

Marek Łazewski\*, Krzysztof Zator\*\*

## ROZKŁADY $\alpha$ -STABILNE, KONSEKWENCJE DLA BUDOWY OPTYMALNEGO PORTFELA AKCJI

**Streszczenie.** W niniejszym artykule podjęto próbę oszacowania parametrów rozkładów  $\alpha$ -stabilnych służących do opisu dynamiki stóp zwrotu z akcji, które to rozkłady, będące uogólnieniem rozkładu normalnego, w opinii wielu badaczy mogą stanowić klasę modeli z większą dokładnością opisujących dynamikę procesów zachodzących na rynku kapitałowym. W trakcie eksperymentu oszacowano parametry rozkładu dla kilku najistotniejszych akcji wchodzących w skład indeksu WIG20. W dalszej części artykułu przeprowadzono dyskusję wpływu zmiany opisu matematycznego na klasyczny problem optymalizacji max-min doboru akcji do portfela. W ostatniej części artykułu, na podstawie uzyskanych oszacowań parametrów rozkładów  $\alpha$ -stabilnych dla wybranych akcji, zbudowano przykładowy portfel optymalny i porównano go z otrzymanym na drodze klasycznego rozwiązania Markowitza.

**Słowa kluczowe:** rozkłady  $\alpha$ -stabilne, miara spektralna, optymalny portfel akcji, miary ryzyka.

### 1. WSTĘP

Rozkłady stabilne (w szczególności rozkłady Pareto-Levy'ego, będące głównym przedmiotem tego referatu) stanowią bogatą klasę rozkładów statystycznych, zawierającą w sobie m. in. rozkłady normalne i Cauchy'ego, są rozkładami opisującymi z dobrym dopasowaniem znane z badań empirycznych zjawiska znacznej skośności oraz „grubych ogonów”. Klasa tych rozkładów została scharakteryzowana przez Levy'ego (1924), który badał znormalizowane sumy niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach. Rozkład jest stabilny ( $\alpha$ -stabilny), jeżeli posiada następującą własność (Weron i Weron 1998): suma niezależnych zmiennych  $\alpha$ -stabilnych  $X_1$  oraz  $X_2$  (o takim samym indeksie stabilności  $\alpha$ ), przy dodatnich

\* Mgr, asystent, Katedra Ekonometrii, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu.

\*\* Mgr, TUIR Warta SA, Biuro Strategii i Rozwoju Kapitałowego.

parametrach  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$ , jest zmienną stabilną, a więc rozkłady takie są stabilne względem operacji sumowania:

$$aX_1 + bX_2 = cX + d \quad (1)$$

gdzie symbol  $\stackrel{d}{=}$  oznacza, że zmienne losowe po obydwu stronach równania (1) mają taki sam rozkład prawdopodobieństwa. Dwie zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są tego samego typu, jeżeli istnieją dodatnie  $A > 0$  oraz  $B \in R$ , dla których:

$$X \stackrel{d}{=} AY + B \quad (2)$$

Występują trzy szczególne przypadki rozkładów  $\alpha$ -stabilnych, dla których istnieją analityczne formy określające ich gęstość prawdopodobieństwa (rysunek 1 i tabela 1):

1. Rozkłady normalne, w których  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ :

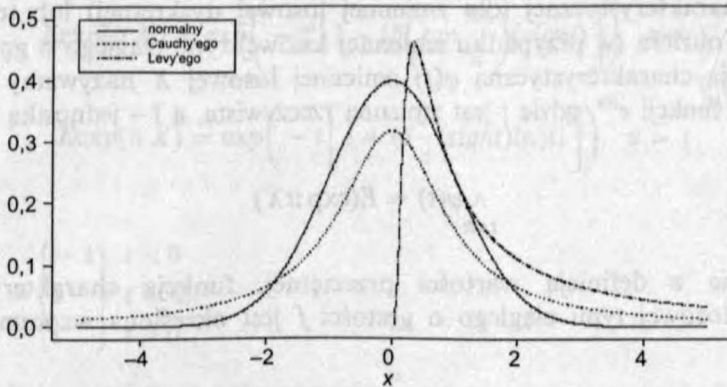
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \text{dla } -\infty < x < \infty \quad (3)$$

2. Rozkłady Cauchy'ego, w których  $X \sim (\gamma, \delta)$ :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2}, \quad \text{dla } -\infty < x < \infty \quad (4)$$

Rozkłady Levy'ego, w których  $X \sim (\gamma, \delta)$ :

$$f(x) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\delta)}\right), \quad \text{gdzie } \delta < x < \infty \quad (5)$$



Rys. 1. Wykres przebiegu funkcji gęstości dla trzech przypadków rozkładów  $\alpha$ -stabilnych – normalnego, Cauchy'ego oraz Lévy'ego

Tabela 1. Porównanie gęstości prawdopodobieństw dla trzech przypadków rozkładów  $\alpha$ -stabilnych

c	P(X > c)		
	normalny	Cauchy'ego	Lévy'ego
0	0,5000	0,5000	1,0000
1	0,1587	0,2500	0,6827
2	0,0228	0,1476	0,5205
3	0,001347	0,1024	0,4363
4	0,00003167	0,0780	0,3829
5	0,0000002866	0,0628	0,3453

Źródło: Nolan (1997b).

## 2. ESTYMACJA PARAMETRÓW ROZKŁADÓW $\alpha$ -STABILNYCH

Z uwagi na to, że w innych przypadkach nieznana jest jawna postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa, przytoczymy inną definicję zmiennych, mających rozkłady stabilne w następującej postaci:

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n \quad (6)$$

gdzie  $X_1, \dots, X_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, o identycznych rozkładach. Wielkości  $c_n$  mogą przybierać wartości określone poprzez wyrażenie:  $c_n = n^{1/\alpha}$  dla  $\alpha \in (0, 2)$ . Podana definicja nie umożliwia jeszcze parametryzacji rozkładów stabilnych. Możliwość taką daje dopiero zastosowanie w tym celu

funkcji charakterystycznej (dla zmiennej losowej dyskretnej) lub też transformaty Fouriera (w przypadku zmiennej losowej typu ciągłego o gęstości  $f$ ).

Funkcją charakterystyczną  $\varphi(t)$  zmiennej losowej  $X$  nazywamy wartość przeciętną funkcji  $e^{itx}$ , gdzie  $t$  jest zmienną rzeczywistą, a  $i$  – jednostką urojoną:

$$\wedge_{t \in R} \varphi(t) = E(\exp itX) \quad (7)$$

Zgodnie z definicją wartości przeciętnej, funkcja charakterystyczna zmiennej losowej typu ciągłego o gęstości  $f$  jest określona wzorem:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \quad (8)$$

Wzór (8) określa jednoznacznie dla danego rozkładu prawdopodobieństwa funkcję charakterystyczną tego rozkładu, przy czym zachodzi również związek odwrotny. Przy założeniu istnienia skończonej wartości całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) |dt| \quad (9)$$

zachodzi zależność:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt \quad (10)$$

przy czym gęstość  $f$  zmiennej losowej  $X$  jest funkcją ciągłą dla  $x \in R$ .

Jeżeli  $\varphi$  jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej  $X$  o dystrybuancie  $F$ , a  $x$  i  $x + h$  są punktami ciągłości dystrybuanty  $F$ , to:

$$F(x + h) - F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-itx) - \exp(it(x + h))}{it} \varphi(t) dt \quad (11)$$

Jeżeli istnieje  $k$ -ty moment zmiennej losowej  $X$  o funkcji charakterystycznej  $\varphi$ , to  $\varphi$  jest  $k$ -krotnie różniczkowalna (w sposób ciągły) i zachodzi związek:

$$\alpha_k = EX^k = \frac{1}{i^k} \varphi^{(k)}(0) \quad (12)$$

Zastosowanie funkcji charakterystycznej zdefiniowanej poprzez wyrażenie (7) do definicji (6)  $\alpha$ -stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa prowadzi do następującej postaci funkcji charakterystycznej:

$$E \exp(it X) = \exp\left(-t^\alpha \left[1 - i\beta \left(\tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) (\text{signt})\right]\right) \quad \alpha \neq 1 \quad (13a)$$

$$E \exp(it X) = \exp\left(-t \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{signt}) \ln|t|\right]\right) \quad \alpha = 1 \quad (13b)$$

gdzie:

$$\text{signt} = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0. \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Rozkłady stabilne są opisywane przez cztery parametry: wskaźnik stabilności  $\alpha \in (0, 2)$ , wskaźnik skośności  $-1 \leq \beta \leq 1$ , wskaźnik skali  $\gamma > 0$  oraz wskaźnik charakteryzujący lokalizację  $\delta \in R$ . Jeżeli  $\alpha = 2$ , to zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny. W innych przypadkach, gdy  $0 < \alpha < 2$ , otrzymamy rozkład o ogonach istotnie grubszych niż w przypadku rozkładu normalnego. W przypadku, gdy  $\beta > 0$ , rozkład jest skośny w prawo i odwrotnie, jeżeli  $\beta < 0$ . Parametr skali  $\gamma$  pełni analogiczną rolę, jak odchylenie standardowe w przypadku rozkładu normalnego. Parametr  $\delta$  dla  $\alpha > 1$  jest równy wartości oczekiwanej. W przypadku hipotezy o efektywności rynków kapitałowych, a w szczególności rynków akcji, przyjmuje się, że  $\alpha$  zawsze powinien być równy 2. W hipotezie rynku fraktalnego zakłada się, że ten parametr może przyjmować wartości z przedziału od 0 do 2. Konsekwencją takiego założenia jest to, że rozkłady Pareto-Levy'ego cechują się samopodobieństwem względem czasu, tzn. są niezmiennicze względem skali (Peters 1997).

Rozkłady Pareto-Levy'ego, dla  $\alpha < 2$ , mają wysokie wierzchołki i grube ogony, natomiast procesy stochastyczne oparte na tych rozkładach cechują się właściwością polegającą na wytwarzaniu trendów i cykli oraz skłonnością do gwałtownych i nieciągłych zmian (Peters 1997), tzn. duże zmiany dokonują się poprzez małą liczbę dużych zmian. W rozkładach normalnych duże zmiany wywołane są wieloma małymi zmianami. W przypadku omawianych rozkładów wariancja (dla  $1 \leq \alpha < 2$ ) – podstawowy miernik ryzyka w klasycznych teoriach rynków kapitałowych – (w przeciwieństwie do wariancji rozkładu normalnego) jest nieokreślona.

Dalej przedstawimy dwa główne sposoby parametryzacji rozkładów  $\alpha$ -stabilnych. W pierwszym z nich zaproponowanym przez Samorodnitsky'ego i Taqqu'a (Samorodnitsky, Taqqu 1994) funkcja charakterystyczna rozkładu Pareto-Levy'ego ma następującą postać:

$$E \exp(it X) = \exp\left(-\gamma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta \left(\tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) (\text{signt})\right] + i\delta_1 t\right) \quad \alpha \neq 1 \quad (14a)$$

$$E\exp(it X) = \exp\left(-\gamma|t|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign}t)\ln|t|\right] + i\delta_1 t\right) \quad \alpha = 1 \quad (14b)$$

jeżeli zmienna losowa  $X$  określona zależnością:

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma Z + \delta_1 & \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + (\delta_1 + \beta\frac{2}{\pi}\gamma \ln \gamma) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (15)$$

w której  $Z = Z(\alpha, \beta)$  określona jest przez wyrażenia (13a) i (13b).

Innym rodzajem parametryzacji jest propozycja Zolotareva (1995), w której  $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$ , tzn.:

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma\left(Z - \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + \delta & \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + \delta_0 & \alpha = 1 \end{cases} \quad (16)$$

Wtedy funkcja charakterystyczna rozkładu przybiera postać:

$$E\exp(it X) = \exp\left(-\gamma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta\left(\tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)(\text{sign}t)\gamma|t|^{1-\alpha} - 1\right] + i\delta_0 t\right) \quad \alpha \neq 1 \quad (17a)$$

$$E\exp(it X) = \exp\left(-\gamma|t|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\text{sign}t)\ln|t| + \ln\gamma\right] + i\delta_0 t\right) \quad \alpha = 1 \quad (17b)$$

Wartość tej reprezentacji polega na tym, że funkcja charakterystyczna – a co za tym idzie zgodnie z wyrażeniem (10) funkcja gęstości rozkładu – jest ciągła dla wszystkich wartości parametrów. Parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  mają takie same znaczenie dla obydwóch parametryzacji (14a–14b) oraz (17a–17b), przy czym związek między  $\delta_1$  i  $\delta_0$  jest następujący:

$$\delta_1 = \delta_0 - \beta\left(\tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)\gamma, \quad \text{jeżeli } \alpha \neq 1 \quad (18)$$

oraz

$$\delta_1 = \delta_0 - \beta\frac{2}{\pi}\gamma \ln \gamma, \quad \text{jeżeli } \alpha = 1 \quad (19)$$

Jeżeli  $f(x, \alpha, \beta, \gamma, \delta_0)$  będzie gęstością funkcji  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$ , to rozkłady Pareto-Levy'ego charakteryzują się wtedy następującą własnością:

$$f(x, \alpha, -\beta, \gamma, \delta_0) = f(-x | \alpha, \beta, \gamma, -\delta_0) \quad (20)$$

Podstawowe właściwości rozkładów Pareto-Levy'ego zostały odkryte przez Samorodnitsky'ego i Taqqu'a (1994) oraz Racheva i Mitnika (2000).

W celu estymacji parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego zaproponowano w ciągu ostatnich trzech dekad kilkanaście metod. Najwcześniej stosowana metoda szacowania parametru stabilności  $\alpha$  polega na wykreśleniu empirycznej funkcji rozkładu w skali podwójnie logarytmicznej. Udowodniono, że (Samorodnitsky, Taqqu 1994):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha P(X > x) = c_\alpha (1 + \beta) \gamma^\alpha \quad (21)$$

Ogon empirycznej funkcji rozkładu w skali podwójnie logarytmicznej powinien być zbliżony do linii prostej o nachyleniu  $\alpha$ , jeżeli zmienna losowa ma rozkład  $\alpha$ -stabilny. Główny problem polega w tym przypadku na tym, że nie jest znana postać ogona Pareto. McCulloch (1997) pokazał, że stosowanie uogólnionego modelu Pareto sugerowanego przez DuMouchela (1983) lub też estymatora Hilla (1975), kiedy  $1 < \alpha < 2$ , prowadzi do przeszacowania tego parametru. McCulloch wskazał, że badacze używający takich mylnych estymatorów grubych ogonów  $\alpha$  bez uzasadnienia podawali twierdzenia o tym, że analizowane dane były niestabilne.

Drugie podejście związane z estymacją parametrów rozkładów stabilnych zaproponowali Fama i Roll (1968), którzy skonstruowali tablice kwantyli symetrycznych rozkładów stabilnych, dla  $\beta = 0$ . McCulloch (1986) rozszerzył tę metodologię na przypadki niesymetryczne. Metodę estymacji parametrów rozkładów stabilnych, opartą na empirycznej funkcji charakterystycznej zaproponował pierwszy Press (1972). Sposób ten był następnie modyfikowany m. in. przez Paulsona, Halcomba i Leitcha (1975), Feuervergera i McDunougha (1981b) oraz Kogona i Williamsa (1998).

W ostatnich latach, w przypadku rozkładów statystycznych, dla których nie jest znana jest analityczna postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa, zaproponowano metody estymacji parametrów oparte na metodzie największej wiarygodności. Jeżeli przyjmiemy sposób parametryzacji rozkładu stabilnego, opisanego wzorami (17a) i (17b), oraz jeśli oznaczymy przez  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta_0)$  wektor szacowanych parametrów, a przez  $f(x|\theta)$  gęstość funkcji prawdopodobieństwa, to przestrzeń parametrów jest dana przez:  $\Theta = (0, 2] \times [-1, 1] \times (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$ . Logarytm funkcji wiarygodności próby  $X_1, \dots, X_n$  jest dany przez wyrażenie:

$$l(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i | \vec{\theta}) \quad (22)$$

Nieznana jawna postać analityczna funkcji gęstości rozkładu Pareto-Levy'ego sprawia trudności techniczne związane z estymacją parametrów metodą największej wiarygodności na podstawie wzoru (22). Wiele pomocnych w tym zakresie właściwości gęstości rozkładów stabilnych przedstawił Zolotarev (1986). Badania DuMouchela pokazały, że kiedy  $\vec{\theta}_0$  przyjmuje wartość z przedziału określonego przez przestrzeń parametrów  $\Theta$ , to estymator największej wiarygodności ma asymptotycznie rozkład normalny o wartości średniej  $\vec{\theta}_0$  oraz macierzy kowariancji określonej przez  $n^{-1}B$ , gdzie  $B = (b_{ij})$  jest odwróconą macierzą informacji Fishera  $I$ , którą można zapisać w postaci (DuMouchel 1973b):

$$I_{ji} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \frac{1}{f} dx \quad (23)$$

Gdy  $\vec{\theta}$  znajduje się blisko granicy przestrzeni parametrów  $\Theta$ , to dla próby o skończonej liczebności trudno precyzyjnie oszacować parametry, co stwarza komplikacje implementacyjne związane z tą metodą estymacji parametrów.

Jedyne efektywne, w sensie czasu wykonywania obliczeń, algorytmy estymacji parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego opracowali i zaimplementowali numerycznie Brorsen i Yang (1990) oraz Nolan (1997), którzy wykorzystali w tym celu transformatę Fouriera. Istotną rolę w procesie estymacji parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego, w szczególności parametru stabilności  $\alpha$ , ze względu na brak jawnej postaci ich funkcji gęstości prawdopodobieństwa, odgrywa dobór metody szacunku, która pozwoli na uzyskanie estymatorów stabilnych, niezależnych od liczebności próby. Estymatory największej wiarygodności – w przeciwieństwie do innych estymatorów – spełniają oczekiwania. Badania w tym zakresie przeprowadził Nolan (1997), który przedstawił asymptotyczne wartości odchyłeń standardowych szacunków parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  w zależności od ich położenia w dopuszczalnym przedziale zmienności. W miarę wzrostu wartości parametru  $\alpha$  wartości szacunków jego błędu maleją, ale następuje bardzo istotny wzrost błędu szacunku parametru  $\beta$ .

### 3. BUDOWA OPTIMALNEGO PORTFELA AKCJI NA PODSTAWIE UOGÓLNIONEJ DEFINICJI KOWARIANCJI

Zakładamy, że  $d$ -wymiarowy losowy wektor  $X$  ma  $\alpha$ -stabilny wielowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa ( $0 < \alpha < 2$ ) (Samorodnitsky, Toqqu



1994), jeżeli istnieją: skończona miara  $\Gamma$  określona na jednostkowej sferze  $S_d \in R^d$  ( $S_d = \{s, \|s\| = 1\}$ ) oraz wektor przesunięcia  $\mu^0 \in R^d$  takie, że ich funkcja charakterystyczna jest określona następująco:

$$\log \Psi_x(\lambda) = - \int_{S_d} |\lambda, s|^\alpha (1 - i \operatorname{sign}((\lambda, s)) W(\alpha, s, \lambda)) \Gamma(ds) + i(\lambda, \mu^0),$$

$$\lambda \in R^d \quad (24)$$

gdzie:

$$W(\alpha, s, \lambda) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log |(\lambda, s)| & \alpha = 1 \end{cases}$$

$X$  ma symetryczny  $\alpha$ -stabilny wielowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa ( $S\alpha S$ ) w przestrzeni  $R^d$  (dla  $0 < \alpha < 2$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy wektor przesunięcia  $\mu^0 \in R^d$  oraz miara spektralna  $\Gamma$  są symetryczne. Wtedy funkcja charakterystyczna przyjmuje następującą formę:

$$E \exp i(\lambda, s) = \exp \left\{ - \int_{S_d} |(\lambda, s)|^\alpha \Gamma(ds) \right\}, \quad \text{dla } \lambda \in R^d \quad (25)$$

Oznaczmy teraz przez  $R$   $d$ -wymiarowy wektor określający zwroty z papierów wartościowych oraz  $E(R) = \mu^0$ . Załóżmy teraz, że  $R - \mu^0$  ma rozkład  $S\alpha S$ ,  $\alpha > 1$ . Wtedy funkcja charakterystyczna ma postać:

$$E \exp i(\lambda, R) = \exp \left\{ - \int_{S_d} |(\lambda, s)|^\alpha \Gamma(ds) + i(\lambda, \mu^0) \right\}, \quad \lambda \in R^d \quad (26)$$

Portfel  $p$ , będący liniową kombinacją  $d$  finansowych aktywów, jest charakteryzowany przez parę liczb (wartość oczekiwana, parametr skali) wyrażoną następująco:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^d x_i E(R_i) \quad (27)$$

oraz

$$A_p(x) = \left( \int_{S_d} |(x, s)|^\alpha \Gamma(ds) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (28)$$

gdzie:

$x_i$  jest wagą określającą inwestycję w instrument  $i$ ;

$x$  jest wektorem  $d$ -kolumnowym składowych portfela,  $x = (x_1, \dots, x_d)'$ ;

$E(R_i)$  jest oczekiwanym zwrotem z instrumentu  $i$ ;

$R_p$  jest zwrotem z portfela;

$\Gamma$  jest miarą spektralną wektora losowego  $(R_1, \dots, R_d)$  zwrotów z  $d$  instrumentów na jednostkowej sferze  $S_d$ .

Jeżeli  $\sigma = 2$ , to  $A_p^\alpha$  definiuje zwykłą formę kwadratową. Wtedy:

$$A_p(x)^2 = \left( \int_{S_d} |(x_i, s_i)|^2 \Gamma(ds) \right)^2 = \int_{S_d} \left( \sum_{i=1}^d x_i^2 s_i^2 \right) \Gamma(ds) + \int_{S_d} \sum_{i,j \neq j} x_i x_j s_i s_j \Gamma(ds) \quad (29)$$

$$= \sum_{i=1}^d x_i^2 \int_{S_d} s_i^2 \Gamma(ds) + \sum_{i,j,i \neq j} x_i x_j \int_{S_d} s_i s_j \Gamma ds \quad (30)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2 \text{var} R_i + \sum_{i,j,i \neq j} x_i x_j [R_i, R_j]^2 \quad (31)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^d x_i^2 \text{var} R_i + \sum_{i,j,i \neq j} x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j) \right] \quad (32)$$

$$= \frac{1}{2} x^t \Omega x \quad (33)$$

$$= \frac{1}{2} \text{var}(x^t R) \quad (34)$$

Przy założeniu, że  $0 < \alpha < 2$  wariancja jest nieskończona. Wtedy ryzyko może być kwantyfikowane przez parametr skali, zdefiniowany przez wyrażenie (28) określające liniową kombinację  $\alpha$ -stabilnych wektorów. Mając  $n$ ,  $d$ -wymiarowych obserwacji  $R_1, \dots, R_n$  wektora  $R$  uzyskanych w czasie, możemy go przedstawić we współrzędnych biegunowych w następujący sposób:  $\rho = (R_1, \dots, R_n)$  oraz  $\theta = \theta(R) = (\theta_1(R), \dots, \theta_n(R))$ , przy czym każdy  $\theta_i(R)$  jest wektorem  $(d-1)$ -kolumnowym. W takim przypadku  $A_p(x)$  może być estymowane poprzez (Rachev, Xin 1993):

$$A_p^\alpha(x) = \int_{\Omega_d} \xi(x, \vartheta) d\Phi_n(\vartheta) \quad (35)$$

gdzie:

$$x = (r \prod_{i=1}^{d-1} \sin \varphi_i, r \prod_{i=1}^{d-2} \sin \varphi_i \cos \varphi_{d-1}, \dots, r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, r \cos \varphi_1);$$

$$\xi(x, \vartheta) = |x|^{\alpha n} \left| \cos \varphi_1 \cos \vartheta_1 + \sum_{i=2}^{d-1} \cos \varphi_i \cos \vartheta_i \prod_{k=1}^{i-1} \sin \varphi_k \sin \vartheta_k + \prod_{k=1}^{i-1} \sin \varphi_k \sin \vartheta_k \right|^{\alpha n};$$

$$\Omega_d = [0, \pi]^{d-2} \cdot [0, 2\pi];$$

$\Phi_n(\vartheta)$  jest estymatorem funkcji rozkładu  $\Gamma$  na zbiorze  $\Omega_d$  zdefiniowanym następująco:

$$\Phi_n(\vartheta) = \varphi_n(\vartheta)\Phi_n(\Pi).$$

Problem optymalizacji portfela papierów wartościowych w przypadku klasycznym ( $\alpha = 2$ ) został rozwiązany przez Markowitza (1959) oraz Sharpe'a (1963). W przypadkach uogólnionych (gdy nie bierzemy pod uwagę aktywów nie obciążonych ryzykiem) portfel  $P$  leżący na krzywej efektywności jest określony poprzez rozwiązanie następującego zadania optymalizacyjnego:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} A_p(x) = \left( \int_{\Omega_d} |(x, s)|^\alpha \Gamma(ds) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (36)$$

gdzie:

$$(x, \mu^0) = \bar{R}_p,$$

$$(x, e) = 1,$$

$$x_i \geq 0 \text{ (nie dopuszcza się krótkiej sprzedaży).}$$

Jeżeli  $\alpha = 2$ , to problem optymalizacyjny redukuje się do:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^t \Omega x \quad (37)$$

$$(x^t, \mu^0) = \bar{R}_p \quad (38)$$

$$(x^t, e) = 1 \quad (39)$$

$$x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, d \quad (40)$$

Jest to dobrze znane zagadnienie optymalizacji Markowitza.

#### 4. WYNIKI

Praktyczne wykorzystanie estymatora miary ryzyka opisanego wzorem (28), do optymalizacji struktury portfela nastęrcza trudności natury obliczeniowej już dla portfela o więcej niż 3 aktywach. Problem ten staje się wówczas  $d$ -wymiarowym problemem nieliniowej optymalizacji, wymagającym dużej mocy obliczeniowej. Dlatego część obliczeniową wykonano, dokonując uproszczenia polegającego na założeniu, że badanie wartości funkcji:

$$A_p(x) = \left( \int_{S_d} |(x, s)|^\alpha \Gamma(ds) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (41)$$

można estymować poprzez badanie  $\alpha$ -kowariancji dwuwymiarowych  $|R_i, R_j|$  dla  $i, j = 1, \dots, d$  i zbudowania z nich macierzy o wymiarach  $d \times d$ , oznaczanej dalej  $[R; R]_x$ . Proponowana miara ryzyka  $A_d$  dla portfela akcji wyraża się wówczas wzorem:

$$\bar{A}_d = (x [R; R]_x x^T)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (42)$$

gdzie  $x$  jest wektorem wag poszczególnych składowych portfela. Uproszczenie takie jest konsekwencją wynikającą z formy estymatora miary spektralnej, określonego wzorem (28). Przyjęto, że nie popełniamy dużego błędu, zakładając, że miara ta jest addytywna w poszczególnych przedziałach całkowania. W dalszych badaniach autorzy zamierzają przeprowadzić weryfikację zgodności tak określanego estymatora w stosunku do propozycji innych autorów. Takie uproszczenie było uzasadnione tym, iż w szczególności nie interesowało autorów dokładne oszacowanie ryzyka, a jedynie zbadanie, jak zmiana miary ryzyka wpłynie na skład portfeli w stosunku do portfeli wyspecyfikowanych z rozwiązania klasycznego problemu Markowitza. Tym samym nie skupiano się nad kształtem i położeniem krzywej portfeli efektywnych w stosunku do jej położenia otrzymanego drogą rozwiązania klasycznego. Inni autorzy pokazują (Belkacem 1997), że krzywa ta jest „dodatnio” przesunięta względem krzywej Markowitza. Przez „dodatnio” przesunięcie rozumiemy tu przesunięcie w kierunku wyższej stopy zwrotu i niższego ryzyka. Nie jest oczywiste, że taka prezentacja ma sens, pamiętając o tym, że nowa miara ryzyka ze wzoru (28) nie do końca jest generalizacją kowariancji. Bliższa takiej koncepcji jest upraszczająca propozycja autorów referatu, zdefiniowana przez (42). W tabelach 1 i 2 przedstawiono wyniki obliczeń dokonanych na podstawie określonego przez (42) wskaźnik jakości. Badanie przeprowadzono na rocznych szeregach czasowych pięciu akcji wchodzących w skład WIG20 próbkowanych z częstotliwością 15 minutową o  $n \approx 6000$ .

Uzyskano rozwiązanie, z którego wynika, że optymalny portfel (minimalizujący wskaźnik jakości) powinien zawierać jedynie akcje PKN. Oznacza to, że ryzyko pojedynczych papierów wartościowych, mierzone  $\alpha$ -miarami lokuje się bliżej krzywej efektywnej niż ma to miejsce w przypadku klasycznej miary ryzyka. Porównując tabele 1 i 2, można zauważyć, abstrahując od odmiennych wartości ryzyka, różnicę w proponowanych przez algorytmy składach portfeli. Dominuje w nich PKN, jednak już pozostałe składowe różnią się znacznie. Szczególnie dotyczy to redukcji przez algorytm klasyczny akcji KGHM (na rzecz Agory), które w rozwiązaniu miały duży udział w portfelu.

Tabela 1. Portfele ( $\alpha = 2$ ) dla szeregów czasowych 15-minutowych (w %)

Lp.	Agora	Elektrim	KGHM	PKN	Prokom	Ryzyko (cov)	Dochód
1	18,2	0,0	21,7	55,4	4,7	0,2779	-0,00649
2	18,2	0,0	20,4	57,3	4,1	0,2780	0,00629
3	18,2	0,0	15,6	63,9	2,3	0,2796	0,00559
4	18,2	0,0	12,2	68,7	1,0	0,2819	0,00509
5	18,0	0,0	8,5	73,4	0,0	0,2853	0,00459
6	17,5	0,0	4,4	78,1	0,0	0,2896	0,00409
7	16,9	0,0	0,3	82,7	0,0	0,2950	0,00359
8	8,5	0,0	0,0	91,5	0,0	0,3029	0,00309
9	4,9	0,0	0,0	95,1	0,0	0,3074	0,00289

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2. Portfele ( $\alpha = 1.55$ ) dla szeregów czasowych 15-minutowych (w %)

Lp.	Agora	Elektrim	KGHM	PKN	Prokom	Ryzyko (cov)	Dochód
1	20	20	20	20	20	0,00530	-0,004813
2	10	10	20	20	40	0,00450	-0,002582
3	5	5	30	30	30	0,00340	-0,001261
4	2	2	40	40	16	0,00260	-0,000386
5	0	0	45	45	10	0,00210	0,000163
6	0	0	35	55	10	0,00190	-0,000091

Źródło: opracowanie własne.

## 5. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono zarówno teoretyczne, jak i praktyczne aspekty optymalizacji portfela akcji przy założeniu, że rozkłady stóp zwrotu są modelowane rozkładami  $\alpha$ -stabilnymi. Zwrócono uwagę na problemy metodologiczne wynikające z faktu, że rozkłady te nie posiadają jawnej funkcji gęstości. Generuje to określone trudności zarówno na etapie identyfikacji samych parametrów rozkładu jak również określenia skumulowanej miary spektralnej. Przedstawione problemy uzmysławiają trudności w praktycznym budowaniu algorytmów optymalizacyjnych. Zaproponowano uproszczoną formułę wskaźnika jakości dla budowanego portfela. Pokazano, że tak optymalizowany portfel różni się istotnie od portfela Markowitza.

## LITERATURA

- Belkacem L., (1997), *How to select optimal portfolio in  $\alpha$ -stable markets*, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 3100, Le Chesnay.
- Brorsen W. B., Yang S. R. (1990), *Maximum likelihood estimation of symmetric stable distribution parameters*, „Communications in Statistics-Simulation”, 19(4).
- DuMouchel W. H. (1973a), *Estimating the stable index – in order to measure tail thickness: a critique*, „Annual of Statistics”, 11.
- DuMouchel W. H. (1973b), *Stable distributions in statistical inference. 1: Symmetric stable distributions compared to other symmetric longtailed distributions*, JASA, 68.
- Fama E. F., Roll, R. (1968), *Some properties of symmetric stable distributions*, JASA, 63.
- Feuerverger A., McDunnough, P. (1981), *On efficient inference in symmetric stable laws and processes*, [w:] Csrgo M., Dawson D. A., Rao N. J. K., Saleh A. K., (red.), *Statistics and related topics*.
- Hill B. M. (1975), *A simple general approach to inference about the tail of distribution*, „Annual of Statistics”, 3.
- Kogon S. M., Williams D. B. (1998), *Characteristics function based estimation of stable parameters*, [w:] Adler R., Feldman R., Taqqu M. (red.), *A practical guide to heavy tailed data*, Birkhauser, Boston.
- Levy P. (1924), *Théorie des erreurs la loi de Gauss et les exceptionnelles*, „Bulletin de la Société de France” 52.
- Markowitz H. (1959), *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. John Wiley & Sons, New York.
- McCulloch J. H. (1986), *Simple consistent estimators of stable distributions parameters*, „Communication in Statistics Simulation”, 15.
- McCulloch J. H. (1997), *Measuring tail thickness to estimate the stable index alpha: a critique*, J. Bus. Econ. Stat. 15.
- Nolan J. P. (1997), *Numerical computation of stable densities and distributions functions*, „Communications in Statistics. Stochastic Models”, 13(4).
- Paulson A. S., Holcomb, E. W., Leitch R. (1975), *The estimation of the parameters of the stable laws*, „Biometrika” 62.
- Peters E. E. (1997), *Teoria chaosu a rynki kapitalowe*, WIG-Press, Warszawa.
- Press S. J. (1972), *Estimation in univariate and multivariate stable distributions*, JASA, 67.
- Rachev S., Mitnik, S. (2000), *Stable paretian models in finance*, Wiley, New York.
- Rachev S. T., Xin H. (1993), *Test on association of random variables in the domain of attraction of multivariate stable law*, Prob. And Math. Stat., 14.
- Samorodnitsky G., Taqqu M. S. (1994), *Stable non-gaussian random processes*, Chapman and Hall, New York.
- Sharpe W. F. (1963), *A simplified model for portfolio analysis*, „Management Science”, 10.
- Weron A., Weron R. (1998), *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Zolotarev V. M. (1995), *On representation of densities of stable laws by special functions*, Theory Probab. Appl., 39.

Marek Łażewski, Krzysztof Zator

## OPTIMAL PORTFOLIO SELECTION USING $\alpha$ -STABLE DISTRIBUTIONS

### Summary

In this paper we study the traditional Mean-Variance method in portfolio selection when asset returns are assumed to be  $\alpha$ -stable. An  $\alpha$ -stable optimal portfolio are computed and compared to the classical Gaussian one. The efficient frontier obtained from this analysis model dominates the one defined in terms of the Markowitz portfolio selection model criterion.

W klasycznym modelu Markowitza (1952) zakłada się, że stochastyczny zwrot z aktywów jest zmienną losową normalną. W tym artykule rozważamy model, w którym zwrot z aktywów jest zmienną losową  $\alpha$ -stabilną. Obliczamy optymalne portfele i porównujemy je z klasycznym modelem Markowitza. Wykazuje się, że efektywna granica uzyskana w modelu  $\alpha$ -stabilnym dominuje granicę efektywną w modelu Markowitza.

Kluczowe słowo: optymalny portfel, rozkład  $\alpha$ -stabilny, efektywna granica, model Markowitza.

Rozkłady  $\alpha$ -stabilne: Zator, Łażewski, 2007; Zator, Łażewski, 2008; Zator, Łażewski, 2009; Zator, Łażewski, 2010; Zator, Łażewski, 2011; Zator, Łażewski, 2012; Zator, Łażewski, 2013; Zator, Łażewski, 2014; Zator, Łażewski, 2015; Zator, Łażewski, 2016; Zator, Łażewski, 2017; Zator, Łażewski, 2018; Zator, Łażewski, 2019; Zator, Łażewski, 2020; Zator, Łażewski, 2021; Zator, Łażewski, 2022; Zator, Łażewski, 2023; Zator, Łażewski, 2024; Zator, Łażewski, 2025.

\* Mł. wydział, Katedra Statystyki i Informatyki, Uniwersytet Wrocławski.