ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 227, 2009

Tomasz Jurkiewicz[*], *Teresa Plenikowska-Ślusarz*[**]

O SZACOWANIU PARAMETRÓW MODELU ZMIAN W CZASIE Z UWZGLĘDNIENIEM WAHAŃ OKRESOWYCH

1. WPROWADZENIE

Wiele spośród zjawisk, których zmiany są obserwowane w czasie, charakteryzuje się okresowością, czyli powtarzalnymi regularnie odchyleniami od ogólnego kierunku rozwoju. Łatwe do zaobserwowania są wahania sezonowe będące wynikiem oddziaływania przyczyn o charakterze przyrodniczym. Również dość łatwo można zaobserwować regularne odchylenia o krótszych cyklach, miesięcznych, tygodniowych czy dobowych, wynikające z przyczyn ekonomicznych, społecznych czy organizacyjnych.

Możliwość zaobserwowania i zmierzenia zmian zachodzących w czasie pozwala z jednej strony na wskazanie przyczyn kształtujących dane zjawisko oraz zmierzenie ich wpływu, z drugiej zaś na wykorzystanie tych informacji w prognozowaniu przyszłych wartości zjawiska. Rozwój elektronicznych technik obliczeniowych pozwala na stosowanie coraz bardziej złożonych i skomplikowanych metod. Należy dbać również o to, by stosowane metody były w miarę proste, aby nawet mało doświadczony użytkownik potrafił z nich korzystać. Jednak jakość uzyskiwanych tymi metodami wyników nie powinna być gorsza.

Jednocześnie warto zauważyć, że w popularnych pakietach statystycznych najczęściej spotkamy się z mechanicznymi metodami wyznaczania trendu poprzez np. średnie ruchome czy wygładzanie wykładnicze. Trudno natomiast spotkać analityczne metody wyznaczania funkcji trendu z uwzględnieniem wahań okresowych. Metody mechaniczne, których wadą jest m.in. konieczność przyjmowania arbitralnych założeń odnośnie np. parametrów wygładzania, nie pozwalają w pełni poznać natury badanego zjawiska, a tym samym na budowanie prognoz o dłuższym horyzoncie.

[*] Dr, Katedra Statystyki, Uniwersytet Gdański.
[**] Mgr, Katedra Statystyki, Uniwersytet Gdański.

Klasyczny sposób wyznaczania modelu uwzględniającego występowanie tendencji rozwojowej i składnika okresowego (sezonowego), tzw. metoda wskaźnikowa, która bardzo często przedstawiana jest w podręcznikach z zakresu statystyki (np. Jóźwiak, Podgórski 1992, s. 318–323; Ostasiewicz, Rusnak, Siedlecka 1999, s. 317–322; Zeliaś, Pawełek, Wanat 2002, s. 191–194; Zając 1994, s. 379–398), może w szczególnych warunkach prowadzić do może nie tyle błędnych, co mniej precyzyjnych oszacowań. Celem pracy było pokazanie, że nieznaczne zmodyfikowanie sposobu wyznaczania parametrów modelu umożliwia uzyskanie lepiej dopasowanego modelu.

2. SZACOWANIE PARAMETRÓW MODELI TRENDU Z OKRESOWOŚCIĄ

2.1. Metoda wskaźników (WSK)

W metodzie wskaźników pierwszym krokiem jest wyznaczenie modelu tendencji rozwojowej dla całego szeregu czasowego ($y_{t,i}$ gdzie t jest numerem okresu zaś i numerem fazy cyklu). Następnie na podstawie wartości teoretycznych ($y^*_{t,i}$), oszacowanych za pomocą funkcji trendu, oblicza się w przypadku modelu addytywnego różnice ($y_{t,i} - y^*_{t,i}$) między wartościami zaobserwowanymi a teoretycznymi, a dla modelu multiplikatywnego ilorazy ($y_{t,i} / y^*_{t,i}$) tych wartości. Jako wskaźnik okresowości dla danej fazy cyklu przyjmuje się średnią z tzw. faz/okresów jednoimiennych, czyli np. wszystkich pierwszych kwartałów ${}_AS_1 = \frac{1}{c}\sum_t \left(y_{t,1} - y^*_{t,1}\right)$ lub ${}_MS_1 = \frac{1}{c}\sum_t \left(y_{t,1} / y^*_{t,1}\right)$, gdzie c – ilość cykli w szeregu czasowym. Metoda ta jest prosta, ale niestety w niektórych specyficznych przypadkach daje nienajlepsze wyniki. Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 1.

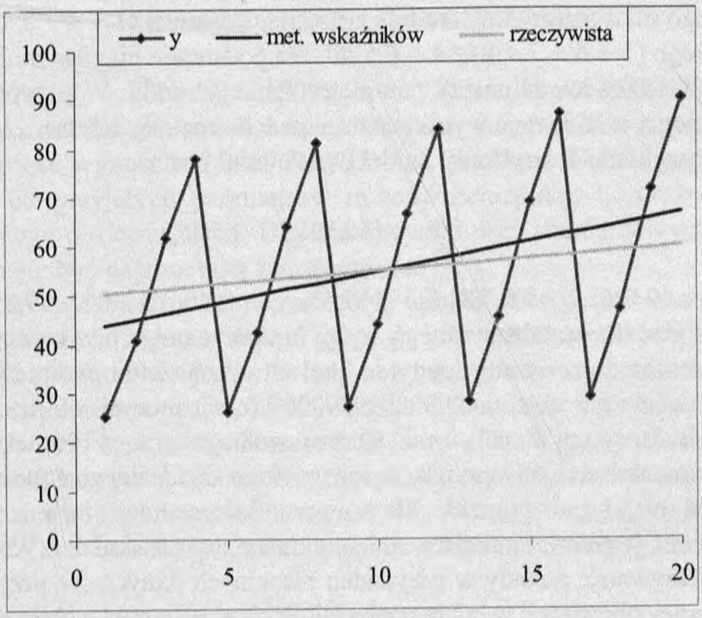
Utworzono ciąg wartości zmiennej obserwowanej y dla 20 kolejnych okresów na podstawie deterministycznego modelu:

$y^*_{t,i} = (50 + 0,5t)S_i$, gdzie $S_1 = 50\%$, $S_2 = 80\%$, $S_3 = 120\%$, $S_4 = 150\%$.

Na podstawie tego zbioru danych oszacowano parametry modelu metodą wskaźników. Uzyskany model ma postać:

$y^*_{t,i} = (42,8 + 1,21t)S_i$, gdzie $S_1 = 51,3\%$, $S_2 = 81\%$, $S_3 = 119,8\%$, $S_4 = 147,9\%$, $R^2 = 96,15\%$.

Uzyskane oszacowanie jest niedokładne i jest to efekt rozbicia procedury szacowania na dwa osobne etapy. Skutkiem tego jest nieuzyskanie minimalnej wartości niewyjaśnionej sumy kwadratów dla całego modelu.



Wykres 1. Rzeczywista i oszacowana funkcja trendu

Źródło: Opracowanie własne

Wykres 1. ilustruje przyczynę uzyskiwania gorszych oszacowań. Widać wyraźnie, że funkcja trendu jest „ściągana" z lewej strony w dół przez niższe wartości w pierwszych fazach cyklu, a z prawej strony w górę przez wyższe wartości z ostatnich faz cyklu. Błąd oszacowania będzie tym większy, im wyższe będą różnice między pierwszymi i ostatnimi fazami, im większy będzie udział wahań w modelu, im niższy średni poziom zjawiska oraz im krótszy szereg czasowy.

Inną wadą tej metody, która może mieć analogiczne konsekwencje, jest wrażliwość na niepełną liczbę obserwacji. W takim przypadku zachodzi także konieczność obliczania oczyszczonych wskaźników okresowości tak, aby ich suma była, w zależności od przyjętego modelu okresowości, równa 0 lub liczbie faz w cyklu.

2.2. Metoda wskaźników z wyznaczaniem trendu na podstawie średnich cyklu (SC)

Metoda nie różni się w istocie od klasycznej metody wskaźników. Jedyną modyfikacją jest inny sposób wyznaczenia funkcji trendu. W pierwszym kroku należy policzyć średnie wartości cechy y oraz zmiennej czasowej t w każdym cyklu. Przykładowo dla sezonowości kwartalnej i zmiennej $t = 1, 2, \ldots, n$ dla pierwszego roku otrzymamy średnią zmiennej czasowej (1 + 2 + 3 + 4) / 4 = 2,5, dla drugiego (5 + 6 + 7 + 8) / 4 = 6,5 itd. Na podstawie ciągów średnich cechy y i zmiennej t oszacować należy parametry funkcji trendu. W przypadku modelu addytywnego metoda daje wyniki analogiczne do metody Kleina.

Dla przykładu 1. uzyskany model będzie miał postać:

$$y_{t,i} = (50{,}2125 + 0{,}5t)S_i,$$

gdzie $S_1 = 49{,}8\%$, $S_2 = 79{,}7\%$, $S_3 = 119{,}5\%$, $S_4 = 149{,}4\%$, $R^2 = 99{,}999972\%$.

Jak widać dla przedstawionego wyżej hipotetycznego przykładu metoda daje prawie idealne dopasowanie. Jedynie błąd w wyznaczeniu parametru b, którego dokładna wartość wynosi 0,499999999999999 (efekt precyzji obliczeniowej w arkuszu kalkulacyjnym Excel), oraz wyrazu wolnego a, a w konsekwencji także wskaźników okresowości, sprawia, że nie uzyskuje się idealnego dopasowania.

Zaletą metody jest prostota obliczeniowa. Ilość operacji, zwłaszcza przy ręcznym liczeniu, jest nawet mniejsza, niż przy metodzie wskaźników. Wadą natomiast jest nieefektywność metody w przypadku niepełnych danych. W przypadku braku którejkolwiek obserwacji w cyklu trzeba eliminować cały cykl z obliczeń.

2.3. Minimalizacja NSK (OPT)

Estymując model uwzględniający trend i okresowość za kryterium dobroci dopasowania przyjmuje się najczęściej, analogicznie jak w metodzie najmniejszych kwadratów, minimalną wartość niewyjaśnionej sumy kwadratów (NSK) modelu. Do wyznaczania parametrów całego modelu można zatem wykorzystać metodę iteracyjnego wyznaczania minimum funkcji celu, przy pomocy np. narzędzia Solver w arkuszu kalkulacyjnym Excel[1]. W metodzie tej zmieniając parametry funkcji poszukuje się takiej ich kombinacji, dla której funkcja celu osiągnie wartość minimalną (lub maksymalną). W przypadku szacowania parametrów modelu uwzględniającego okresowość należy określić jako minimalizowaną funkcję celu niewyjaśnioną sumę kwadratów (NSK) całego modelu. Wartościami zmienianymi będą w tym przypadku parametry funkcji trendu i wskaźniki okresowości. Na wskaźniki okresowości należy dodatkowo nałożyć warunek ograniczający, aby ich suma była równa 0 w modelu addytywnym lub ilości faz w cyklu w modelu multiplikatywnym. Stosując tę metodę dla danych z przykładu 1. otrzymano model postaci:

[1] Przykład zastosowania Solvera w estymacji parametrów modelu metodą iteracyjną można znaleźć w: Jurkiewicz, Plenikowska-Ślusarz 2001, s. 10–16.

$$y_{t,i} = (49{,}99984283 + 0{,}500011435t)S_i,$$

gdzie $S_1 = 50\%$, $S_2 = 80\%$, $S_3 = 120\%$, $S_4 = 150\%$, $R^2 = 99{,}99999999874\%$ (wartości wskaźników okresowości są zaokrąglone, najmocniej ostatni, którego dokładna wartość wynosi 149,999962532001%). Wielkość błędów w tej metodzie zależy od przyjętych parametrów metody iteracyjnej, tj. liczby iteracji i dopuszczalnego poziomu błędu. Uzyskane wyniki przy standardowych założeniach wydają się być najzupełniej zadowalające.

Metoda ta daje bardzo dobre rezultaty, bardzo dobrze radzi sobie także z brakami obserwacji. Jednocześnie w sytuacji, gdy model trendu nie jest liniowy, a linearyzacja możliwa jest tylko poprzez logarytmowanie, znacznie lepsze efekty od linearyzowania postaci funkcji trendu daje metoda iteracyjnej minimalizacji (Jurkiewicz, Plenikowska-Ślusarz 2001, s. 10–16). W przypadku szeregów czasowych z okresowością szacowanie przeprowadzane będzie od razu dla całego modelu, więc nie wymaga wieloetapowych obliczeń. Jedyną wadą metody jest w praktyce konieczność korzystania z obliczeń komputerowych.

2.4. Metoda wskaźników z uśrednianiem trendów dla okresów jednoimiennych (ST)

Podobnie jak w metodzie z wyznaczaniem trendu na podstawie średnich cykli (SC), modyfikacja dotyczy wyłącznie sposobu wyznaczania funkcji trendu. Analogicznie do jednej ze znanych metod prognozowania na podstawie trendów jednoimiennych (Zeliaś 1979, s. 86–94), pierwszym krokiem jest wyznaczenie trendów oddzielnie dla poszczególnych faz cyklu. Przykładowo przy sezonowości kwartalnej osobno należy wyznaczyć funkcje trendu dla pierwszych, drugich, trzecich i czwartych kwartałów. Jako ostateczne oszacowanie parametrów funkcji trendu przyjąć należy średnią z odpowiednich parametrów wyznaczonych funkcji trendu. Na podstawie tak wyznaczonego trendu, tak jak w metodzie wskaźnikowej, należy oszacować wskaźniki okresowości.

Metoda ta wymaga wprawdzie policzenia tylu funkcji trendu, ile jest faz cyklu, ale jest jednocześnie efektywna. Dla danych z przykładu pierwszego otrzymamy model postaci:

$$y_{t,i} = (50 + 0{,}5t)S_i,$$

gdzie $S_1 = 50\%$, $S_2 = 80\%$, $S_3 = 120\%$, $S_4 = 150\%$, $R^2 = 100\%$.

Jak widać oszacowanie w tym przypadku jest idealne. Co więcej, nawet po usunięciu kilku obserwacji oszacowanie hipotetycznego modelu pozostaje tak samo dobre.

3. SYMULACYJNA ANALIZA EFEKTYWNOŚCI METOD

W celu porównania efektywności przedstawionych metod wyznaczania parametrów modeli przeprowadzono eksperyment symulacyjny. W pojedynczej symulacji generowano wartości badanej zmiennej w kolejnych okresach, przyjmując przykładowy model trendu liniowego i okresowości multiplikatywnej postaci:

$$y_{t,i} = (50 + 0,5 \cdot t) \cdot S_i + \xi_{ti}$$

gdzie: S_i – wskaźniki okresowości dla poszczególnych faz cyklu wynoszące kolejno 50%, 80%, 120%, 150%; $t = 1, 2, \ldots, 20$; ξ_{ti} – składnik losowy o rozkładzie $N(0, 10)$ lub $N(0,20)$.

Dla wygenerowanych wartości $y_{t,i}$ szacowano parametry modelu klasyczną metodą wskaźnikową oraz trzema proponowanymi metodami: metodą wskaźnikową z wyznaczaniem trendu na podstawie średnich rocznych, metodą iteracyjnej minimalizacji NSK dla parametrów całego modelu oraz metodą wskaźnikową z wyznaczaniem trendu jako średniej trendów z okresów jednoimiennych.

Na podstawie wyników 10 000 symulacji porównywano uzyskiwane czterema metodami dopasowanie modelu za pomocą współczynnika determinacji. Symulacje przeprowadzono osobno dla dwóch rozkładów składnika losowego, czyli z większym i mniejszym zakładanym błędem modelu. Dokonano także analizy rozkładu estymatorów parametrów modelu. Jako miary jakości oszacowania przyjęto w tym przypadku wielkości obciążenia (B) i pierwiastek średniego błędu kwadratowego (RMSE).

4. WYNIKI BADANIA SYMULACYJNEGO

W tablicy 1. przedstawiono zestawienie uzyskanych wartości współczynnika determinacji. Najlepsze wyniki dopasowania modelu uzyskiwano w każdym przypadku przy pomocy metody iteracyjnej minimalizacji niewyjaśnionej sumy kwadratów. Dwie modyfikacje klasycznej metody wskaźników dawały tylko nieznacznie gorzej dopasowane modele, różnice nie przekraczały wartości 0,01. Klasyczna metoda wskaźników miała dopasowanie dla przyjętego modelu gorsze o kilka punktów procentowych.

Tablica 1. Średnie, minimalne i maksymalne wartości współczynników determinacji modeli

Metoda	WSK (1.1)	SC (1.2)	OPT (1.3)	ST (1.4)
		$\xi_{ti} \sim N(0, 10)$		
Średnie R^2	0,8322	0,8662	0,8678	0,8662
Minimalne R^2	0,5938	0,6156	0,6184	0,6158
Maksymalne R^2	0,9438	0,9797	0,9797	0,9797
		$\xi_{ti} \sim N(0, 20)$		
Średnie R^2	0,6081	0,6337	0,6401	0,6338
Minimalne R^2	0,1275	0,1453	0,1804	0,1459
Maksymalne R^2	0,9081	0,9423	0,9434	0,9423

Źródło: Obliczenia własne.

W tablicach 2. i 3. przedstawiono zestawienie obciążenia i pierwiastka ze średniego błędu kwadratowego estymatorów. W przypadku parametrów funkcji trendu największym obciążeniem charakteryzują się oszacowania wyznaczane metodą wskaźników. Są one zbliżone do błędu oszacowania dla sytuacji przedstawionej w przykładzie 1. Parametry wyznaczane metodą iteracyjnego minimalizowania NSK charakteryzują się najniższym obciążeniem. Nieznacznie wyższymi tylko obciążeniami charakteryzują się parametry modelu wyznaczanego poprzez uśrednienie trendów z okresów jednoimiennych oraz poprzez trend liczony na podstawie średnich z cyklu.

Tablica 2. Obciążenie oszacowania parametrów modelu

Metoda	WSK (1.1)	SC (1.2)	OPT (1.3)	ST (1.4)
		$\xi_{ti} \sim N(0, 10)$		
β_1	0,7139	0,0076	0,0048	0,0076
β_0	–7,2598	0,1558	–0,0260	–0,0482
S_1	0,0106	–0,0039	–0,0010	–0,0020
S_2	0,0094	–0,0032	0,0003	–0,0002
S_3	–0,0009	–0,0040	0,0001	0,0004
S_4	–0,0196	–0,0043	0,0005	0,0012
		$\xi_{ti} \sim N(0, 20)$		
β_1	0,7129	0,0060	0,0125	0,0060
β_0	–7,2856	0,1371	–0,1458	–0,0875
S_1	0,0049	–0,0091	–0,0036	–0,0067
S_2	0,0056	–0,0072	–0,0026	–0,0036
S_3	0,0023	–0,0011	0,0021	0,0041
S_4	–0,0142	0,0018	0,0041	0,0081

Źródło: Obliczenia własne.

Podobnie w przypadku wskaźników okresowości największym obciążeniem charakteryzowały się także wskaźniki wyznaczane metodą wskaźników, najniższymi wyznaczane metodą iteracyjną. Jednakże obciążenie nie jest w przypadku wskaźników sezonowości duże, poza metodą wskaźników nie przekracza 1% w stosunku do wielkości wskaźnika.

Podobne wnioski jak w przypadku obciążenia dotyczą błędu średniokwadratowego. Parametry funkcji trendu wyznaczane metodą wskaźników miały najwyższy błąd średniokwadratowy, co wynikało z ich dużego obciążenia. Najniższe błędy oszacowań parametrów funkcji trendu dawała metoda iteracyjna, jednak nieznacznie tylko wyższe są one w metodach SC i ST. Z kolei błędy w przypadku wskaźników okresowości są na porównywalnym poziomie we wszystkich metodach, nieznacznie tylko wyższe w metodzie wskaźników.

Tablica 3. RMSE oszacowania parametrów

Metoda	WSK (1.1)	SC (1.2)	OPT (1.3)	ST (1.4)
		$\xi_{ti} \sim N(0, 10)$		
β_1	0,8117	0,3935	0,3692	0,3935
β_0	8,5983	4,6772	4,5690	4,6935
S_1	0,0767	0,0746	0,0742	0,0750
S_2	0,0731	0,0711	0,0708	0,0717
S_3	0,0722	0,0712	0,0709	0,0718
S_4	0,0754	0,0747	0,0743	0,0753
		$\xi_{ti} \sim N(0, 20)$		
β_1	1,0516	0,7892	0,7467	0,7892
β_0	11,7840	9,4065	9,2426	9,4402
S_1	0,1556	0,1516	0,1497	0,1527
S_2	0,1508	0,1473	0,1453	0,1488
S_3	0,1455	0,1431	0,1420	0,1448
S_4	0,1475	0,1503	0,1489	0,1523

Źródło: Obliczenia własne.

Dla wszystkich przeprowadzonych symulacji metoda iteracyjna dawała najlepiej dopasowany model. W około 99,7% dla modelu z $\xi_{ti} \sim N(0, 10)$ i 91,5% dla modelu z $\xi_{ti} \sim N(0, 20)$ przypadków model oszacowany metodą wskaźników był najgorzej dopasowanym. Porównanie efektywności metod z wyznaczaniem trendu na podstawie średnich z cyklu i jako średniej z trendów okresów jednoimiennych wypada na korzyść tej drugiej, była ona efektywniejsza w ok. 70% przypadków dla $\xi_{ti} \sim N(0, 10)$ i 60% dla $\xi_{ti} \sim N(0, 20)$.

5. PRZYKŁADY EMPIRYCZNE

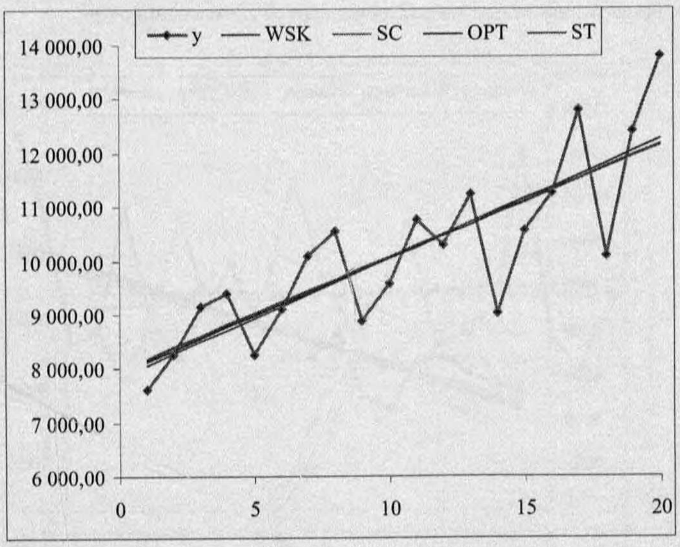
5.1. Dochody z podatku akcyzowego ogółem

W latach 2003–2007 dochody budżetu z podatku akcyzowego kształtowały się w granicach 7–14 mld zł kwartalnie. W okresie tym występowała stała tendencja wzrostowa oraz stosunkowo niewielkie wahania sezonowe, niższe wpływy były w pierwszej połowie roku, wyższe w drugiej. Na podstawie danych kwartalnych oszacowano modele trendu z sezonowością multiplikatywną. Wyniki zestawiono w tablicy 4.

Tablica 4. Zestawienie oszacowanych modeli dla przychodów z podatku akcyzowego w mln zł w latach 2003–2007

Model	β_1	β_0	S_1	S_2	S_3	S_4	R^2	S_e
WSK	220,7	7828,9	98,5%	92,5%	103,6%	105,5%	80,47%	816,0
SC	208,7	7955,5	98,3%	92,4%	103,5%	105,6%	80,63%	812,6
OPT	211,6	7915,9	100,1%	91,1%	103,0%	105,8%	81,16%	801,4
ST	208,7	7981,0	98,0%	92,1%	103,3%	105,3%	80,63%	812,7

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z www.stat.gov.pl



Wykres 2. Dochody z podatku akcyzowego ogółem

Źródło: Opracowanie własne.

Oszacowane modele nie różnią się między sobą w sposób znaczący, różnice w przypadku parametru R^2 nie przekraczają jednego punktu procentowego. W przypadku przeciętnego standardowego błędu szacunku wielkość błędu dla najlepszego modelu OPT jest o około 2% niższa od modelu WSK.

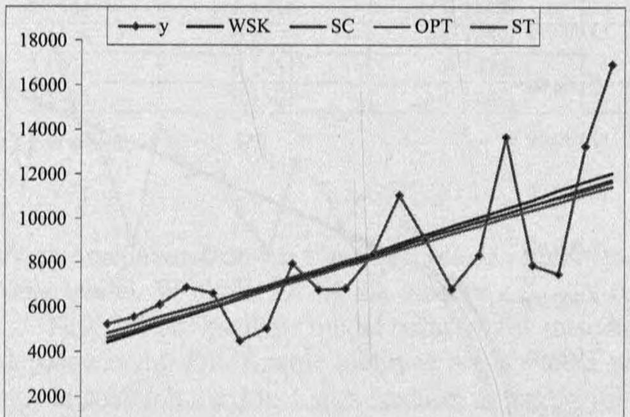
4.2. Liczba mieszkań na sprzedaż lub wynajem oddanych do użytkowania w latach 2003–2007

W latach 2003–2007 liczba mieszkań budowanych na wynajem prawie się podwoiła. W okresie tym w pierwszej połowie roku oddawano do użytkowania mniej mieszkań niż w drugiej, szczególny wzrost obserwowano w czwartym kwartale. Na podstawie danych kwartalnych oszacowano modele trendu z sezonowością multiplikatywną. Wyniki zestawiono w tablicy 5.

Tablica 5. Zestawienie oszacowanych modeli dla liczby mieszkań na sprzedaż lub wynajem oddanych do użytkowania w latach 2003–2007

Model	β_1	β_0	S_1	S_2	S_3	S_4	R^2	S_e
WSK	399,4	4043,4	97,8%	81,6%	97,6%	125,9%	84,57%	1462,8
SC	358,4	4473,2	95,5%	80,3%	97,0%	126,1%	85,23%	1431,5
OPT	386,0	4042,7	91,3%	76,3%	100,2%	132,3%	86,80%	1352,9
ST	358,4	4269,4	98,4%	82,6%	99,6%	129,3%	85,22%	1431,8

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z www.stat.gov.pl



Wykres 3. Liczba mieszkań na sprzedaż lub wynajem oddanych do użytkowania
Źródło: Opracowanie własne.

Oszacowane modele różnią się między sobą w większym stopniu niż w poprzednim przykładzie. Różnice w przypadku parametru R^2 wynoszą ponad dwa punkty procentowe. W przypadku przeciętnego standardowego błędu szacunku wielkość błędu prognozy dla najlepszego modelu OPT jest o około 7,5% niższa od modelu WSK.

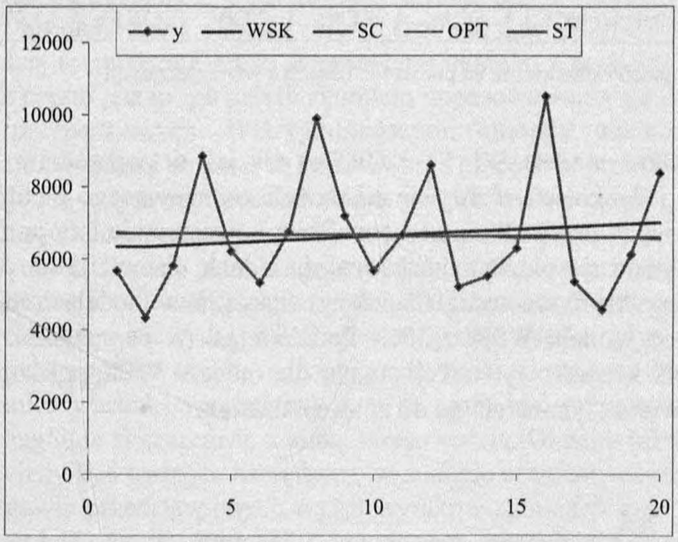
4.3. Liczba mieszkań spółdzielczych oddanych do użytkowania w latach 1996–2000

W latach 1996–2000 liczba mieszkań spółdzielczych nieznacznie się zmniejszyła. Najmniej mieszkań oddawano w drugich kwartałach, najwięcej w czwartych. Wyniki oszacowań modeli zestawiono w tablicy 6.

Tablica 6. Zestawienie oszacowanych modeli dla liczby mieszkań spółdzielczych oddanych do użytkowania w latach 1996–2000

Model	β_1	β_0	S_1	S_2	S_3	S_4	R^2	S_e
WSK	35,4	6263,3	90,0%	76,8%	94,9%	138,4%	84,03%	808,0
SC	-7,1	6709,5	88,9%	76,5%	95,1%	139,5%	86,20%	751,0
OPT	-7,5	6714,6	88,9%	76,5%	95,1%	139,5%	86,20%	751,0
ST	-7,1	6699,4	89,0%	76,7%	95,3%	139,8%	86,20%	751,0

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z www.stat.gov.pl



Wykres 4. Liczba mieszkań spółdzielczych oddanych do użytkowania
Źródło: Opracowanie własne.

Oszacowane modele SC, ST i OPT są praktycznie jednakowe i różnią się od modelu oszacowanego metodą wskaźnikową. Różnice w przypadku parametru R^2 wynoszą ponad dwa punkty procentowe. W przypadku przeciętnego standardowego błędu szacunku wielkość błędu prognozy jest o 7% niższa od modelu WSK. Warto też zwrócić uwagę na współczynnik kierunkowy funkcji trendu. W przypadku modelu WSK pokazuje on wzrost, podczas gdy zmiany roczne faktycznie wskazują na niewielki spadek.

4.4. Liczba mieszkań indywidualnych oddanych do użytkowania w latach 1991–1995

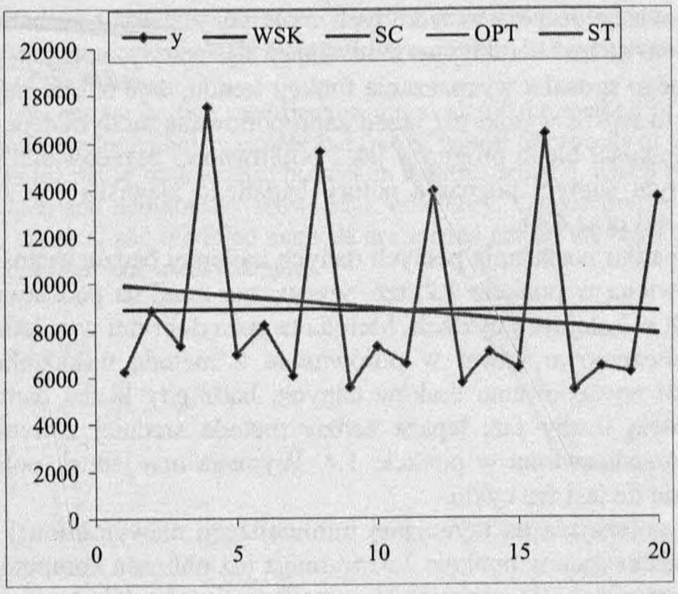
W latach 1991–1995 liczba mieszkań indywidualnych spadła z poziomu 40 tys. do niecałych 32 tys. Najmniej mieszkań oddawano w pierwszych i trzecich kwartałach, zdecydowanie najwięcej pod koniec roku. Wyniki oszacowań modeli zestawiono w tablicy 7.

Tablica 7. Zestawienie oszacowanych modeli dla liczby mieszkań indywidualnych oddanych do użytkowania w latach 1991–1995

Model	β_1	β_0	S_1	S_2	S_3	S_4	R^2	S_e
WSK	-5,8	8934,7	67,6%	85,3%	73,4%	173,7%	94,84%	1064,0
SC	–112,0	10049,3	66,4%	84,6%	74,0%	177,0%	97,47%	745,4
OPT	–108,0	10049,6	66,1%	84,7%	73,4%	175,8%	97,48%	744,1
ST	–112,0	10076,2	66,2%	84,3%	73,8%	176,5%	97,47%	745,3

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z www.stat.gov.pl

Oszacowane modele SC, ST i OPT są tak jak w poprzednim przykładzie praktycznie jednakowe i różnią się od modelu oszacowanego metodą wskaźnikową. Różnice w przypadku parametru R^2 wynoszą prawie trzy punkty procentowe, co wydaje się niezbyt dużą różnicą. Jednak dla wielkości przeciętnego standardowego błędu szacunku różnica jest znacząca, w modelach SC, ST i OPT jest niższa od modelu WSK o 30%. Podobnie jak w poprzednim przykładzie współczynnik kierunkowy funkcji trendu dla modelu WSK pokazuje fałszywy (zaniżony) wynik, tym razem co do natężenia zmian.



Wykres 5. Liczba mieszkań indywidualnych oddanych do użytkowania
Źródło: Opracowanie własne.

6. WNIOSKI

W analizie szeregów czasowych ważne jest nie tylko uzyskanie najlepiej dopasowanego do posiadanego zbioru danych modelu, ale istotne są także jego właściwości prognostyczne i możliwości interpretacyjne. Metody mechaniczne zazwyczaj dają teoretycznie lepiej dopasowane modele, z niższymi błędami *ex ante*. Jednak często jest to po prostu skutkiem dopasowywania się modelu także do wahań przypadkowych. Wiarygodniejszymi miarami wielkości błędów, w porównaniu z błędami *ex ante*, są oszacowania błędów *ex post*. W taksonomii często stosuje się w tym celu podział zbioru danych na dwie części, jedna służy do estymacji modelu, natomiast ocena jakości modelu odbywa się wyłącznie na podstawie drugiej. Trudno jednak adaptować te metody w przypadku krótkich szeregów czasowych. Ponadto w przypadku długiego horyzontu prognozy modele analityczne dają zazwyczaj bardziej wiarygodne wyniki, gdyż w metodach mechanicznych prognoza trendu opiera się zazwyczaj na wielokrotności różnicy dwóch ostatnich wartości wygładzonych, a to może być przyczyną znacznych błędów, szczególnie w szeregach z silną okresowością. Dlatego też metody analityczne powinny być ważnym narzędziem w analizie szeregów czasowych.

Na podstawie przedstawionych wyżej wyników symulacji oraz przykładów można stwierdzić, że w przypadku szacowania parametrów modelu zmian w czasie z występującą okresowością metoda wskaźników może nie być tą właściwą. Oczywiście dotyczy to tylko tych zjawisk, w których wahanie okresowe są stosunkowo duże. Niemniej po modyfikacji tej metody, polegającej na zastosowaniu innego sposobu wyznaczania funkcji trendu, daje ona co najmniej takie same a często lepsze wyniki niż przed zaproponowaną modyfikacją. Dotyczy to zarówno wielkości błędu prognozy jak i poprawności oszacowania parametrów modelu, a tym samym poznania natury badanego zjawiska (co zilustrowano w punktach 4.3 oraz 4.4).

W przypadku posiadania pełnych danych najlepiej będzie zastosować metodę przedstawioną w punkcie 1.2, tzn. wyznaczać trend na podstawie uśrednionych danych w kolejnych cyklach. Metoda ta poza dobrymi wynikami jest także prostsza obliczeniowo nawet w porównaniu z metodą wskaźników. Jednak w przypadku występowania braków danych, bądź gdy liczba danych nie jest wielokrotnością liczby faz, lepsza będzie metoda średniej z trendów jednoimiennych przedstawiona w punkcie 1.4. Wymaga ona jednak policzenia tylu funkcji trendu ile jest faz cyklu.

Metoda polegająca na iteracyjnej minimalizacji niewyjaśnionej sumy kwadratów przedstawiona w punkcie 1.3. wymaga już obliczeń komputerowych. Jej zaletą (w porównaniu do pozostałych metod) jest to, że daje lepsze pod względem dopasowania modele. Będzie ona przydatna szczególnie wtedy, gdy model trendu nie jest liniowy.

LITERATURA

Jóźwiak J., Podgórski S. (1992), *Statystyka od podstaw*, PWE, Warszawa.

Jurkiewicz T., Plenikowska-Ślusarz T. (2001), *Algorytmy optymalizacyjne w estymacji nieliniowych funkcji regresji*, Wiadomości Statystyczne, nr 10, s. 10–16.

Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U. (1999), *Statystyka. Elementy teorii i zadania*, Wyd. Akademii Ekonomicznej im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław.

Zając K. (1994), *Zarys metod statystycznych*, PWE, Warszawa.

Zeliaś A. (1979), *Teoria prognozy*, PWE, Warszawa.

Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. (2002), *Metody Statystyczne. Zadania i sprawdziany*, PWE, Warszawa.

Tomasz Jurkiewicz, Teresa Plenikowska-Ślusarz

ON ESTIMATES OF THE MODEL OF CHANGES OVER TIME WITH PERIODICAL COMPONENT

Among methods of time series analysis present in statistical packages, most of them are smoothing methods. Although they are efficient in many cases, especially in forecasting, they are unable of describing a model of changes over time. Many statistical textbooks present an analytical method of coefficients, which however is not an efficient

method of estimation the parameters of the model. Because of two separate stages of the estimation procedure, one can obtain false results, especially in the context of the proper interpretation of the model.

Authors concentrate on two modification proposals of the method of coefficients, which seem to be computationally simple and free of typical drawbacks of the method of coefficients. In the paper, authors also present an iterative method, which can be simply applied in Excel, and additionally shows high efficiency. Comparisons of results obtained by the classical and modified methods are carried out on the basis of simulation experiments and some empirical examples.