ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 177, 2004

*Marek Łażewski**, *Krzysztof Zator***

WYKORZYSTANIE METOD ANALITYCZNYCH DO WYZNACZANIA WIELOWYMIAROWYCH ALFA-STABILNYCH ROZKŁADÓW PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Streszczenie. α-stabilne rozkłady prawdopodobieństwa, będące uogólnieniem rozkładów normalnych, mają ważną cechę, nie posiadają skończonej wariancji, która utrudnia stosowanie klasycznego formalizmu matematyczno-statystycznego do wyznaczania w sposób jawny ich funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Miara zależności korelacyjnych nie może być w takim przypadku opisana za pomocą macierzy wariancji – kowariancji, która zostaje uogólniona przez pewną miarę probabilistyczną na sferze. Miara taka nazywana jest miarą spektralną. W przypadku wielowymiarowych rozkładów α-stabilnych fundamentalnym zagadnieniem jest ustalenie relacji pomiędzy miarą spektralną a odpowiadającą jej funkcją gęstości prawdopodobieństwa. W prezentowanym artykule zastosowano metody nieabelowej analizy harmonicznej do określenia miary spektralnej poprzez zastosowanie sferycznych szeregów Fouriera.

Słowa kluczowe: rozkłady α-stabilne, miara spektralna, sferyczne szeregi Fouriera.

1. WSTĘP

Rozkłady stabilne (w szczególności rozkłady Pareto-Levy'ego, będące głównym przedmiotem tej pracy) stanowią bogatą klasę rozkładów statystycznych zawierającą w sobie między innymi rozkłady normalne i Cauchego, są rozkładami opisującymi z dobrym dopasowaniem dobrze znane z badań empirycznych zjawiska znacznej skośności oraz „grubych ogonów". Klasa tych rozkładów została scharakteryzowana przez Levy'ego (1924), który badał znormalizowane sumy niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach. Rozkład jest stabilny (α-stabilny), jeżeli posiada następującą własność (Weron i Weron, 1998): suma niezależnych zmiennych a-stabilnych X_1 oraz X_2 (o takim samym indeksie stabilności α), przy dodatnich

*Mgr, asystent, Katedra Ekonometrii, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu.
**Mgr, TUiR WARTA SA, Biuro Strategii i Rozwoju Kapitałowego.

parametrach a, b, c i d, jest zmienną stabilną, a zatem rozkłady takie są stabilne względem operacji sumowania:

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d \tag{1}$$

gdzie symbol $\stackrel{d}{=}$ oznacza, że zmienne losowe po obydwu stronach równania (1) mają taki sam rozkład prawdopodobieństwa.

Istnieją trzy szczególne przypadki rozkładów α-stabilnych, dla których istnieją analityczne formy określające ich gęstość prawdopodobieństwa:

1. Rozkłady normalne, w których $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty \tag{2}$$

2. Rozkłady Cauchy'ego, w których $X \sim (\gamma, \delta)$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2}, \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty \tag{3}$$

3. Rozkłady Levy'ego, w których $X \sim (\gamma, \delta)$:

$$f(x) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\delta)}\right), \quad \text{gdzie} \quad \delta < x < \infty \tag{4}$$

2. JEDNOWYMIAROWY ROZKŁAD α – STABILNY

Z uwagi na to, że w innych przypadkach nie jest znana jawna postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa, przytoczymy inną definicję zmiennych, mających rozkłady stabilne w następującej postaci:

$$X_1 + \ldots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n \tag{5}$$

gdzie $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, o identycznych rozkładach. Wielkości c_n mogą przybierać wartości określone poprzez wyrażenie: $c_n = n^{1/\alpha}$ dla $\alpha \in (0, 2)$. Podana definicja nie umożliwia jeszcze parametryzacji rozkładów stabilnych. Możliwość taką daje dopiero zastosowanie w tym celu funkcji charakterystycznej (dla zmiennej losowej dyskretnej) lub też transformaty Fouriera (w przypadku zmiennej losowej typu ciągłego o gęstości f). Funkcją charakterystyczną $\varphi(t)$ zmiennej losowej X nazywamy wartość przeciętną funkcji e^{itx}, gdzie t jest zmienną rzeczywistą, a i – jednostką urojoną:

$$\bigwedge_{t \in R} \varphi(t) = E(\exp itX) \tag{6}$$

Zastosowanie funkcji charakterystycznej, zdefiniowanej poprzez wyrażenie (6), do definicji (5) α-stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa prowadzi do następującej postaci funkcji charakterystycznej:

$$Eexp(itX) = \exp\left(-|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta\left(tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cdot(signt)\right]\right), \quad \alpha \neq 1 \tag{7a}$$

$$Eexp(itX) = \exp\left(-|t|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(signt)\cdot\ln|t|\right]\right), \quad \alpha = 1 \tag{7b}$$

gdzie:

$$signt = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} t<0 \\ t=0 \\ t>0 \end{matrix} \tag{8}$$

Rozkłady stabilne są opisywane przez cztery parametry: wskaźnik stabilności $\alpha \in (0, 2)$, wskaźnik skośności $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, wskaźnik skali $\gamma > 0$ oraz wskaźnik charakteryzujący lokalizację $\delta \in R$. Jeżeli $\alpha = 2$, to zmienna losowa X ma rozkład normalny. W innych przypadkach, gdy $0 < \alpha < 2$, otrzymamy rozkład o ogonach istotnie grubszych niż w przypadku rozkładu normalnego. W sytuacji, gdy $\beta > 0$, rozkład jest skośny w prawo i odwrotnie, jeżeli $\beta < 0$. Parametr skali γ pełni analogiczną rolę, jak odchylenie standardowe w przypadku rozkładu normalnego. Parametr δ dla $\alpha > 1$ jest równy wartości oczekiwanej. W przypadku hipotezy o efektywności rynków kapitałowych, a w szczególności rynków akcji, przyjmuje się, że α zawsze powinien być równy 2. W hipotezie rynku fraktalnego zakłada się, że ten parametr może przyjmować wartości z przedziału od 0 do 2. Konsekwencją takiego założenia jest to, że rozkłady Pareto-Levy'ego cechują się samopodobieństwem względem czasu, tzn. są niezmiennicze względem skali (Peters, 1997).

Rozkłady Pareto-Levy'ego, dla $\alpha < 2$, mają wysokie wierzchołki i grube ogony, natomiast procesy stochastyczne oparte na tych rozkładach cechują się właściwością polegającą na wytwarzaniu trendów i cykli oraz skłonnością do gwałtownych i nieciągłych zmian (Peters, 1997), tzn. duże zmiany dokonują się poprzez małą liczbę dużych zmian. W rozkładach normalnych duże zmiany wywołane są wieloma małymi zmianami. W przypadku omawianych rozkładów wariancja (dla $1 \leqslant \alpha < 2$) – podstawowy miernik ryzyka w klasycznych teoriach rynków kapitałowych (w przeciwieństwie do wariancji rozkładu normalnego) – jest nieokreślona. Dalej przedstawimy dwa główne sposoby parametryzacji rozkładów α-stabilnych. W pierwszym z nich, zaproponowanym przez Samorodnitsky'ego i Taqqu'a (Samorodnitsky i Taqqu, 1994) funkcja charakterystyczna rozkładu Pareto-Levy'ego ma następującą postać:

$$Eexp(itX) = \exp\left(-\gamma^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta\left(\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\text{signt})\right] + i\delta_1 t\right), \quad \alpha \neq 1 \tag{9a}$$

$$Eexp(itX) = \exp\left(-\gamma|t|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(signt)\ln|t|\right] + i\delta_1 t\right), \quad \alpha = 1 \tag{9b}$$

jeżeli zmienna losowa X określona zależnością:

$$X \overset{d}{=} \begin{cases} \gamma Z + \delta_1 & \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + (\delta_1 + \beta\frac{2}{\pi}\gamma\ln\gamma & \alpha = 1 \end{cases} \tag{10}$$

w której $Z = Z(\alpha, \beta)$ określona jest przez wyrażenia (7a) i (7b).

Innym rodzajem parametryzacji jest propozycja Zolotareva (1995), w której $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$, tzn.

$$X \overset{d}{=} \begin{cases} \gamma\left(Z - \beta tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \delta & \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + \delta_0 & \alpha = 1 \end{cases} \tag{11}$$

Wtedy funkcja charakterystyczna rozkładu przybiera postać:

$$Eexp(itX) = \exp\left(-\gamma^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1 - i\beta\left(tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)(signt)\gamma|t|^{1-\alpha} - 1\right] + i\delta_0 t\right), \quad \alpha \neq 1 \tag{12a}$$

$$Eexp(itX) = \exp\left(-\gamma|t|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}(signt)\ln|t| + \ln\gamma\right] + i\delta_0 t\right), \quad \alpha = 1 \tag{12b}$$

Wartość tej reprezentacji polega na tym, że funkcja charakterystyczna – a co za tym idzie funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa – jest ciągła dla wszystkich wartości parametrów. Parametry α, β i γ mają takie same znaczenie dla obydwóch parametryzacji (7a–7b) oraz (12a–12b), przy czym związek między δ_1 i δ_0 jest następujący:

$$\delta_1 = \delta_0 - \beta\left(\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\gamma, \quad \text{jeżeli} \quad \alpha \neq 1 \tag{13}$$

oraz

$$\delta_1 = \delta_0 - \beta\frac{2}{\pi}\gamma\ln\gamma, \quad \text{jeżeli} \quad \alpha = 1 \tag{14}$$

Jeżeli $f(x|\alpha,\beta,\gamma,\delta_0)$ będzie gęstością funkcji $S(\alpha,\beta,\gamma,\delta_0;0)$, to rozkłady Pareto-Levy'ego charakteryzują się wtedy następującą własnością:

$$f(x|\alpha,-\beta,\gamma,\delta_0) = f(-x|\alpha,\beta,\gamma,-\delta_0) \tag{15}$$

Podstawowe właściwości rozkładów Pareto-Levy'ego zostały odkryte przez Samorodnitsky'ego i Taqqu'a[1] oraz Racheva i Mitnika, którzy zaprezentowali je w obszernej monografii (Rachev i Mitnik, 2000).

W celu estymacji parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego zaproponowano w ciągu ostatnich trzech dekad kilkanaście metod. Najwcześniej stosowana metoda szacowania parametru stabilności α polega na wykreśleniu empirycznej funkcji rozkładu w skali podwójnie logarytmicznej. Udowodniono, że[2]

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P(X > x) = c_\alpha(1+\beta)\gamma^\alpha \tag{16}$$

Ogon empirycznej funkcji rozkładu w skali podwójnie logarytmicznej powinien być zbliżony do linii prostej o nachyleniu α, jeżeli zmienna losowa ma rozkład α-stabilny. Główny problem polega jednak na tym, iż nieznana jest postać ogona Pareto. McCulloch pokazał (1997), że stosowanie uogólnionego modelu Pareto, sugerowanego przez DuMouchela (1983) lub też estymatora Hilla (1975), kiedy $1 < \alpha < 2$, prowadzi do przeszacowania tego parametru. Drugie podejście związane z estymacją parametrów rozkładów stabilnych zaproponowali Fama i Roll (1968), którzy skonstruowali tablice kwantyli symetrycznych rozkładów stabilnych, dla $\beta = 0$. McCulloch (1986) rozszerzył tę metodologię na przypadki niesymetryczne. Metodę estymacji parametrów rozkładów stabilnych, opartą na empirycznej funkcji charakterystycznej, zaproponował pierwszy Press (1972). Sposób ten był następnie modyfikowany m. in. przez Paulsona, Halcomba i Leitcha (1975), Feuervergera i McDunnougha (1981b) oraz Kogona i Williamsa (1998).

[1] Samorodnitsky i Taqqu (1994).
[2] Samorodnitsky i Taqqu (1994), s. 16.

W ostatnich latach, w przypadku rozkładów statystycznych, dla których nieznana jest analityczna postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa, zaproponowano metody estymacji parametrów oparte na metodzie największej wiarygodności. Jeżeli przyjmiemy sposób parametryzacji rozkładu stabilnego, opisanego wzorami (12a) i (12b), oraz jeśli oznaczymy przez $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta_0)$ wektor szacowanych parametrów, a przez $f(x|\vec{\theta})$ gęstość funkcji prawdopodobieństwa, to przestrzeń parametrów jest dana przez: $\Theta = (0,2] \cdot [-1,1] \cdot (0, \infty) \cdot (-\infty, \infty)$. Logarytm funkcji wiarygodności próby $X_1, ..., X_n$ jest dany przez wyrażenie:

$$l(\vec{\Theta}) = \sum_{i=1}^{n} \log f(X_i|\vec{\Theta}) \tag{17}$$

Nieznana jawna postać analityczna funkcji gęstości rozkładu Pareto-Levy'ego sprawia trudności techniczne związane z estymacją parametrów metodą największej wiarygodności na podstawie wzoru (17). Wiele pomocnych w tym zakresie właściwości gęstości rozkładów stabilnych przedstawił Zolotarev (1986). Badania DuMouchela pokazały, że kiedy $\vec{\Theta}_0$ przyjmuje wartość z przedziału określonego przez przestrzeń parametrów Θ, to estymator największej wiarygodności ma asymptotycznie rozkład normalny o wartości średniej $\vec{\Theta}_0$ oraz macierzy kowariancji określonej przez $n^{-1}B$, gdzie $B = (\mathrm{b}_{ij})$ jest odwróconą macierzą informacji Fishera I, którą można zapisać w postaci (DuMouchel 1973):

$$I_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \frac{1}{f} \, dx \tag{18}$$

Gdy $\vec{\Theta}$ znajduje się blisko granicy przestrzeni parametrów Θ, to dla próby o skończonej liczebności trudno precyzyjnie oszacować parametry, co stwarza komplikacje implementacyjne związane z tą metodą estymacji parametrów. Jedyne efektywne, w sensie czasu wykonywania obliczeń, algorytmy estymacji parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego opracowali i zaimplementowali numerycznie Brorsen i Yang (1990) oraz Nolan (1997), którzy wykorzystali w tym celu transformatę Fouriera. Istotną rolę w procesie estymacji parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego, w szczególności parametru stabilności α, ze względu na brak jawnej postaci ich funkcji gęstości prawdopodobieństwa, odgrywa dobór metody szacunku, która pozwoli na uzyskanie estymatorów stabilnych, niezależnych od liczebności próby. Estymatory największej wiarygodności – w przeciwieństwie do innych estymatorów – spełniają oczekiwania. Badania w tym zakresie przeprowadził Nolan, który przedstawił asymptotyczne wartości odchyleń standardowych szacunków parametrów α i β w zależności od ich położenia w dopuszczalnym przedziale zmienności. W miarę wzrostu wartości parametru α wartości szacunków jego błędu maleją, ale następuje bardzo istotny wzrost błędu szacunku parametru β[3].

3. WIELOWYMIAROWY α-STABILNY ROZKŁAD PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Wielowymiarowy α-stabilny rozkład prawdopodobieństwa jest całkowicie charakteryzowany przez parametr przesunięcia $\vec{\mu}$ (który, dla $\alpha > 1$, jest średnią rozkładu prawdopodobieństwa) oraz miarę spektralną Γ, miarę na sferze S^D, za pomocą której można opisać wielowymiarową strukturę korelacyjną rozkładu.

Niech $\alpha \in [0, 2)$ oraz jeśli ρ będzie dowolnie ustaloną α-stabilną miarą prawdopodobieństwa określona na sferze S^D, z centrum $\vec{\mu} \in R^D$ wtedy ρ ma transformatę Fouriera w postaci:

$$\chi[\vec{\xi}] = \exp\left(\Phi\left[\vec{\xi}\right]\right) \tag{19}$$

gdzie Φ jest dane przez:

$$\Theta[\vec{\xi}] = \left(\vec{\mu}, \vec{\xi}\right)i + \int_{S^{D-1}} \eta^{(\alpha)}\left(\vec{\xi}, s\right) d\Gamma[s] \tag{20}$$

w którym:

$$\eta^{(\alpha)}(\theta) = -|\theta|^{\alpha} - \Psi_{\alpha} \cdot \theta^{(\alpha)} i \tag{21}$$

natomiast

$$\theta^{(\alpha)} i = \begin{cases} sign(\theta) \cdot |\theta|^{\alpha} & \text{dla} \quad \alpha \neq 1 \\ \theta \cdot \log|\theta| & \text{dla} \quad \alpha = 1 \end{cases} \tag{22}$$

oraz

$$\Psi_{\alpha} = \begin{cases} tan\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{dla} \quad \alpha \neq 1 \\ -\dfrac{2}{\pi} & \text{dla} \quad \alpha = 1 \end{cases} \tag{23}$$

Γ jest dodatnio określoną miarą borelowską na sferze S^{D-1}

Problem estymacji wartości miary spektralnej Γ nie jest do dnia dzisiejszego jednoznacznie rozwiązany, tzn. nie istnieje spójny matematycznie analityczny

[3] Nolan (1997).

sposób, który pozwoliłby na efektywne jego stosowanie w sensie trwania procesu obliczeniowego. Jest to zagadnienie ważne z uwagi na to, że w przypadku wielowymiarowych rozkładów α-stabilnych, a w szczególności do ich zastosowań w analizie portfelowej, gdzie Γ pełni rolę miary ryzyka (jest odpowiednikiem wariancji w przypadku rozkładu normalnego).

Dotychczas zaproponowano w literaturze kilka algorytmów szacowania wartości miary Γ. W pierwszym z nich (Press, 1972) zaproponowano prosty sposób, bedący uogólnieniem metody zastosowanej w przypadku rozkładu jednowymiarowego dla rozkładów pseudonormalnych, dla których logarytm funkcji charakterystycznej ma postać:

$$\Phi_X\left[\vec{\xi}\right] = \left(\vec{\mu}, \vec{\xi}\right)i + \left(\vec{\xi}, \Omega\vec{\xi}\right)^{\alpha/2} \tag{24}$$

gdzie Ω jest symetryczną, dodatnią macierzą kowariancji. Jeżeli Ω ma jednostkowe wektory własne $\omega_1, \ldots, \omega_D$ z wartościami własnymi $\lambda_1, \ldots, \lambda_D$, wtedy miara spektralna takiego rozkładu jest określona poprzez wyrażenie:

$$\Gamma = \sum_{d=1}^{D} \lambda_d (\delta_{\omega_d} + \delta_{-\omega_d}) \tag{25}$$

Press zaproponował w celu rozwiązania problemu określenia składowych macierzy Ω empiryczną estymację logarytmu funkcji charakterystycznej, jako zbioru częstotliwości $\vec{\xi}_N$, gdzie $N = D(D+1)/2$, a następnie rozwiązanie odpowiedniego układu N równań liniowych. Press udowodnił, że podany wyżej sposób można uogólnić do sumy zmiennych pseudonormalnych:

$$\Phi_X\left[\vec{\xi}\right] = \left(\vec{\mu}, \vec{\xi}\right)i + \sum_{m=1}^{M} \left(\vec{\xi}, \Omega_M\vec{\xi}\right)^{\alpha/2} \tag{26}$$

w którym $\Omega_1, \ldots, \Omega_M$ są liniowo niezależnymi, symetrycznymi oraz dodatnio zdefiniowanymi macierzami.

Inny sposób został przedstawiony przez Racheva i Xina (1993). Mając n, d-wymiarowych obserwacji $R_{1t}, \ldots, R_{nt}$ wektora R, możemy jego składowe przedstawić we współrzędnych biegunowych w następujący sposób: $\rho = (R_{1t}, \ldots, R_{nt})$ oraz $\Theta = \theta(R) = (\theta_1(R), \ldots, \theta_n(R))$, przy czym $\theta_i(R)$ jest wektorem o $(d-1)$ elementach. W takim przypadku Γ może być estymowana poprzez:

$$\Gamma = \int_{\Omega_d} \xi(x, \vartheta)d\Phi_n(\vartheta) \tag{27}$$

gdzie:

$$x = (r\prod_{i=1}^{d-1} \sin\varphi_i,\ r\prod_{i=1}^{d-2} \sin\varphi_i \cos\varphi_{d-1},\ \dots,\ r\sin\varphi_1 \cos\varphi_2\, r\cos\varphi_1);$$

$$\xi(x, \vartheta) = |x|^{\alpha_n}\left|\cos\varphi_1 \cos\vartheta_1 + \sum_{i=2}^{d-1} \cos\varphi_i \cos\vartheta_i \prod_{k=1}^{i-1} \sin\varphi_k \sin\vartheta_k + \prod_{i=1}^{d-1} \sin\right.$$

$$\left.\varphi_i \ \sin\vartheta_i\right|^{\alpha_n};$$

$\Omega_d = [0, \pi]^{d-2} \cdot [0,2\pi];$

α_n – estymator indeksu α, który może być określony w sposób przedstawiony w (Rachev i Mittnik, 2000, s. 359);

$\Phi_n(\vartheta)$ – jest estymatorem funkcji rozkładu Γ na zbiorze Ω_d zdefiniowanym następująco:

$$\Phi_n(\vartheta) = \varphi_n(\vartheta)\Phi_n(\Pi),$$

gdzie: $\Pi = (\pi, \dots, \pi, 2\pi) \in \Omega_d$, $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-1})$, $\varphi_n(\vartheta) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} 1_{(\Theta_i \leq \vartheta, \rho_i \geq \rho(n|k))}$,

$\Phi_n(\Pi) = \frac{k}{n}\rho^{\alpha_n}_{(n-1)}$.

Główna idea tej metody oparta jest na twierdzeniu Araujo i Gine (1980), w którym zakłada się, że rozkład biegunowy zanika wolniej w kierunku tych współrzędnych, w których koncentruje się istotna większość częstotliwości spektralnych.

Trzecia metoda została opracowana przez Nolana i Panorską (1997), którzy zaproponowali dyskretną aproksymację miary spektralnej. Przy założeniu, że miara spektralna może być określona jako skończona suma skupień (ang. *atoms*) w postaci:

$$\Gamma = \sum_{s \in A} \gamma_a \delta_a \tag{28}$$

wtedy dla $\xi \in S^{D-1}$ funkcja $\eta_{\xi}^{(\alpha)}(s) = \eta^{(\alpha)}\left(\vec{\xi}, s\right)$ jest zredukowana do funkcji $\eta_{\xi}^{(\alpha)} : A \to C$.

Zbiór wszystkich dyskretnych miar, ograniczony na A, jest skończenie wymiarowym wektorem przestrzeni. Autorzy tej propozycji zaimplementowali ją dla przypadku dwuwymiarowego dla różnych rozkładów prawdopodobieństwa. Symulacje dla wymiarów wyższego rzędu nie były raportowane, prawdopodobnie ze względu na numeryczną złożoność obliczeniową.

4. ESTYMACJA MIARY SPEKTRALNEJ ZA POMOCĄ SFERYCZNEJ ANALIZY HARMONICZNEJ

W przypadku rozkładów α-stabilnych nie możemy mówić o klasycznej postaci funkcji korelacji czy kowariancji. Wzorem naszych poprzednich prac proponujemy rozważać raczej pojęcie alfa-kowariancji. Postać funkcji alfa-kowariancji D-wymiarowego rozkładu alfa-stabilnego w S^D jest określona poprzez arbitralnie wybraną miarę Γ zdefiniowaną na sferze S^{D-1}, spełniającą warunki miary borelowskiej Lebesgue' a. Nazywana jest ona miarą spektralną, choć niektórzy autorzy podnoszą, iż ta zbieżność nazwy z innymi wielkościami nazywanymi miarami spektralnymi – występującymi chociażby w algebrze Banacha czy teorii sygnałów – może być myląca. W rzeczywistości wielkość ta jest niepowiązana z innymi „miarami spektralnymi", a nazwa ta ma jedynie uzasadnienie historyczne, taką bowiem nomenklaturę przyjął definiujący tę wielkość Feldheim (1937). W przeważającej liczbie przypadków nie występuje ona w postaci jawnej, gdyż brak jest jawnej postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa prawie wszystkich rozkładów alfa-stabilnych. Ponadto, jak wykazały m. in. badania Samorodnitskiego i Taqqu'a dla wielowymiarowego rozkładu alfa-stabilnego o D zmiennych niezależnych, nie jest możliwe zbudowanie skończenie wymiarowej macierzy alfa-kowariancji, która byłaby analogiem macierzy kowariancji o wymiarach $D \times D$ dla rozkładu normalnego ($\alpha = 2$). Estymacja miary spektralnej wielowymiarowego rozkładu alfa-stabilnego należy do zadań o wysokiej złożoności. Wcześniej podejmowane próby estymacji miary spektralnej Γ ograniczały się do rozkładów jednej lub dwóch zmiennych. We wspomnianych pracach proponowano algorytmy ogólniejsze (dla dowolnej wartości D) jednak możliwość ich praktycznego wykorzystania, ze względu na szybko rosnącą wraz z wymiarem problemu złożoność obliczeniową, była minimalna, w przypadkach zaś znacznego uproszczenia postaci estymatora mieliśmy do czynienia ze słabym jego dopasowaniem.

Nową propozycję estymacji interesującej nas miary spektralnej stanowi praca Pivato (2002). Oparta jest na szeroko stosowanej w naukach ścisłych: geofizyce, fizyce i chemii molekularnej, analizie sygnałów, optyce, metodzie rozwiązywania wielowymiarowych złożonych równań dynamicznych poprzez uogólnioną analizę fourierowską, znaną w literaturze pod nazwą sferycznej analizy harmonicznej.

4.1. Sferyczna analiza harmoniczna

Zdefiniujmy na $\Re^3$, $\{(x, y, z): x, x, z \in \Re\}$ operator następującej postaci:

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2} \tag{29}$$

jest to klasyczny Laplasjan. Przechodząc do współrzędnych sferycznych

$$\{(r, \theta, \varphi): r \in \Re_+, \ \theta \in [0, 2\pi), \ \varphi \in [0, \pi)\} \tag{30}$$

gdzie:

$x = r \cos\theta \sin\varphi$,

$y = r \sin\theta \sin\varphi$,

$z = r \cos\varphi$,

otrzymujemy postać operatora:

$$\Delta_3 = \csc^2\varphi \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \cot\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + 2r\frac{\partial}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} \tag{31}$$

wielomian n-tego stopnia $\rho_n(x, y, z)$ wyrażony we współrzędnych sferycznych ma postać: $r^n, q_n(\theta, \varphi)$. Poszukując funkcji własnych operatora zapiszemy:

$$0 = \Delta_3\rho_n = \left[\csc^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \cot\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] r^n q_n(\theta, \varphi) + 2rnr^{n-1}q_n(\theta, \varphi) + \\ + r^2 n(n-1)r^{n-2}q_n(\theta, \varphi)$$

Definiując nowy operator, nazwijmy go Laplasjanem sferycznym, Δ_{3S} jako wyrażenie

$$\csc^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \cot\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{32}$$

otrzymujemy:

$$\Delta_{3S}q_n(\theta, \varphi) = -n(n-1)q_n(\theta, \varphi) \tag{33}$$

gdzie q_n jest funkcją własną tego operatora. Każda funkcja tej postaci, spełniająca równanie (33), nazywana jest harmoniką sferyczną. Fakt, że operator ten jest grupą abelową, implikuje, iż możemy zdefiniować ortogonalną przestrzeń Δ_n o wymiarze $2n + 1$, składającą się ze wszystkich homogenicznych wielomianów stopnia n możliwych do „wygenerowania" na sferze $n-1$ wymiarowej. Dla ustalonego n jedną z możliwych postaci Δ_n jest:

$$\{P_n^m(\cos\varphi)e^{im\theta}/\sqrt{2\pi}\}_{-n\leq m\leq n} \tag{34}$$

podstawiając do $\Delta_{3S}q_n(\theta,\varphi) = -n(n-1)q_n(\theta,\varphi)$, $q_n = P_n^m(\cos\varphi)e^{im\theta}/\sqrt{2\pi}$ oraz nakładając warunek: $P_n^m(1) \neq \pm\infty$, otrzymujemy równanie różniczkowe identyfikujące tzw. skojarzone funkcje Legendre'a (pierwszego rodzaju) stopnia n i rzędu m. Skojarzone funkcje Legendre'a stanowią uogólnioną postać wielomianów Legendre'a, dla n i m niecałkowitych. Jedną z postaci wielomianów Legendra jest:

$$P_n(\zeta) = \frac{(-1)^n d^n}{2^n n!\, d\zeta^n}(1-\zeta^2)^n \tag{35}$$

W odróżnieniu od powszechnie znanych szeregów Taylora należą one do klasy wielomianów ortogonalnych, co zapewnia spełnienie następujących tożsamości:

$$\int_{-1}^{1} P_i(\zeta)P_j(\zeta)\,d\zeta = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \pi/2 & (i = j \neq 0) \\ \pi & (i = j = 0) \end{cases} \tag{36}$$

Pierwsze pięć wielomianów Legendra rzędu pierwszego ma postać:

$$P_0(\zeta) = 1$$

$$P_1(\zeta) = \zeta$$

$$P_2(\zeta) = \frac{1}{2}(3\zeta^2 - 1)$$

$$P_3(\zeta) = \frac{1}{2}(5\zeta^3 - 3\zeta)$$

$$P_4(\zeta) = \frac{1}{8}(35\zeta^4 - 30\zeta^2 + 3)$$

Do wyliczenia kolejnych wielomianów można użyć następującego wzoru rekurencyjnego:

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x)\frac{n}{n+1}(xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)) \tag{37}$$

Skojarzone funkcje Legendre'a definiuje się w następującej postaci wielomianowej:

$$P_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \tag{38}$$

gdzie: $P_n(x)$ zdefiniowane jest jak we wzorze (37).

Jak wynika z twierdzenia Steina-Weissa (1971), każdy wielomian stopnia n, określony na sferze, może być wyrażony jako suma homogenicznych wielomianów sferycznych (harmonik sferycznych) co najwyżej stopnia n. Konstrukcja ta, stosowana powszechnie jako analiza fourierowska (dla $n = 2$), może być rozszerzona na sferę o dowolnym rozmiarze. Mamy wówczas zdefiniowaną następującą postać harmonicznych sferycznych:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = X_n^m(\theta)e^{im\varphi} \tag{39}$$

gdzie:

$$X_n^m(\theta) = (-1)^m\left[\frac{2n+1(n-m)!}{4\pi(n+m)!}\right]^{1/2} P_n^m(\cos\theta) \tag{40}$$

w którym $P_n^m(\cos\theta)$, to oczywiście skojarzona funkcja Legendre'a, a kąty θ, φ stanowią odpowiedniki szerokości i długości na sferze S^2.

4.2. Estymacja miary spektralnej za pomocą sferycznej analizy harmonicznej

Załóżmy dla uproszczenia, że dany rozkład α-stabilny jest centryczny ($\mu = 0$) oraz przyporządkujmy mu funkcję $g: S^{D-1} \to C$ nazywaną sferyczną funkcją log-charakterystyczną, która w odróżnieniu od naturalnej funkcji log-charakterystycznej Φ jest ograniczona do sfery S^{D-1}. Wówczas dla wszystkich $\xi \in S^{D-1}$ mamy:

$$g(\xi) = \int_{S^{D-1}}\eta^{(\alpha)}(\xi, s)\,d\Gamma[s] \tag{41}$$

gdzie:

$$\eta^{(\alpha)}(\theta) := -\theta^\alpha - \Psi_\alpha \cdot \theta^{(\alpha)}i,$$

$$\theta^{(\alpha)} := \begin{Bmatrix} \operatorname{sign}(\theta)\cdot|\theta|^\alpha & \text{dla} & \alpha \neq 1 \\ \theta\cdot\log|\theta|^\alpha & \text{dla} & \alpha = 1 \end{Bmatrix},$$

$$\Psi_\alpha := \begin{Bmatrix} tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{dla} & \alpha \neq 1 \\ \frac{-2}{\pi} & \text{dla} & \alpha = 1 \end{Bmatrix}$$

Γ – nieujemna miara borelowska określona na S^{D-1}.

Ponieważ wartości funkcji g można łatwo estymować z danych eksperymentalnych poprzez odpowiednie próbkowanie na sferze S^{D-1}, zatem jedynym problemem pozostaje „wydobycie" z estymatora funkcji g jawnej postaci miary Γ. Upraszczając nieco notację i dopuszczając pewną nieścisłość zapisu, możemy zapisać, że, $g = \eta^{(\alpha)} \cdot \Gamma$, czyli że funkcja g jest splotem będących po prawej stronie równania wielkości, a więc:

$$\eta^{(\alpha)} \cdot \Gamma(\vec{\xi}) = \int_{S^{D-1}} \eta^{(\alpha)}\left(\vec{\xi}, s^{-1}\right) d\Gamma[s] \tag{42}$$

Poza wymiarami $D = 2$ oraz $D = 4$ S^{D-1} nie jest grupą topologiczną i stąd funkcja splotu nie jest dobrze zdefiniowana, wtedy S^{D-1} powinniśmy traktować jako homogeniczną rozmaitość rożniczkową pod działaniem $SO^D(R)$ oraz zdefiniować w ogólniejszy sposób funkcję splotu w kategoriach grupy działań. Wyrażenie funkcji na sferze S^{D-1} poprzez ortonormalną bazę dla L^2 (S^{D-1}) jest analogiczne, jak w przypadku klasycznej analizy harmonicznej z bazą L^2 (S^1) i nazywane jest sferyczną transformatą Fouriera. Funkcja $f \in L^2$ (S^{D-1}) nosi nazwę zonalnej, jeżeli jest rotacyjnie niezmiennicza względem poszczególnych osi układu współrzędnych. Stąd każdą dowolną funkcję f można wyrazić za pomocą splotu funkcji zonalnych i splot ten można przedstawić w postaci złożenia odpowiednich sferycznych transformat Fouriera. Chcąc uzyskać postać funkcji f będącej splotem funkcji zonalnych, wystarczy podzielić sferyczną transformatę Fouriera przez odpowiednią funkcję zonalną (wchodzącą w skład splotu).

5. PODSUMOWANIE

Przedstawiona w artykule propozycja sposobu estymacji – w sposób analityczny – parametrów wielowymiarowych α-stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa pozwala poprzez liniową kombinację harmonik sferycznych na reprezentację miary spektralnej Γ jako ciągłego zbioru sferze S^{D-1}. Sytuacja taka umożliwia precyzyjniejsze i szybsze szacowanie tej miary w porównaniu z metodami opisanymi w 3 części opracowania. Zamiarem autorów jest zaimplementowanie numeryczne opisanych procedur w celu efektywnego ich wykorzystania do określania tak określonego ryzyka oraz użycia go w analizie portfelowej.

LITERATURA

Araujo A., Gine E. (1980), *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables*, Wiley, New York.

Brorsen W.B., Yang S.R. (1990), *Maximum Likelihood Estimation of Symmetric Stable Distribution Parameters*, Communications in Statistics-Simulation, 19(4).

DuMouchel W.H. (1973), *Stable Distributions in Statistical Inference. 1: Symmetric Stable Distributions Compared to Other Symmetric Longtailed Distributions*, „Journal of the American Statistical Association", 68.

DuMouchel W.H. (1983), *Estimating the Stable Index in Order to Measure Tail Thickness: A Critique*, „Annual of Statistics", 11.

Fama E.F., Roll R. (1968), *Some Properties of Symmetric Stable Distributions*, „Journal of the American Statistical Association", 63.

Feldheim E. (1937), *Etuda de la stabilte des lois probabilitie*, PhD thesis, These de la Faculte des Sciences de Paris.

Feuerverger A., McDunnough P. (1981), *On Effcient Inference in Symmetric Stable Laws and Processes*, [w:] Csrgo M., Dawson D.A., Rao N.J.K., Saleh A.K. (eds), *Statistics and Related Topics*.

Hill B.M. (1975), *A Simple General Approach to Inference About the Tail of Distribution*, „Annual of Statistics", 3.

Kogon S.M., Williams D.B., (1998), *Characteristics Function Based Estimation of Stable Parameters*, [w:] Adler R., Feldman R., Taqqu M. (eds) *A Practical Guide to Heavy Tailed Data*, Birkhauser, Boston.

Levy P. (1924), *Theorie des erreurs la loi de Gauss et les exceptionelles*, „Bulletin de la Societe de France", 52.

McCulloch J.H. (1986), *Simple Consistent Estimators of Stable Distributions Parameters*, „Common, Statistice Simulation", 15.

McCulloch J.H. (1997), *Measuring Tail Thickness to Estimate the Stable Index Alpha: A Critique*, „Journal of Business and Economic Statistics", 15.

Nolan J.P. (1997). *Numerical Computation of Stable Densities and Distributions Functions*, „Communications in Statistics. Stochastic Models", 13(4).

Nolan J.P., Panorska A.K. (1997), *Data Analysis for Heavy Tailed Multivariate Samples*, „Communications in Statistics: Stochastic Models", 13(4).

Paulson A.S., Holcomb E.W., Leitch R. (1975), *The Estimation of the Parameters of the Stable Laws*, „Biometrika", 62.

Peters E.E., (1997) *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa.

Pivato M. (2002), *Analytical Methods for Multivariate Stable Probabilty Distributions*, PhD thesis, University of Toronto.

Press S.J. (1972), *Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions*, „Journal of the American Statistical Association", 67.

Rachev S., Mittnik S., (2000), *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley, New York.

Rachev S.T., Xin H. (1993), *Test on Association of Random Variables in the Domain of Attraction of Multivariate Stable Law*, „Probabilitys and Mathematical Statistics", 14.

Samorodnitsky G., Taqqu M.S., (1994), *Stable Non- Gausian Random Processes*, Chapman and Hall, New York.

Stein E., Weiss G. (1971), *Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton.

Weron A., Weron R. (1998), *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa.

Zolotarev V.M. (1995), *On Representation of Densities of Stable Laws by Special Functions*, „Theory of Probability and Its Application", 39.

Marek Łażewski, Krzysztof Zator

ANALITICAL METHODS FOR MULTIVARIATE α-STABLE DISTRIBUTIONS USING SPHERICAL HARMONICS

Summary

In this paper we study the relationship between multivariate α-stable probability distributions and their spectral measure. Analitical method based on nonabelian harmonic analysis is used to express the spectral measure using spherical harmonics on the sphere.