

*Marcin Stamirowski**

JEDNOCZYNNIKOWE MODELE STOPY PROCENTOWEJ – OCENA PRZYDATNOŚCI DO CELÓW WYCENY ORAZ ANALIZY OCZEKIWAŃ INWESTORÓW

Streszczenie. Tematem artykułu jest analiza modeli stopy procentowej: Vasička (1977) oraz Coxa, Ingersolla i Rossa (1985). Parametry procesu chwilowej stopy procentowej zostały oszacowane na podstawie szeregu czasowego stopy krótkoterminowej. Rynkowa cena ryzyka została wyznaczona drogą dopasowania teoretycznych cen obligacji do krzywej zerokuponowej. Wyniki analizy prowadzą do następujących wniosków: (1) modele nie wydają się przydatne do celów wyceny obligacji skarbowych na rynku polskim; (2) użyteczną własnością modeli jest łatwa konstrukcja rozkładów stóp krótkoterminowych, interpretowanych w kategoriach prognoz warunkowych, nie zaś oczekiwań inwestorów; (3) analiza zmian rynkowych cen ryzyka obu modeli pozwala na identyfikację okresów, które cechowała wzmożona lub obniżona awersja do ryzyka inwestorów.

Słowa kluczowe: Terminowa struktura stóp procentowych, modele jednoczynnikowe.

1. WPROWADZENIE

Celem niniejszego opracowania jest analiza jednoczynnikowych wersji modeli Vasička oraz Coxa, Ingersolla i Rossa (dalej w tekście CIR) pod kątem ich użyteczności do zastosowań empirycznych. Przedmiotem badania jest przydatność modeli do uzyskiwania informacji na temat oczekiwań inwestorów, dotyczących stóp procentowych, jak również stopnia ich awersji do ryzyka. Badania zostały dokonane przy wykorzystaniu danych z krajowego rynku obligacji skarbowych.

Określone własności modeli, będących przedmiotem niniejszej analizy, są atrakcyjne pod kątem praktycznych zastosowań. Należy do nich zaliczyć

*Mgr, asystent, Katedra Skarbowości, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie oraz Departament Systemu Finansowego, Narodowy Bank Polski. Autor pragnie wyrazić podziękowanie Pawłowi Przesmyckiemu z Departamentu Systemu Finansowego NBP za pomoc w uzyskaniu danych.

przede wszystkim intuicyjną interpretację procesu krótkoterminowej stopy procentowej, który wykazuje własność „powrotu do średniej”. Inną interesującą cechą są znane analityczne postaci wynikowych rozkładów stóp procentowych. Własność ta nie tylko wydatnie ułatwia estymację parametrów modeli, ale również umożliwia dokonywanie prognoz krótkoterminowych stóp procentowych. Ponadto oba modele umożliwiają estymację rynkowej ceny ryzyka.

Układ opracowania jest następujący. W części drugiej zostały przybliżone podstawowe założenia teoretyczne oraz własności modeli. Część trzecia obejmuje zagadnienia związane z empiryczną analizą modeli. Omówiono dane wykorzystane do estymacji modeli, jak również przedstawiono wyniki oszacowań. Ponadto dokonano prognoz wynikowych krótkoterminowych stóp procentowych drogą konstrukcji rozkładów prawdopodobieństwa. Złamanie założenia o stałości w czasie parametrów pozwoliło na dokonanie analizy ewolucji rynkowej ceny ryzyka w kontekście wydarzeń na krajowym rynku obligacji. W części czwartej znajduje się podsumowanie analizy.

2. WŁASNOŚCI MODELI VASIČKA ORAZ CIR

2.1. Model Vasička

2.1.1. Własności procesu krótkoterminowej stopy procentowej

Model Vasička (1977) był pierwszym arbitrażowym modelem terminowej struktury stóp procentowych. Strukturę terminową w modelu Vasička opisuje jednowymiarowy proces tzw. chwilowej stopy procentowej. Proces ten w rzeczywistej mierze prawdopodobieństwa¹ przedstawia następujące stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dZ \quad (1)$$

Parametry a , b oraz σ są stałe. Przy założeniu $T \geq t$ rozwiązanie równania (1) ma postać:

¹ Miara prawdopodobieństwa jest pojęciem z zakresu probabilistyki. Koncepcje miary rzeczywistej (fizycznej) oraz neutralnej względem ryzyka stoją u podstaw tzw. martyngałowej teorii wyceny instrumentów finansowych. Najogólniej, wartość instrumentu finansowego jest równa zdyskontowanej oczekiwanej wartości wypłaty, związanej z tym instrumentem, wyznaczonej w mierze prawdopodobieństwa neutralnej względem ryzyka. Obszerne omówienie martyngałowej teorii wyceny można znaleźć m. in. w: Duffie (2001).

$$r_t = b + (r_t - b)e^{-a(T-t)} + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dZ_s \quad (2)$$

Gęstość warunkowa procesu w mierze rzeczywistej jest funkcją gaussowską:

$$\rho(r_T | r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V[r_T | r_t]}} \exp \left\{ -\frac{(r_T - E[r_T | r_t])^2}{2V[r_T | r_t]} \right\} \quad (3)$$

o warunkowym rozkładzie normalnym, o średniej i wariancji odpowiednio:

$$E[r_T | r_t] = b + e^{-a(T-t)}(r_t - b) \quad (4)$$

$$V[r_T | r_t] = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2a(T-t)}]$$

Rynkowa cena ryzyka w modelu Vasička jest stałym parametrem:

$$\lambda(r, t) = \lambda \quad (5)$$

Dostosowanie procesu (1) do miary prawdopodobieństwa neutralnej względem ryzyka następuje poprzez przekształcenie parametru b , określającego „średni”, długoterminowy poziom stopy procentowej:

$$b^* = b - \frac{\sigma\lambda}{a} \quad (6)$$

Parametry a oraz σ pozostają niezmiennione. Gęstość warunkowa procesu w mierze neutralnej względem ryzyka jest identyczna ze wzorem (3), przy uwzględnieniu przekształcenia (6).

2.1.2. Cena obligacji zerokuponowej

Cena obligacji zerokuponowej w modelu Vasička jest funkcją chwilowej stopy procentowej r , czasu kalendarzowego t oraz terminu zapadalności T ; $P = P(r, t, T)$. Opisuje ją następująca analityczna formuła:

$$P(r, t, T) = B(t, T)e^{-rA(t, T)} \quad (7)$$

przy czym $A(t, T)$ oraz $B(t, T)$ są funkcjami parametrów a , b , σ oraz λ^2 .

² Szczegółową postać równania (7) znaleźć można w: Vasiček (1977).

Formułę (7) można zastosować pod warunkiem znajomości parametrów procesu chwilowej stopy procentowej w mierze neutralnej względem ryzyka: a , b , σ oraz λ . Problem estymacji parametrów zostanie omówiony w dalszej części opracowania.

2.2. Model CIR

2.2.1. Własności procesu krótkoterminowej stopy procentowej

W odróżnieniu od modelu Vasička, opartego na założeniu braku arbitrażu, u podstaw modelu CIR (1985) leży paradygmat równowagi ogólnej. Mimo odmiennych założeń teoretycznych, proces chwilowej stopy procentowej w modelu CIR różni się (pozornie) nieznacznie od analogicznego procesu w modelu Vasička. Proces chwilowej stopy procentowej w modelu CIR jest opisany stochastycznym równaniem różniczkowym postaci:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dZ \quad (8)$$

Podobnie jak ma to miejsce w modelu Vasička, parametry a , b oraz σ są stałe. Czynnikiem istotnie różniącym model CIR od modelu Vasička jest fakt, iż wariancja procesu stopy procentowej jest zależna od poziomu r . Cecha ta pozwala na uchwycenie często obserwowanej dodatniej zależności pomiędzy poziomem stóp procentowych a ich zmiennością. Stochastyczny proces, opisany równaniem (8), jest znany jako proces Feller'a. Przy założeniu $T \geq t$ rozwiązanie (8) ma postać:

$$r_T = b + (r_t - b)e^{-a(T-t)} + \sigma e^{-a(T-t)} \int_t^T e^{a(s-t)} \sqrt{r_s} dZ_s \quad (9)$$

$$E[r_T | r_t] = b + e^{-a(T-t)}(r_t - b) \quad (10)$$

$$V[r_T | r_t] = r_t \frac{\delta^2}{a} [e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)}] + b \frac{\delta^2}{2a} [1 - e^{-a(T-t)}]^2$$

Gęstość warunkowa procesu w mierze rzeczywistej jest postaci:

$$\rho(r_T | r_t) = ce^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{uv}) \quad (11)$$

gdzie:

$$c = \frac{2a}{\{\sigma^2[1 - e^{-a(T-t)}]\}},$$

$$u = cr_t e^{-a(T-t)},$$

$$v = cr_T,$$

$$q = \left(\frac{2ab}{\sigma^2}\right) - 1,$$

przy czym I_q oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu q . Rozkład warunkowy³ jest postaci χ^2 (rozkład niecentrowany) o $2q + 2$ stopniach swobody oraz parametrze mierzącym „niecentralność” rozkładu równym $2u$:

$$F(r_T | r_t) \sim \chi^2[2cr(T); 2q + 2; 2u] \quad (12)$$

Konsekwencją założenia dodatniej korelacji pomiędzy poziomem stopy procentowej a jej zmiennością jest fakt, iż rynkowa cena ryzyka – w odróżnieniu od modelu Vasička – również jest funkcją stopy procentowej:

$$\lambda(r, t) = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{r} \quad (13)$$

przy czym λ jest stałym parametrem.

Dostosowanie procesu (8) do procesu w mierze neutralnej względem ryzyka następuje drogą przekształcenia zarówno współczynnika wyznaczającego średni poziom stopy, jak i parametru odpowiedzialnego za szybkość powrotu do średniej. W szczególności:

$$a^* = a + \lambda \quad (14)$$

$$b^* = \frac{ab}{a + \lambda}$$

Gęstość warunkowa procesu w mierze neutralnej względem ryzyka ma postać identyczną z równaniem (11), z tym, że do jej wyznaczenia są wykorzystane parametry procesu przekształcone zgodnie z równaniami (14).

³ Zob.: James i Webber (2000), s. 506.

2.2.2. Cena obligacji zerokuponowej

Model CIR, podobnie jak model Vasička, opisuje w postaci analitycznej formuły cenę obligacji zerokuponowej w zależności od poziomu krótkoterminowej stopy procentowej, czasu kalendarzowego oraz terminu zapadalności obligacji:

$$P(r, t, T) = B(t, T)e^{-rA(t, T)} \quad (15)$$

przy czym $A(t, T)$ oraz $B(t, T)$ są funkcjami parametrów a , b , σ oraz λ^4 .

3. ANALIZA EMPIRYCZNA

3.1. Szereg czasowy krótkoterminowej stopy procentowej

Do estymacji parametrów procesu krótkookresowej stopy procentowej wykorzystano dane z krajowego rynku obligacji. W szczególności, skonstruowano szereg czasowy syntetycznych stóp krótkoterminowych rynku obligacji, wykorzystując w tym celu dzienne oszacowania zerokuponowej krzywej dochodowości⁵. Do wyznaczenia szeregu przyjęto okres trwania równy jednemu dniu, wyrażonemu jako ułamek roku, $\tau = 1/250^6$. Skonstruowany zbiór danych można zatem interpretować jako szereg implikowanych stóp *overnight* (O/N), wyznaczonych dla rynku obligacji skarbowych. Rysunek 1 prezentuje oszacowania zerokuponowej krzywej dochodowości w analizowanym okresie, natomiast rysunek 2 przedstawia szereg czasowy stóp *overnight* rynku pieniężnego oraz szereg syntetycznych stóp krótkoterminowych rynku obligacji.

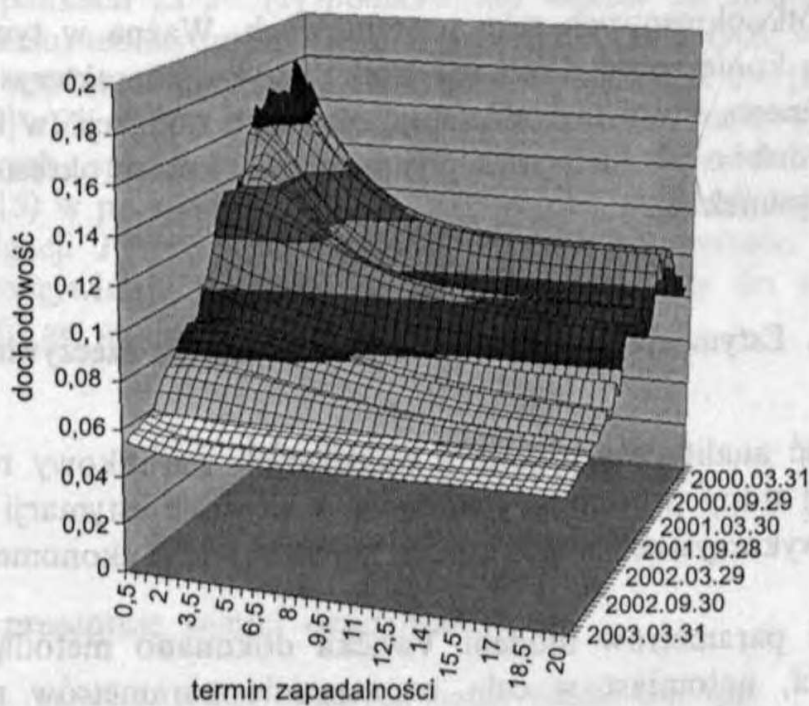
Zbiór danych, stosowany w niniejszym badaniu, różni się od szeregów zwykle wykorzystywanych w pokrewnych badaniach⁷. Należy jednak podkreślić, iż celem niniejszego opracowania jest ocena przydatności modeli

⁴ Szczegółową postać równania (7) można znaleźć w: Cox, Ingersoll i Ross (1985).

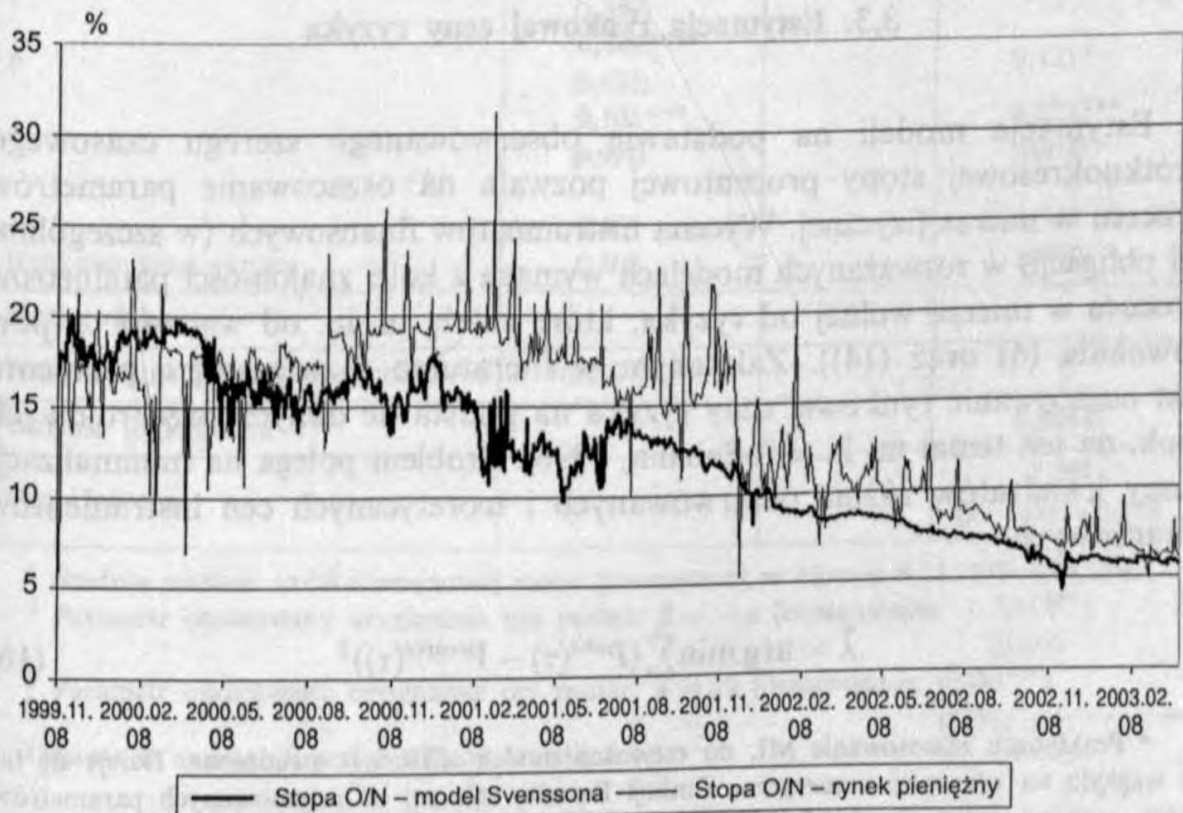
⁵ Na podstawie modelu Svenssona (1994).

⁶ Przyjęto założenie, że rok ma 250 dni roboczych.

⁷ W badaniu autorstwa Chana, Karolyiego, Longstaffa i Sandersa (1992) posłużono się stopami dochodowości 1-miesięcznych bonów skarbowych. Hördaahl (2000) do estymacji parametrów procesu zmienności w modelu Longstaffa-Schwartz wykorzystuje dane dotyczące 3-miesięcznych bonów skarbowych na rynku szwedzkim. W badaniu autorstwa Szczepaniaka (2002) przedmiotem analizy są stopy depozytów *overnight* na krajowym rynku pieniężnym.



Rys. 1. Model Svenssona – ewolucja krzywych zerokuponowych (listopad 1999 – marzec 2003)



Rys. 2. Stopa O/N rynku pieniężnego oraz wynikowa stopa O/N na podstawie modelu Svenssona

stóp procentowych do analizy rynku obligacji, nie zaś badanie dynamicznych własności krótkookresowych stóp procentowych. Ważna w tym kontekście jest zwłaszcza konieczność eliminacji źródeł ryzyka, charakterystycznych dla rynku pieniężnego, które nie oddziałują na rynek obligacji (w szczególności okresowy niedobór lub nadwyżka płynności pod koniec okresu rozliczeniowego, zob. rysunek 2).

3.2. Estymacja parametrów modeli w mierze rzeczywistej

Znajomość analitycznych formuł opisujących warunkowy rozkład krótkoterminowej stopy procentowej pozwala w procesie estymacji parametrów obu modeli wykorzystać jedną z metod stosowanych w ekonometrii szeregów czasowych.

Estymacji parametrów modelu Vasička dokonano metodą największej wiarygodności, natomiast w celu oszacowania parametrów modelu CIR wykorzystano metodę momentów w wersji zaproponowanej przez Chana, Karolyiego, Longstaffa i Sandersa (1992)⁸.

3.3. Estymacja rynkowej ceny ryzyka

Estymacja modeli na podstawie obserwowanego szeregu czasowego krótkookresowej stopy procentowej pozwala na oszacowanie parametrów procesu w mierze fizycznej. Wycena instrumentów finansowych (w szczególności obligacji) w rozważanych modelach wymaga z kolei znajomości parametrów procesu w mierze wolnej od ryzyka, które zależą m. in. od wartości λ (por. równania (6) oraz (14)). Zalecanym w literaturze rozwiązaniem problemu jest oszacowanie rynkowej ceny ryzyka na podstawie danych przekrojowych (zob. na ten temat m. in. Aït-Sahalia, 1996). Problem polega na minimalizacji sumy kwadratów różnic obserwowanych i teoretycznych cen instrumentów finansowych:

$$\hat{\lambda} = \arg \min_{\lambda} \sum_{\tau} (P^{obs}(\tau) - P^{teoret}(\tau))^2 \quad (16)$$

⁸ Praktyczne zastosowanie ML do estymacji modelu CIR jest utrudnione. Dzieje się tak ze względu na własności numeryczne funkcji Bessela, zależnej od estymowanych parametrów, która stanowi jeden ze składników funkcji gęstości warunkowej. W szczególności trudno dobrać wartości startowe parametrów takie, które nie powodowałyby „eksplozji” funkcji Bessela. Szerzej na ten temat zob. również: Hördaahl (2000) oraz Rebonato (1998).

W obu przypadkach za $P^{obs}(\tau)$ podstawiono wektor 28 średnich (z analizowanego okresu) teoretycznych cen obligacji zerokuponowych, wyznaczonych na podstawie modelu Svenssona, o terminach zapadalności $\tau = [0,1; 0,2; \dots; 1; 1,5; 2; \dots; 10]^9$. Za $P^{teoret}(\tau)$ zostały podstawione teoretyczne ceny obligacji zerokuponowych, opisane równaniem (7) w przypadku modelu Vasička oraz równaniem (15) w przypadku modelu CIR. W obu przypadkach do wzorów na ceny obligacji $P^{teoret}(\tau)$ podstawiono oszacowane wartości parametrów w mierze rzeczywistej. Problem zatem sprowadzał się do minimalizacji wyrażenia (16) ze względu na parametr λ .

3.4. Wyniki obliczeń

3.4.1. Oszacowania parametrów

Tabela 1 prezentuje wyniki oszacowań.

Tabela 1. Wyniki oszacowań modeli Vasička oraz CIR

Wyszczególnienie	Model Vasička		Model CIR
r^1		0,121	
a	2,589** (1,259)		2,518 ²
b	0,109*** (0,022)		0,121 ³
σ	0,101*** (0,002)		0,295*** (0,018)
λ	0,409		0,757
Rynkowa cena ryzyka	0,409		0,892
Liczba obserwacji		854	
Wartość funkcji prawdopodobieństwa	3 108,10		—
Wartość funkcji celu	—		0,00141
Test Hansena	—		1,201 (p -value = 0,273)

¹ Średnia wartość krótkoterminowej stopy procentowej w okresie 8.11.1999–1.04.2003.

² Parametr oszacowany oryginalnie ma postać: $\beta = -a$ (oszacowanie: $-2,518^{**}$)
(0,976)

³ Parametr oszacowany oryginalnie ma postać: $a = ab$ (oszacowanie: $0,305^{***}$)
(0,096)

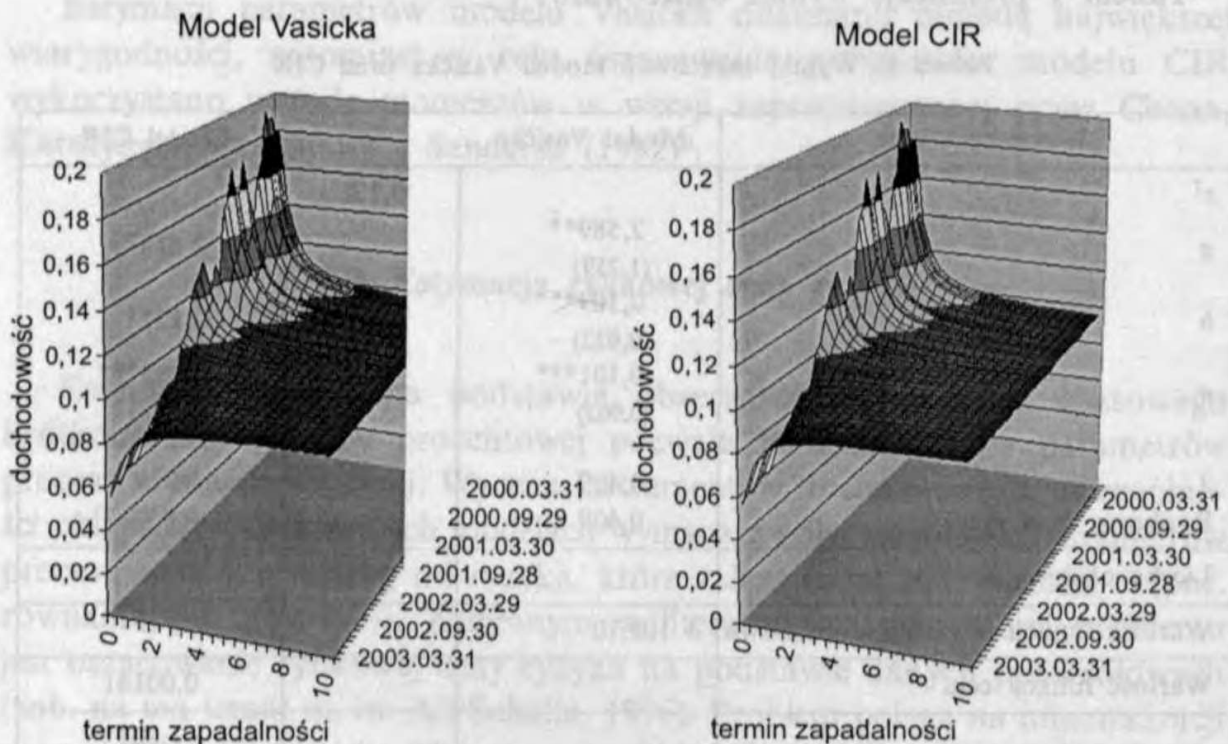
Uwaga: w nawiasach podano błędy standardowe.

⁹ Zastosowanie zwiększonej częstotliwości τ dla krótszych terminów zapadalności było podyktowane dążeniem do możliwie wiernego odzwierciedlenia kształtu krótkiego końca krzywej zerokuponowej Svenssona, wobec problemów związanych ze stabilnością modelu.

Oszacowania parametrów modeli cechuje zbliżona wartość parametru a , odpowiedzialnego za szybkość powrotu do średniej. Długoterminowy poziom stopy procentowej w modelu CIR jest wyższy (o ok. 120 pkt bazowych) od analogicznej wielkości oszacowanej dla modelu Vasička. Warto podkreślić względną zbieżność uzyskanych rezultatów, zwłaszcza że estymacji w obu przypadkach dokonano różnymi metodami. Oszacowania parametrów σ oraz λ są wyraźnie zróżnicowane.

3.4.2. Zerokuponowe krzywe dochodowości

Znajomość parametrów procesu krótkiej stopy procentowej w mierze wolnej od ryzyka pozwala na wyznaczenie, w obu rozważanych modelach, zerokuponowych krzywych dochodowości (rysunek 3).



Rys. 3. Modele Vasička oraz CIR – krzywe zerokuponowe

Uzyskane oszacowania zerokuponowych krzywych dochodowości charakteryzują się dwiema podstawowymi cechami. Po pierwsze, zarówno ich kształt, jak i ewolucja są zasadniczo identyczne. Zjawisko to jest konsekwencją podobnych oszacowań wartości parametrów a oraz b .

Drugą interesującą cechą jest to, że krzywe zerokuponowe przybierają płaski kształt dla względnie nieodległych terminów zapadalności. W obu przypadkach znana jest analityczna postać asymptotycznego poziomu, do

którego zbiegają krzywe zerokuponowe, przy czym nie jest ona równa długoterminowemu poziomowi b^{10} . Praktyczną konsekwencją „efektu spłaszczenia” są znaczne błędy wyceny obligacji, zwłaszcza tych charakteryzujących się względnie odległymi terminami zapadalności¹¹. Krzywe zerokuponowe analizowanych modeli nie są bowiem dostatecznie elastyczne, aby uchwycić faktyczną dynamikę stóp rentowności instrumentów o odległych terminach zapadalności.

3.4.3. Rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej

Jak wskazano w części teoretycznej opracowania, w obu przypadkach znana jest analityczna postać funkcji warunkowej gęstości krótkoterminowej stopy procentowej. Znajomość parametrów procesu stopy pozwala zatem na wyznaczenie jej wynikowych rozkładów w określonym momencie w przyszłości.

Warunkowe i bezwarunkowe rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej. Rysunek 4 prezentuje warunkowe rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej uzyskane na podstawie skalibrowanych modeli.

Oba procesy krótkoterminowej stopy procentowej są stacjonarne. Oznacza to, że wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy warunkowy rozkład krótkoterminowej stopy procentowej stopniowo staje się zbieżny z rozkładem bezwarunkowym¹². Momenty rozkładów bezwarunkowych łatwo wyznaczyć, przyjmując asymptotyczną długość horyzontu prognozy $(T - t) \rightarrow \infty$, odpowiednio w przypadku modelu Vasička (równania (4)) oraz w przypadku modelu CIR (równania (10)).

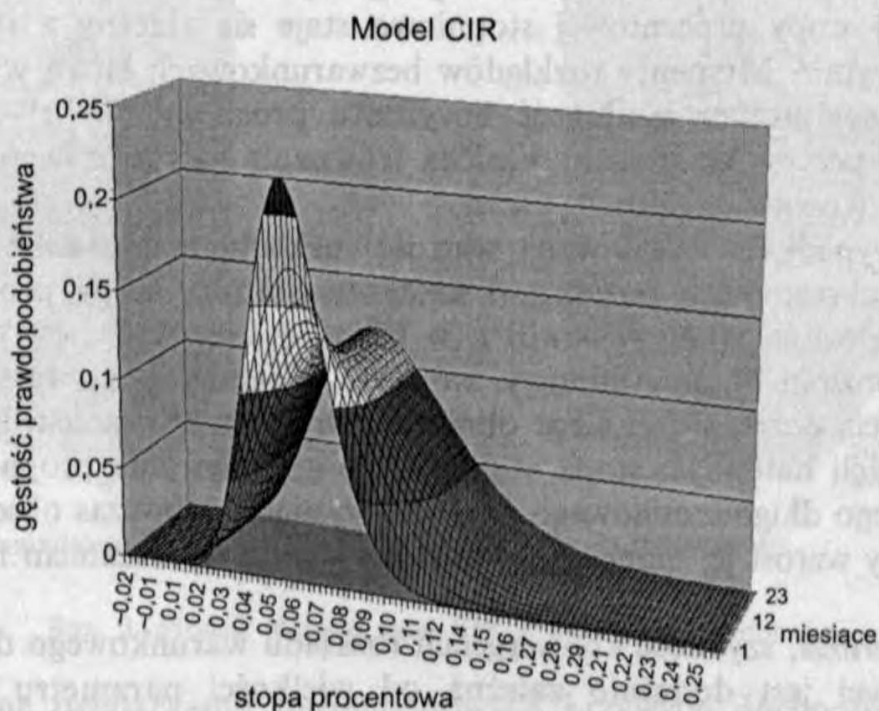
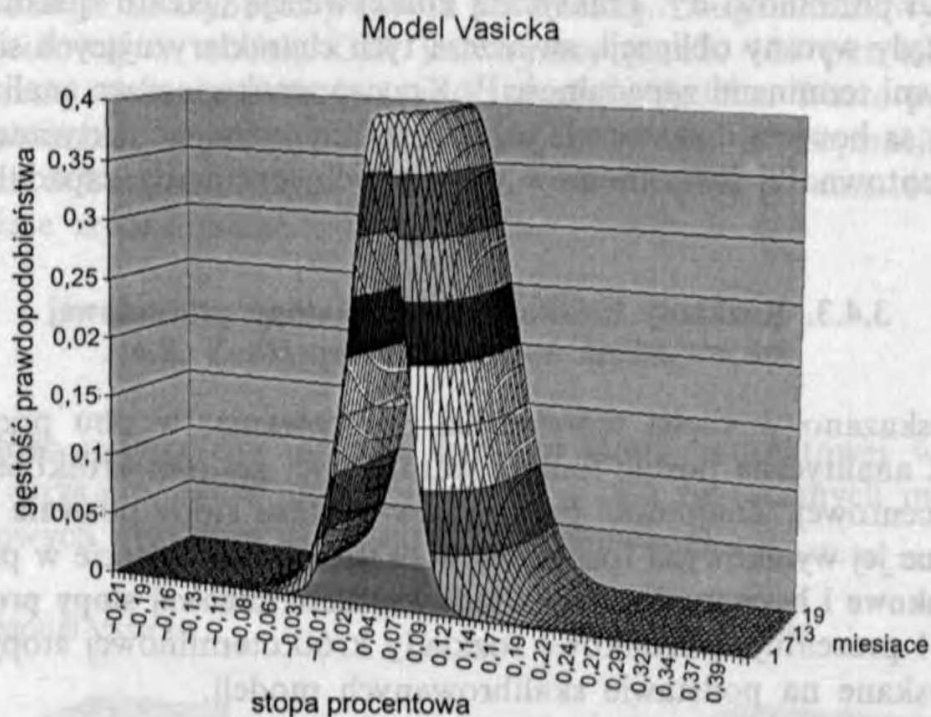
W obu wypadkach oczekiwana wartość rozkładu bezwarunkowego jest równa długookresowemu poziomowi krótkoterminowej stopy procentowej. Jeżeli zatem poziom stopy w chwili t , w której dokonywana jest prognoza, przewyższa poziom długoterminowy, wówczas prognozowana wartość (mierzona wartością oczekiwaną) ulega obniżeniu wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy. Jeżeli natomiast stopa w momencie dokonywania prognozy t jest niższa od swego długoterminowego poziomu (rysunek) wówczas obserwowany jest stopniowy wzrost jej oczekiwanej wartości wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy.

Ceteris paribus, szybkość konwergencji rozkładu warunkowego do postaci bezwarunkowej jest dodatnio zależna od wielkości parametru a , który w obu modelach mierzy szybkość powrotu stopy procentowej do jej długookresowego poziomu.

¹⁰ Zob. np. Ait-Sahalia (2002).

¹¹ Wyniki analizy pod kątem wyceny obligacji są dostępne u autora.

¹² Własność ta zachodzi dla rozkładów warunkowych zarówno w mierze rzeczywistej, jak i w mierze neutralnej względem ryzyka.



Rys. 4. Modele Vasička oraz CIR – warunkowe rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej (miara neutralna względem ryzyka). Uwaga: oszacowania dla r_0 z 1.04.2003 r.

Rozkłady w mierze rzeczywistej oraz w mierze neutralnej względem ryzyka. Jak już wspomniano, oszacowania parametru λ zostały dokonane na podstawie danych przekrojowych (dopasowanie teoretycznych cen z modeli Vasička oraz CIR do „średniej” krzywej zerokuponowej). Oszacowania te, w przeciwieństwie do innych parametrów, szacowanych na podstawie danych historycznych, zawierają zatem informacje na temat oczekiwań uczestników rynku.

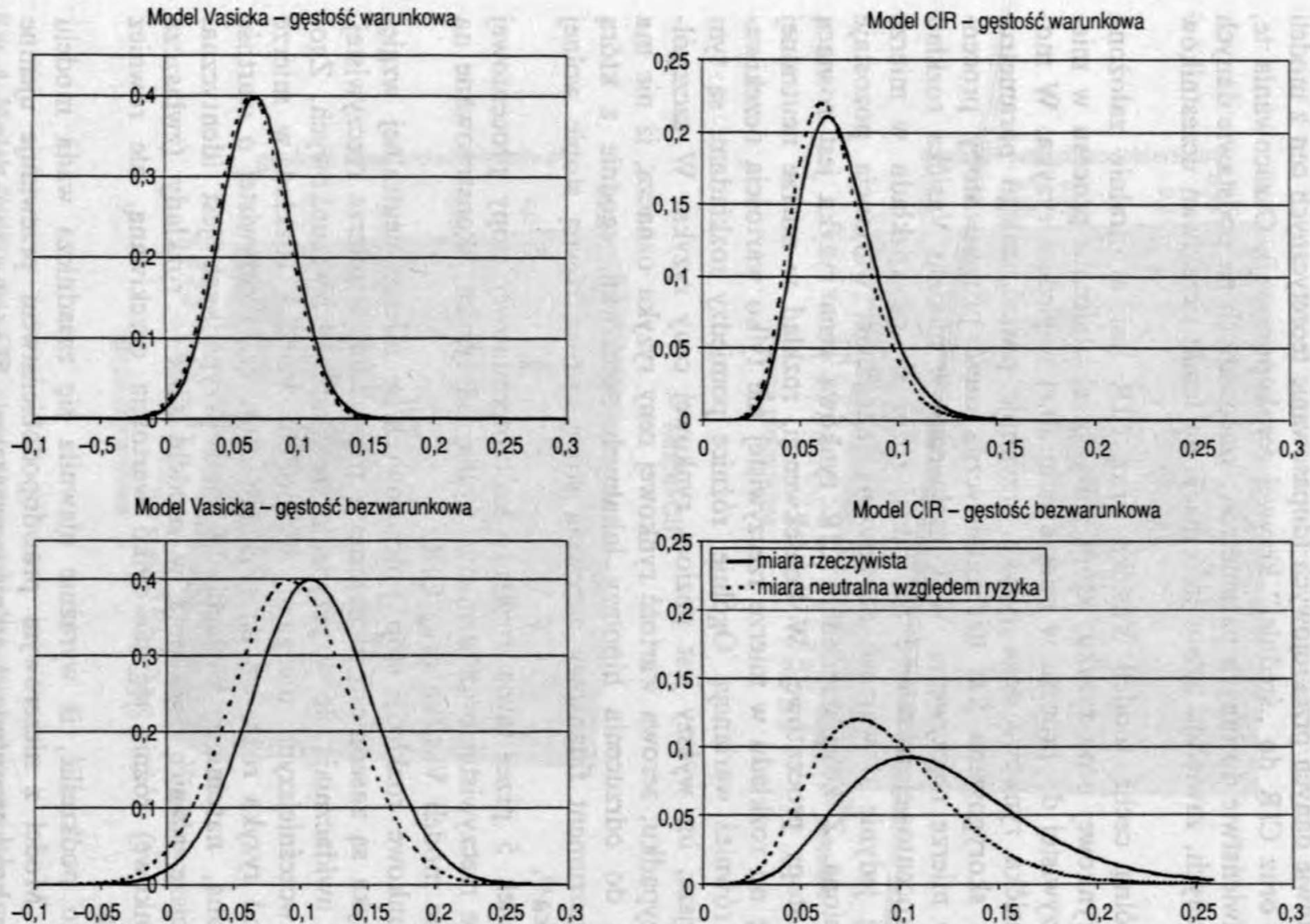
Wspólną cechą modeli Vasička oraz CIR jest arbitralnie założona postać rynkowej ceny ryzyka, która służy przekształceniu procesu w mierze rzeczywistej do procesu w mierze neutralnej względem ryzyka. W modelu Vasička rynkowa cena ryzyka przyjmuje postać stałego parametru, o który skorygowana jest deterministyczna część procesu stopy procentowej w mierze rzeczywistej. W konsekwencji w modelu Vasička rozkład stopy procentowej w mierze neutralnej różni się od rozkładu w mierze fizycznej jedynie o wartość oczekiwaną, natomiast wariancja pozostaje niezmienną. Z kolei w modelu CIR rynkowa cena ryzyka jest rosnącą funkcją stopy procentowej. W konsekwencji, rozkład w mierze neutralnej różni się od rozkładu w mierze rzeczywistej nie tylko wartością oczekiwaną, ale również wariancją. Ogólnie, różnice pomiędzy rozkładami są tym znaczniejsze, im wyższy jest poziom rynkowej ceny ryzyka. W szczególnym przypadku, zerowa wartość rynkowej ceny ryzyka oznacza, iż nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy lokalnych oczekiwań, zgodnie z którą każdy instrument finansowy zapewnia stopę zwrotu równą stopie wolnej od ryzyka¹³.

Rysunek 5 przedstawia rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej w mierze rzeczywistej oraz w mierze wolnej od ryzyka, skonstruowane na podstawie modeli Vasička oraz CIR.

Warunkowe rozkłady stóp procentowych w mierze neutralnej względem ryzyka są zasadniczo identyczne z rozkładami w mierze rzeczywistej. Różnice uwidaczniają się w przypadku rozkładów bezwarunkowych. Zgodnie z wcześniejszymi uwagami, w modelu Vasička rozkład w mierze wolnej od ryzyka różni się od rozkładu w mierze rzeczywistej o wartość oczekiwaną, natomiast wariancja w obu przypadkach jest identyczna. Znaczniejsze różnice występują w modelu CIR – rozkłady (zwłaszcza bezwarunkowe) różnią się nie tylko wartością oczekiwaną, ale również wariancją.

Warto podkreślić, iż wyraźnie ujawniła się zasadnicza wada modelu Vasička. Model z niezerowym prawdopodobieństwem przewiduje ujemne realizacje krótkoterminowej stopy procentowej. Zjawisko to obserwowane jest nawet dla bliskich horyzontów prognozy.

¹³ Szerzej na ten temat zob.: Hördaahl (2000).

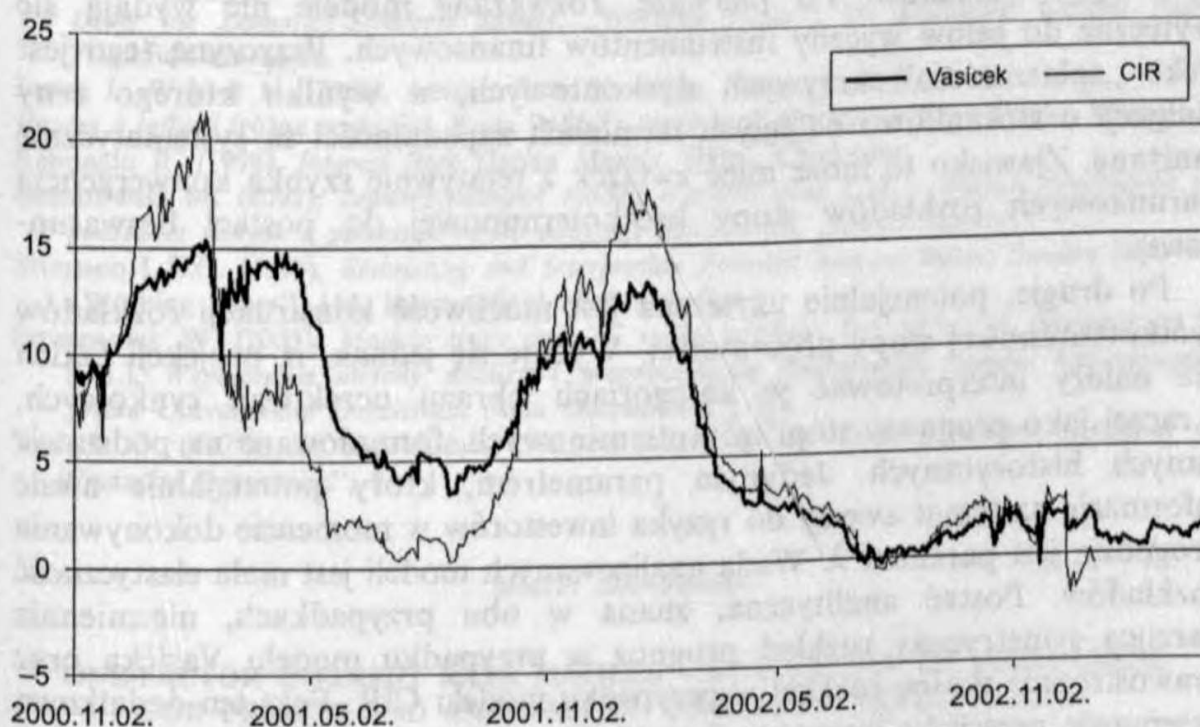


Rys. 5. Rozkłady krótkoterminowej stopy procentowej w mierze rzeczywistej oraz w mierze wolnej od ryzyka. Uwaga: poziom r_0 z 1.04.2003 r., rozkład warunkowy szacowany dla horyzontu miesięcznego

3.4.4. Rynkowa cena ryzyka – oszacowania oraz interpretacja

Pojedyncze oszacowania rynkowej ceny ryzyka (na podstawie całego zbioru obserwacji) nie pozwalają na ocenę ich prawdziwości wobec faktycznej awersji do ryzyka inwestorów. W celu dokonania pogłębionej analizy rynkowej ceny ryzyka zdecydowano o złamaniu podstawowego założenia, stojącego u podstaw obu modeli, dotyczącego stałości parametrów w czasie. Parametry modeli zostały wyestymowane w ruchomych oknach (250 obserwacji). Parametr λ został w każdym przypadku wyestymowany drogą dopasowania modelu do krzywej zerokuponowej obserwowanej na koniec danego podokresu (równanie (16)). Rynkową cenę ryzyka dla obu modeli wyznaczono w oparciu o formuły, odpowiednio (5) oraz (13).

Rysunek 6 przedstawia oszacowania rynkowej ceny ryzyka w obu modelach.



Rys. 6. Modele Vasička oraz CIR – rynkowa cena ryzyka. Uwaga: rynkowa cena ryzyka w modelu CIR została wyznaczona do 3.01.2003 r. włącznie; brak konwergencji uniemożliwił estymację parametrów modelu po tym dniu

Z analizy rysunku 6 wynika, że złamanie założenia o niezmienności w czasie parametrów procesu krótkoterminowej stopy procentowej, mimo iż niezgodne z teoretycznymi podstawami obu modeli, pozwala na uzyskanie interesujących informacji dotyczących ewolucji rynkowej ceny ryzyka na tle wydarzeń na krajowym rynku obligacji. Przełom lat 2000 i 2001, jak również 2001 i 2002, cechowała wzmożona niepewność uczestników rynku,

powodowana głównie rewizją oczekiwań dotyczących obniżek stóp procentowych banku centralnego, a także wzmożonymi obawami o wzrost podaży obligacji w związku z trudną sytuacją budżetową. W obu tych okresach obserwowany jest podwyższony poziom rynkowej ceny ryzyka. Z kolei rok 2002 stał pod znakiem *convergence play* – strategii inwestycyjnej, opierającej się na przekonaniu inwestorów o postępującej integracji Polski z Unią Europejską. Wzrost zainteresowania inwestorów w nabywaniu krajowych skarbowych papierów wartościowych, jaki wówczas się ujawnił, znajduje ciekawą ilustrację w postaci gwałtownego obniżenia rynkowej ceny ryzyka¹⁴.

4. PODSUMOWANIE

Przedstawione wyniki badań skłaniają do sformułowania trzech podstawowych wniosków. Po pierwsze, rozważane modele nie wydają się użyteczne do celów wyceny instrumentów finansowych. Przyczyną tego jest efekt „spłaszczenia” krzywych dyskontowych, w wyniku którego ceny obligacji o stosunkowo odległych terminach zapadalności są systematycznie zaniżane. Zjawisko to może mieć związek z relatywnie szybką konwergencją warunkowych rozkładów stopy krótkoterminowej do postaci bezwarunkowej.

Po drugie, potencjalnie użyteczna jest możliwość konstrukcji rozkładów krótkoterminowej stopy procentowej. Wydaje się jednak, iż projekcji takich nie należy interpretować w kategoriach obrazu oczekiwań rynkowych, a raczej jako prognozy stóp krótkoterminowych, formułowane na podstawie danych historycznych. Jedyнным parametrem, który potencjalnie niesie informację na temat awersji do ryzyka inwestorów w momencie dokonywania prognozy, jest parametr λ . Wadą analizowanych modeli jest mała elastyczność rozkładów. Postać analityczna, znana w obu przypadkach, niezmiennie narzuca symetryczny rozkład prognoz w przypadku modelu Vasička oraz prawostronnie skośny rozkład w przypadku modelu CIR. Fakt ten dodatkowo przemawia przeciwko interpretacji rozkładów w kategoriach obrazu oczekiwań rynkowych, które bardzo rzadko dają się przybliżyć za pomocą analitycznych funkcji gęstości.

Po trzecie, szczególnie interesującą własnością modeli okazała się możliwość uzyskania oszacowań rynkowej ceny ryzyka. Analiza ewolucji tego czynnika na tle wydarzeń na rynku obligacji pozwala na poprawną identyfikację okresów, w których zachowania inwestorów cechowała wzmożona lub obniżona awersja do ryzyka.

¹⁴ Szersze omówienie dynamiki rynkowej ceny ryzyka na tle wydarzeń na krajowym rynku obligacji można znaleźć w: Stamirowski (2003).

Wydaje się, iż w celu zniesienia podstawowych ograniczeń modeli Vasička oraz CIR konieczne jest podjęcie badań wieloczynnikowych modeli terminowej struktury stóp procentowych.

LITERATURA

- Aït-Sahalia Y. (1996), *Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate*, „Review of Financial Studies”, 9.
- Aït-Sahalia Y. (2002), *Interest Rate Models: Theory and Practical Applications*, FAME Executive Courses in Finance, Geneva (materiał szkoleniowy).
- Chan K.C., Karolyi G.A., Longstaff F.S., Sanders A.B. (1992), *An Empirical Comparison of Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates*, „The Journal of Finance”, 47.
- Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1985), *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, „Econometrica”, 53.
- Duffie D. (2001), *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton.
- Hördahl P. (2000), *Estimating the Implied Distribution of the Future Short Term Interest Rate Using the Longstaff-Schwartz Model*, „Working Paper”, 16, European Central Bank, Frankfurt am Main.
- James J., Webber N. (2000), *Interest Rate Modelling*, Wiley, Chichester.
- Raport o inflacji* (różne wydania), Rada Polityki Pieniężnej, Narodowy Bank Polski, Warszawa.
- Rebonato R. (1998), *Interest Rate Option Models*, Wiley, Chichester.
- Stamirowski M. (2003), *Jednoczynnikowe modele Vasička oraz CIR – analiza empiryczna na podstawie danych z polskiego rynku obligacji skarbowych*, „Bank i Kredyt”, 7.
- Svensson L.E.O. (1994), *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–94*, „Working Paper”, 114, International Monetary Fund.
- Szczepaniak W. (2003), *Modele stopy spot na rynku polskim*, [w:] Milo W., Wdowiński P. (red.), *Współczesne metody analizy i prognozowania finansowych rynków kapitałowych*, „Acta Universitatis Lodzianae. Folia Oeconomica”, 166.
- Vasiček O. (1977), *An Equilibrium Characterisation of the Term Structure*, „Journal of Financial Economics”, 5.

Marcin Stamirowski

ONE-FACTOR INTEREST RATE MODELS – EVALUATION OF USEFULNESS FOR PRICING AND ANALYSIS OF INVESTORS' EXPECTATIONS

Summary

This paper presents the empirical analysis of interest rate models: Vasiček (1977), and Cox, Ingersoll and Ross (1985). The parameters of the instantaneous interest rate processes were estimated using time series techniques. Market prices of risk were evaluated by means of fitting the theoretical bond prices to the zero-coupon yield curves. Results can be summarised as follows: (1) neither model proves plausible for pricing Polish Treasury bonds; (2) both models allow for straightforward construction of short rate distributions, which should be interpreted as conditional forecasts, rather than investors' expectations; (3) dynamics of market prices of risk accurately reflect changing risk aversion of investors.