własne.

Ważniejszą rolę z punktu widzenia modelu pojedynczego indeksu spełnia parametr beta danego aktywu. Wskazuje on bowiem na stopień wrażliwości stopy zwrotu danej inwestycji na zmiany rynkowej stopy zwrotu. Średnie oceny tego współczynnika, zarówno dla pojedynczych inwestycji, jak i portfeli, są mniejsze od jedności. Dla tych pierwszych wynoszą 0,664, natomiast dla portfeli 10- i więcej elementowych wartości średnie stabilizują się na poziomie 0,727. Oznacza to, że większość inwestycji będzie reagowała na zmiany koniunktury giełdowej znacznie wolniej niż rynek. Znamiennym staje się fakt statystycznej istotności współczynników beta. Średnie wartości statystyki t-Studenta znacznie przewyższają jej wartości krytyczne z tym, że dla portfeli są one znacznie wyższe niż dla pojedynczych walorów ($t_{\hat{\mu}_\beta} = 2,98$).

Należy podkreślić, że poczynając już od portfeli 15-elementowych, liczba statystycznie istotnych współczynników beta sięgała 100 %, przy relatywnie mniejszym ich udziale dla pojedynczych akcji, bo ok. 65,6%.

Przedstawione spostrzeżenia pokrywają się z wynikami miary stopnia dopasowania modelu pojedynczego indeksu do danych rzeczywistych. Stopień ten, wyrażony współczynnikiem determinacji R^2, pokazuje, że stopy zwrotu walorów tylko w 19,5% są wyjaśnione zmiennością stopy zwrotu indeksu giełdowego. Dla portfeli natomiast, wraz ze wzrostem ich liczebności, obserwuje się stopniowy wzrost poziomu wyjaśnienia stóp zwrotu portfeli, a mianowicie od ok. 26% dla portfeli dwuwalorowych do 70,5% dla 100-elementowych. Zgodnie z tym należy stwierdzić, że model pojedynczego indeksu trafniej opisuje poziom stóp zwrotu portfeli inwestycyjnych niż pojedynczych akcji.

4.2. Ryzyko inwestycji portfelowych w kontekście modelu jednoindeksowego

Ryzyko całkowite papieru wartościowego bądź portfela, zgodnie z zapisem (2), dekomponuje się na część systematyczną $\beta^2\sigma_M^2$ oraz część specyficzną σ_ξ^2. Jedynym determinantem ryzyka portfeli wysoce zdywersyfikowanych, wyrażonego wariancją stóp zwrotu, jest część systematyczna. Drugi składnik natomiast, wariancja resztowa, związana z ryzykiem poszczególnych walorów wchodzących w skład portfela, może zostać wyeliminowana w drodze umiejętnej dywersyfikacji portfela. Będzie ona, zgodnie ze wzorem (3), zmniejszać się wraz ze wzrostem liczby walorów w portfelu. Wariancja stóp zwrotu portfela zatem będzie mniejsza od średniej ważonej wariancji papierów wartościowych tworzących ten portfel. Wyniki zawarte w tabeli 2 potwierdzają powyższe konkluzje.

Pierwsze dwie kolumny tabeli 2 pokazują wpływ efektu dywersyfikacji (współczynnik dywersyfikacji d_K) na wielkość ryzyka portfeli, wyrażonego wariancją stóp zwrotu. Inwestycje w portfele 4-elementowe przynoszą obniżkę ryzyka całkowitego o ok. 50% w stosunku do inwestycji w pojedyncze walory. Różnicując portfele do wysoce zdywersyfikowanych, 35- i więcej elementowych, obniżamy ryzyko inwestycji portfelowych blisko 4-krotnie w porównaniu z ryzykiem inwestycji jednowalorowych.

Wyniki trzeciej i czwartej kolumny świadczą, iż sytuacja taka jest rezultatem obniżania się wariancji resztowej wraz ze zwiększaniem portfela o nowe walory. Ryzyko specyficzne portfela, charakteryzującego pojedyncze walory, z poziomu 255,5%^{2} obniża się znacznie, bo aż do poziomu 21,1%^{2}. Ryzyko systematyczne natomiast w coraz to większym stopniu kształtuje poziom ryzyka całkowitego portfeli. Rozmiary ryzyka rynkowego dla danej

Tabela 2. Dekompozycja ryzyka całkowitego portfeli na systematyczne i specyficzne – lata 1996–2000

K	Ryzyko całkowite $\bar{\sigma}^2_{P,K}$	Współczynnik dywersyfikacji $d_K = \left(\frac{\bar{\sigma}^2_{P,K}}{\bar{\sigma}^2_{P,1}}\right) \cdot 100$	Ryzyko specyficzne $\bar{\sigma}^2_{\zeta P,K}$	Ryzyko systematyczne $\bar{\sigma}^2_{P,K} - \bar{\sigma}^2_{\zeta P,K}$	Ryzyko specyficzne z modelu Sharpe'a $\sigma^2_{\zeta P,K} = \bar{\sigma}^2_{\zeta}/K$
1	296,6899	100,00	255,5041	41,1858	255,5041
2	204,6670	68,98	160,1337	44,5333	127,7520
3	170,3043	57,40	124,0195	46,2848	85,1680
4	151,3259	51,00	103,6919	47,6340	63,8760
5	138,0600	46,53	89,6516	48,4084	51,1008
10	105,2278	35,46	55,5383	49,6895	25,5504
15	91,7446	30,92	41,9633	49,7813	17,0336
20	85,2340	28,72	35,5429	49,6911	12,7752
25	81,1111	27,33	31,7224	49,3887	10,2201
30	78,8850	26,58	29,3070	49,5780	8,5168
35	76,3327	25,72	27,5683	48,7644	7,3001
40	75,5124	25,45	26,2925	49,2199	6,3876
45	74,6621	25,16	25,3483	49,3138	5,6778
50	73,9474	24,92	24,5358	49,4116	5,1101
100	70,4402	23,74	21,0985	49,3417	2,5550

Źródło: opracowanie własne.

inwestycji są uzależnione tylko od wartości współczynnika beta, charakteryzującego tę inwestycję. Wariancja portfela rynkowego (indeksu giełdowego) bowiem jest stała dla każdego aktywu kapitałowego. Im dany walor bądź portfel posiada większy współczynnik beta, tym ryzyko tego waloru lub portfela będzie większe. Współczynnik β jest zatem jedyną, właściwą miarą ryzyka.

Ostatnia, piąta kolumna tabeli 2 prezentuje średnie wartości wariancji resztowych dla portfeli równomiernych, które są konsekwencją przyjętego założenia o braku skorelowania składników resztowych z modelu Sharpe'a, dla dowolnych dwóch inwestycji. Innymi słowy, wszystkie niediagonalne elementy macierzy wariancji-kowariancji składników resztowych są z założenia równe zero. Jednakże w rzeczywistości założenie to jest bardzo rzadko spełnione. Składniki resztowe poszczególnych papierów wartościowych charakteryzują się bowiem najczęściej dodatnią korelacją. Oznacza to, iż szacując wartości wariancji resztowych portfela, oprócz wariancyjnych elementów wyżej wspomnianej macierzy, należy uwzględnić również niezerowe elementy kowariancyjne tej macierzy. W przeciwnym wypadku wartości wariancji resztowych będą zaniżone.

Zgodnie z wynikami, teoretyczne wartości wariancji resztowych zmierzają bardzo gwałtownie do zera. Prawdziwe wartości wariancji resztowych natomiast zmniejszają się wraz ze wzrostem walorów w portfelu, jednakże są one powiększone o iloczyny wszystkich kowariancyjnych elementów macierzy var-cov składników resztowych.

Przedstawione wyniki przemawiają za tym, iż składniki losowe równań modelu Sharpe' a dla walorów notowanych na warszawskiej giełdzie, jak i zbudowanych na ich podstawie portfeli, nie są skutkiem wydarzeń specyficznych, dotyczących jedynie pojedynczych firm. Jednakowe zmiany składników resztowych, wywołujące ich dodatnie korelacje, są w głównej mierze wynikiem innych, w odróżnieniu od indeksu giełdowego, systematycznych czynników oddziaływających na stopy zwrotu walorów. Badanie wpływu pozostałych potencjalnych czynników generujących poziom rentowności portfeli należałoby rozpatrywać posługując się modelami wielowskaźnikowymi.

4.3. Testy relacji modelu CAPM

Wyznaczone w pierwszym kroku procedury średnie stopy zwrotu portfeli oraz oszacowane współczynniki beta zostały wykorzystane do testowania istotności współczynników relacji:

$$\mu_{P,K,j} = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{\beta}_{P,K,j} + \varepsilon_{K,j}; \quad (j = 1, ..., 10\ 000) \tag{9}$$

gdzie:

$\gamma_0 \gamma_1$ – parametry modelu;

$\mu_{P,K,j}$, $\hat{\beta}_{P,K,j}$ – wartość oczekiwana i współczynnik beta dla K, j-tego portfela.

Stwierdzenie występowania dodatnich korelacji między składnikami resztowymi modelu pojedynczego indeksu jest uzasadnieniem dla możliwości testowania konkurencyjnych zależności pomiędzy oczekiwanym zyskiem portfeli a ich ryzykiem systematycznym oraz ryzykiem specyficznym, wyrażonym wariancją resztową, a mianowicie (Fama, MacBeth 1973; Lintner 1965):

$$\hat{\mu}_{P,K,j} = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{\beta}_{P,K,j} + \gamma_2 \hat{\sigma}^2_{\xi,K,j} + \varepsilon_{K,j}; \quad (j = 1, ..., 10\ 000) \tag{10}$$

gdzie: $\hat{\sigma}^2_{\xi Kj}$ jest wariancją resztową z oszacowań równania modelu pojedynczego indeksu dla K, j-tego portfela.

W warunkach prawdziwości hipotezy, że walory są wyceniane zgodnie z modelem CAPM, oceny współczynników z równania (10) powinny charakteryzowć się następującymi cechami:

– oceny wszystkich współczynników nie powinny zależeć od liczebności portfeli;

– oceny współczynników γ_0 winny korespondować z możliwą do uzyskania w danym okresie stopą zwrotu pozbawioną ryzyka lub ze stopą zwrotu portfela o współczynniku beta równym zeru (Elton, Gruber 1998); oceny te powinny być statystycznie istotnie różne od zera;

– oceny współczynnika γ_1, oznaczające rynkową premię za ryzyko rynkowe, winny być dodatnie i również statystycznie istotnie różne od zera;

– współczynniki γ_2 muszą statystycznie nieistotnie różnić się od zera. Jeśli współczynniki te są statystycznie istotne, świadczy to o niezgodności wyceny walorów zgodnie z modelem CAPM. Występują wtedy inne czynniki systematyczne wpływające na stopy zwrotu, w takim przypadku bardziej prawdopodobny jest model wieloczynnikowy typu APT.

Oszacowania parametrów modelu (9) prezentują tabele 3. Upoważniają one do następujących wniosków:

– oceny parametrów γ_0 i γ_1 dla pojedynczych walorów (portfeli 1--elementowych) istotnie odbiegają od analogicznych oszacowań dla portfeli składających się z większej liczby walorów. Wynika to z faktu, że oszacowania dla portfeli 1-elementowych otrzymano na podstawie próby 190-elementowej, oszacowania zaś dla pozostałych portfeli dla prób liczących 10 000 elementów;

– dla pozostałych portfeli oszacowania współczynnika γ_0 są statystycznie istotnie różne od zera i w badanym okresie przyjmują wartości ujemne na poziomie od –1,019% dla portfeli 50-elementowych do –1,555% dla portfeli 100-elementowych. Oszacowania wyrazu wolnego zatem nie korespondują z żadną stopą zwrotu, mogącą stanowić przybliżenie stopy zwrotu wolnej od ryzyka. Wyniki takie nie są niespodzianką, jeżeli model CAPM rozpatrzymy w kontekście modelu jednowskaźnikowego Sharpe'a. Z § 4.1 tego artykułu pamiętamy, że średnie wartości ocen parametru α dla portfeli, bez wzgkędu na ich rozmiary, były liczbami ujemnymi. Średnie wartości współczynników beta wskazywały natomiast na wolniejsze zmiany stóp zwrotu portfeli w stosunku do zmian rynku. Biorąc pod uwagę nieliniową zależność między tymi parametrami $R_f = \alpha_i/(1 - \beta_i)$, oceny parametru γ_0 będą wówczas liczbami ujemnymi, co potwierdzają wyniki tabel 3 i 4;

– oszacowania współczynników γ_1 spełniają postulaty wynikające z CAPM. Oceny wszystkich parametrów są statystycznie istotnie różne od zera, przy relatywnie wysokich wartościach statystyki t-Studenta, i nie zależą od wielkości portfela. Nachylenie linii SML, (rynkowa premia za ryzyko) wyrażone poprzez oszacowania parametru γ_1, jest dodatnie i przyjmuje wartości rzędu 2,86–3,44%. Oznaczają one, że wzrostowi ryzyka portfela (współczynnik beta) o jeden punkt procentowy odpowiadał przeciętny przyrost oczekiwanego zysku portfela w skali rocznej o 34,3–41,3%;

Tabela 3. Oszacowania parametrów relacji: $\hat{\mu}_{P,K,j} = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{\beta}_{P,K,j} + \varepsilon_{K,j}$ w latach 1996–2000

K	$\hat{\gamma}_0$	$t_{\hat{\gamma}_0}$	$\hat{\gamma}_1$	$t_{\hat{\gamma}_1}$	R^2	F	$\hat{S}_\varepsilon$
1	–1,057	–4,04	2,161	5,52	0,185	43,8	2,026
2	–1,418	–34,96	2,866	52,44	0,216	2750,5	1,503
3	–1,573	–35,53	3,257	54,39	0,228	2958,6	1,330
4	–1,557	–35,24	3,436	57,42	0,248	3298,1	1,167
5	–1,487	–33,76	3,435	57,60	0,249	3317,7	1,054
10	–1,278	–30,78	3,361	59,57	0,262	3549,1	0,704
15	–1,245	–30,10	3,339	59,20	0,260	3505,2	0,555
20	–1,138	–27,78	3,194	57,08	0,246	3258,3	0,467
25	–1,135	–28,34	3,193	58,25	0,253	3393,1	0,402
30	–1,179	–29,58	3,253	59,58	0,262	3550,1	0,358
35	–1,157	–28,72	3,222	58,33	0,254	3402,7	0,326
40	–1,202	–29,89	3,284	59,52	0,262	3543,7	0,303
45	–1,199	–30,14	3,281	60,08	0,265	3610,6	0,275
50	–1,019	–27,80	3,157	57,64	0,249	3323,2	0,258
100	–1,555	–28,98	3,220	58,75	0,257	3452,3	0,146

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Oszacowania parametrów relacji: $\hat{\mu}_{P,K,j} = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{\beta}_{P,K,j} + \gamma_2 \hat{\sigma}_{\xi,K,j} + \varepsilon_{K,j}$ w latach 1996–2000

K	$\hat{\gamma}_0$	$t_{\hat{\gamma}_0}$	$\hat{\gamma}_1$	$t_{\hat{\gamma}_1}$	$\hat{\gamma}_2$	$t_{\hat{\gamma}_2}$	R^2	F	$\hat{S}_\varepsilon$
1	–1,105	–4,23	2,007	5,97	0,0006	1,82	0,199	23,8	2,014
2	–1,500	–36,12	2,795	50,77	0,0008	8,72	0,222	1423,6	1,497
3	–1,692	–36,43	3,228	53,98	0,0011	8,01	0,233	1520,8	1,326
4	–1,761	–37,47	3,423	57,61	0,0020	12,07	0,259	1745,8	1,159
5	–1,682	–35,53	3,446	58,11	0,0020	10,83	0,258	1736,9	1,048
10	–1,538	–34,54	3,416	61,09	0,0030	15,08	0,278	1928,5	0,696
15	–1,631	–35,56	3,490	62,20	0,0065	18,24	0,283	1977,3	0,546
20	–1,523	–33,26	3,348	50,02	0,0076	17,78	0,269	1838,3	0,460
25	–1,539	–33,42	3,383	61,32	0,0083	17,04	0,274	1891,0	0,396
30	–1,595	–34,55	3,465	62,75	0,0089	17,15	0,283	1974,3	0,353
35	–1,514	–31,76	3,426	60,40	0,0075	13,70	0,268	1827,0	0,323
40	–1,540	–31,82	3,487	60,99	0,0072	12,34	0,273	1874,8	0,301
45	–1,515	–32,33	3,465	61,71	0,0071	12,51	0,277	1911,7	0,273
50	–1,405	–29,29	3,341	58,64	0,0065	10,96	0,258	1741,5	0,256
100	–1,423	–29,74	3,402	59,18	0,0064	10,00	0,264	1793,3	0,146

Źródło: opracowanie własne.

– współczynniki determinacji dla równań (3) rzędu 0,185–0,265 świadczą o tym, że pomimo istotnych statystycznie zależności, standardowa wersja modelu CAPM zapisana równaniem (9) nie jest wystarczająca do opisu zależności pomiędzy oczekiwanym zyskiem portfeli a ryzykiem systematycznym;

– oszacowania parametru γ_2 w relacji (10) dla wszystkich portfeli są dodatnie i statystycznie istotnie różne od zera. Świadczy to o tym, że ryzyko specyficzne mierzone wariancją resztową z równań Sharpe'a jest istotnym czynnikiem wpływającym na wycenę walorów. Fakt ten może oznaczać nieefektywność polskiego rynku kapitałowego. Prawdopodobna jest również inna przyczyna tej sytuacji, a mianowicie, że koniunktura giełdowa, wyrażona agregatowym indeksem cenowym WIG, nie jest jedynym czynnikiem ryzyka systematycznego. Model generujący stopy zwrotu portfela może zawierać wiele czynników ryzyka systematycznego (jak w modelu APT) i wtedy model jednowskaźnikowy Sharpe'a należy traktować jako model źle wyspecyfikowany. W takiej sytuacji wariancja resztowa, liczona na podstawie modelu jednowskaźnikowego jest niewłaściwą miarą ryzyka specyficznego.

5. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Badanie polskiego rynku kapitałowego pokazało, w jakim stopniu ogólna koniunktura na GPW w Warszawie oddziałuje na poszczególne papiery wartościowe oraz zbudowane na ich bazie portfele. Przy użyciu modelu jednowskaźnikowego Sharpe'a możemy stwierdzić, że Warszawski Indeks Giełdowy wywiera stały, systematyczny wpływ na pojedyncze walory, a zwłaszcza zagregowane portfele inwestycyjne. Miarą relacji między stopami zwrotu portfeli a stopami WIG-u jest współczynnik modelu regresji liniowej β. Współczynnik ten dla portfeli jest mniejszy od jedności, co oznacza, że w przeważającej mierze reagują one wolniej na zmiany indeksu giełdowego. Statystyczna istotność współczynników beta, objawiająca się relatywnie wysokimi wartościami statystyki t-Studenta, potwierdza słuszność weryfikowanej teorii.

Teoria modelu pojedynczego indeksu dowodzi, że współczynnik beta, charakteryzujący daną inwestycję, jest właściwą miarą ryzyka, akceptowaną przez inwestora. Ryzyka tego nie można wyeliminować na drodze dywersyfikacji portfela. Pozostałą częścią ryzyka całkowitego waloru bądź portfela jest tzw. ryzyko specyficzne, wyrażone wariancją resztową z modelu regresji Sharpe'a. Ryzyko to, w przypadku analizowanych inwestycji, zmniejsza się w miarę rozszerzania portfela o nowe walory. Może ono zostać zredukowane do znikomych rozmiarów. W przeprowadzonym badaniu pokazano jednak, że model jednowskaźnikowy, z uwagi na istnienie dodatniego skorelowania składników resztowych, zaniża wartości wariancji resztowych, które w rzeczywistości są znacznie większe.

W odniesieniu do analizy ryzyka za pomocą modelu Sharpe'a, przeprowadzono badania weryfikujące model CAPM, jako teorię wycenę walorów w warunkach równowagi. Otrzymane wyniki dają podstawę do sformułowania ogólnego wniosku, że wycena papierów wartościowych na GPW w Warszawie nie odbywa się zgodnie z podstawową formą modelu CAPM. Model ten nie jest wystarczający do opisu zależności pomiędzy oczekiwanym zyskiem aktywów a ryzykiem systematycznym.

Ponadto ryzyko specyficzne, mierzone wariancją resztową z równań Sharpe'a jest istotnym czynnikiem wpływającym na wycenę walorów. Można to interpretować jako przejaw nieefektywności rynku lub jako kolejną przesłankę pozwalającą na odrzucenie modelu pojedynczego indeksu.

LITERATURA

Black F., Jensen M. C., Scholes M. (1972), *The Capital asset princig model; some empirical tests*, [w:] Jensen M. C. (red.), *Studies in the theory of capital markets preager*, New York.

Elton E. J., Gruber M. J. (1998), *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa.

Fama E., MacBeth J. (1973), *Risk, return and equilibrium: empirical tests*, „Journal of Political Economy", 1.

Haugen R. A. (1996), *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa.

Jajuga K., Jajuga T. (1998), *Inwestycje*, PWN, Warszawa.

Lintner J. (1965), *The Valuation of risk assets and the selection of risy investments in stock portfolio and capital budgets*, „Review of Economics and Statistics", 47.

Mossin J. (1966), *Equilibrium in a capital asset market*, „Econometrica".

Sharpe W. F. (1963), *A simplified model of portfolio analisis*, „Management Science", January.

Sharpe W. F. (1964), *Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk*, „Journal of Finance".

Lesław Markowski

RISK ANALYSIS AND CAPITAL ASSET PRICING – AN EXAMPLE OF THE WARSAW STOCK EXCHANGE

Summary

The aim of this paper was to analyse Capital Asset Pricing Model – CAPM and the theory connected with the above model, namely Sharpe's single index model.

The first part of this paper gives a brief presentation of the single index model and discusses the properties following from its structure or assumptions. The total risk was decomposed into specific and systematic risk on the basis of the single index model. The level of risk was determined and expressed as coefficient *β*.

This article is to verify the hypothesis of the Polish capital market effectiveness and that the securities quoted on the market are priced according to the market equilibrium model – CAPM. Single securities quoted on the Warsaw Stock Exchange and equally weighted portfolios (from 2-element to 100-element ones) were used in the study.

The results obtained indicate that an increase in the number of securities in the portfolio is accompanied with a growing systematic risk, connected with the general economic situation on the market. A large part of a specific risk, in the form of residual variance, may be eliminated by means of portfolio diversification. Furthermore the study results show that the CAPM model is not suitable as a theory according, to which assets are valued on the Warsaw Stock Exchange.