ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA PHILOSOPHICA 7, 1990,

Jean-Pierre Ginisti

LA FORMATION DES NOTIONS EN LOGIQUE COMBINATOIRE

D'une manière générale, par "formation des notions", on peut entendre leur construction historique, la manière dont pour la première fois elles ont été produites, mais aussi toute investigation qui les retrouve. Il y a alors autant de formations qu'on est capable heuristiquement d'en imaginer et qu'il y a d'objectifs différents à atteindre. L'idée même qu'il y aurait des "bases" d'une approche mathématique est inexacte et stérilisante si on les conçoit comme des points de départs intangibles. Chercher des voies nouvelles vers des notions connues est un aspect important du travail mathématique. On se propose de le montrer en examinant la manière dont la logique combinatoire parvient à retrouver, dans un type de langage qui semble d'abord très différent, l'implication intuitionniste et ses propriétés[1].

Nous commencerons par présenter plusieurs notions de la théorie des combinateurs, sous la forme d'un langage formel, que nous appellerons L, dont l'alphabet comporte les données suivantes:

- un ensemble E infini dénombrable d'éléments: a, b, c, d, e, f, g, h, a', ..., h', a", ... (dits "variables"), I, K, W, C, B (dits "combinateurs élémentaires"):
- une opération binaire: * (dite "application");
- une relation binaire: ⟶ (dite "réductibilité");
- deux symboles de ponctuation: (,) (dites "parenthèses").

---

[1] Haskel B. Curry est le principal promoteur de la logique combinatoire, dès les années 30. Il est l'auteur, avec Robert Feys pour le premier volume, avec J. R Hindley et J. P Seldin pour le second, de l'ouvrage classique dans ce domaine: Combinatory Logic, Amsterdam, North-Holland Publ. Comp., I, 1ère ed. 1958, 2ème ed. 1968 (auquel se font nos références); II, 1972.

Ne sont bien formées que les expressions déterminées par les règles:

RF_1: tout élément de E est un terme;

RF_2: si x et y sont des termes, (x * y) est un terme;

RF_3: si x et y sont des termes, $x \longrightarrow y$ est une formule.

x, y, z, w, ou ces mêmes lettres avec apostrophes ou indices numériques, sont des métavariables et désignent des termes quelconques; (x * y), dans son sens le plus large, indique que l'adjonction de y à x produit quelque effet. Au lieu du mot "terme", neutre et général, on peut dire, en le spécifiant, "combinaison applicative" (en bref, "combinaison"). Par RF_1 une combinaison peut n'avoir qu'un seul élément; K, p. ex., est une combinaison.

Par économie d'écriture, nous supprimerons désormais tout usage de "*" et toute paire de parenthèses groupant les termes deux par deux vers la gauche; (a * b) s'écrira donc ab, ((a * b) * c) s'écrira abc, (a * (b * c)) s'écrira (bc). Nous conviendrons aussi d'écrire $x \longrightarrow y \longrightarrow z$ ... pour $x \longrightarrow y$, $y \longrightarrow z$ ... Les expressions de forme xy sont dites "molécules" KI p. ex., est une molécule; K et I sont respectivement l'argument de gauche et l'argument de droite de l'application de K à I. Une combinaison sans parenthèse est dite "suite"; a, abc, p. ex., sont des suites.

A chacun des 5 combinateurs élémentaires est associée une règle (dite "de récriture") qui exprime la transformation qu'il fait subir à une certaine suite, exprimée en métavariables. On appelle "récriture" la combinaison obtenue par l'action d'un combinateur sur la suite qu'il précède:

nom de la règle	formulation de la règle	nom du combinateur présent
(I)	$Ix \longrightarrow x$	identificateur (élémentaire)
(K)	$Kxy \longrightarrow x$	éliminateur (élémentaire)
(W)	$Wxy \longrightarrow xyy$	duplicateur (élémentaire)
(C)	$Cxyz \longrightarrow xzy$	permutateur (élémentaire)
(B)	$Bxyz \longrightarrow x(yz)$	compositeur (élémentaire)

x, y, z étant des termes quelconques, on a p. ex. (en numérotant les arguments et en indiquant les règles employées) $Wab \underset{1\,2\;(W)}{\longrightarrow} abb$; $KIW \underset{1\,2\;(K)}{\longrightarrow} I$; $x \longrightarrow\!\!\!\rightarrow y$ indiquera que y s'obtient de x à l'issue de plusieurs récritures successives. Ainsi $BIab \twoheadrightarrow ab$, car $\underset{123}{BIab} \xrightarrow[(B)]{} \underset{1}{I(ab)} \longrightarrow ab$.

Plus généralement, on appellera "combinateur (proprement dit)" tout terme auquel est associée une règle de récriture telle que, si X est ce terme, $Xx_1 \dots x_n \longrightarrow y_1 \dots y_m$, où $y_1 \dots y_m$ sont des combinaisons de $x_1, \dots, x_n$. Ainsi, BI est un combinateur. Les valeurs de n et de m sont dites respectivement "ordre" et "degré" de X. Le combinateur sera dit "régulier" si et seulement si y_1 est x_1 et si $y_2 \dots y_m$ sont des combinaisons de $x_2, \dots, x_n$ (X laisse invariant le premier argument). X, Y, voire avec indices, seront des métavariables de combinateurs. Un combinateur d'ordre n appliqué à une suite ayant moins de n éléments ne donne pas lieu à récriture, appliqué à une suite ayant plus de n éléments il la récrit selon la première des deux règles de monotonie (gauche et droite) qu'on adjoint aux précédentes: si x commence par un combinateur et si $x \twoheadrightarrow y$, alors:

(MG) quelque soit z, $xz \twoheadrightarrow yz$. Ainsi par (K) et (MG) $Kabc \twoheadrightarrow ac$;

(MD) quelque soit z, $zx \longrightarrow zy$. Ainsi par (K) et (MD) $a(Kbc) \longrightarrow ab$.

Le combinateur agit à l'interieur d'une expression donnée, mais $aKbc$ ne se récrit pas. On peut modifier L en ajoutant ou en substituant certains combinateurs à I, K, W, C, B, p. ex. S tel que $Sxyz \longrightarrow xz(yz)$. Une question essentielle porte dans tous les cas sur la complétude de l'ensemble.

Un ensemble $\{X_1, \dots, X_m\}$ de combinateurs est dit "complet" (ou "être une base") si pour tout ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ de variables et toute combinaison Q de ces variables, il existe une combinaison Q' de $X_1, \dots, X_m$, telle que $Q'x_1 \dots x_n \twoheadrightarrow Q$.

On sait établir d'une part que $\{I, K, W, C, B\}$ est une base, d'autre part (et notamment) que $\{K, W, C, B\}$ en est une aussi car I peut être défini, et donc remplacé, par WK. On dit en effet que $X =_{df} Y$ si et seulement si le définissant Y est une combinaison de $X_1, \dots, X_m$ et qui possède le même règle de récriture que X, le défini. Ainsi, $Ix \longrightarrow x$; $WKx \longrightarrow Kxx \longrightarrow x$.

$\{K, S\}$ forme également une base, tous les combinateurs différents de K dans $\{I, K, W, C, B\}$ étant définissables par K, S. De la même manière, est une base tout ensemble de combinateurs $\{X_1, \dots, X_m\}$ tel que K et S soient définissables par $X_1, \dots, X_m$ (ou identiques à l'un des $X_1, \dots, X_m$). On démontre qu'aucune base ne comporte moins de deux éléments.

Notons, pour exploitation ultérieure, que dans chacun de ces langages, chaque expression est obtenue à partir de $X_1, \ldots, X_m$ par application, et qu'on peut en donner une construction (dite "normale") en prenant les termes dans l'ordre, qui est unique, déterminé par les conditions suivantes:

(1) les arguments d'une application avant l'application elle-même;

(2) les arguments à gauche d'un argument donné avant cet argument;

(3) chaque nouvelle occurrence d'un terme est traitée comme s'il s'agissait d'un terme nouveau.

Cette construction peut s'exprimer sous la forme d'un arbre déductif. On écrira $\dfrac{1.\ X \qquad 2.\ Y}{3.\ XY}$ la formation de XY, dite "la conclusion", à partir de X, dite "la majeure", et de Y, dite "la mineure". Ainsi, par rapport à la base $\{K, S\}$ l'expression K(SK) se construira:

$$\dfrac{1.\ K \qquad \dfrac{2.\ S \qquad 3.\ K}{4.\ SK}}{5.\ K(SK)}$$

Nous proposerons ici plusieurs moyens simples permettant de former des bases de combinateurs. Il est vrai qu'on pourra estimer ces résultats à la fois trop naturels et pas assez. D'une part, en effet, les procédés obtiennent des bases assez trivialement, d'autre part de nombreux combinateurs formés pourront être qualifiés d'artificiels, au sens où Curry juge tel le combinateur J ayant la règle de récriture $Jxyzw \longrightarrow xy(xwz)$. Toutefois, comme on le verra, ils permettent de produire, sous des conditions données, des systèmes axiomatiques complets pour certaines logiques formulées en dehors d'une approche combinatoire, dont l'obtention peut être moins triviale que celle des combinateurs qui servent à l'obtenir.

Nous présenterons surtout des remplaçants de K. Ils comporteront des combinateurs à effet d'élimination, un combinateur étant tel si et seulement si dans l'expression de sa règle de récriture une des variables au moins de la suite ne figure pas dans la récriture. En effet, aucune combinaison de combinateurs primitifs dont aucun n'a d'effet d'élimination ne permettrait de définir K puisqu'à aucune étape des récritures effectuées par ces combinateurs le nombre des occurrences d'une variable ne décroît. Nous chercherons aussi à faire droit à la formation heuristique des notions en cause, pour illustrer une distinction faite précédemment. Notre présentation sera donc volontairement moins épurée qu'elle devrait l'être à d'autres égards, et afin de restituer justement la manière dont l'esprit chemine. On peut procéder p. ex. en généralisant le cas suivant: si A et A' ont des règles de récriture telles que A'ab $\longrightarrow$ abb, Aabb $\longrightarrow$ a, c.-à-d. sont identifiés par A'xy $\longrightarrow$ xyy, Axyz $\longrightarrow$ x, l'expression A'A définira K puisque A'Axy $\longrightarrow$ Axxy $\longrightarrow$ x. De là $\{$A' (c.-à-d. W), A, S$\}$ est une base. En outre, comme on sait définir S par W, C, B ou par W, B' (c.-à-d. CB), sont aussi des bases $\{$A, W, C, B$\}$ et $\{$A, W, B'$\}$.

La méthode consiste évidemment à remplacer K par une sorte d'extension de K, c.-à-d. par un combinateur X qui obtient une récriture ne conservant que le premier argument, comme le fait K, mais d'ordre supérieur à celui de K, après s'être donné un combinateur X' qui commence par obtenir de la suite xy imposée pour X'X, grâce à un certain nombre de répétitions, une combinaison de degré égal à l'ordre de X. Plus généralement, si X est tel que $Xx_1 \ldots x_n \longrightarrow x_1$, on a $K =_{df} X'X$ si: (a) X' et X sont des combinateurs réguliers, (b) l'ordre de X'est 2 ou 3, (c) le degré de X' est au moins 3 et le deuxième élément de la récriture est y, (d) la récriture obtenue par X' sur Xxy comporte au moins 3 termes autres que X, (e) l'ordre de X est égal au nombre de termes autres que X que comporte la récriture obtenue par X' sur Xxy, (f) la récriture de X est x.

En effet, par (a), (b), (c) on a:

(α) $X'xy \longrightarrow xyx'_1 \ldots x'_m$, où $x'_1 \ldots x'_m$ sont des combinaisons de y, ou

(β) $X'xyz \longrightarrow xyx'_1 \ldots x'_m$, où $x'_1 \ldots x'_m$ sont des combinaisons de y, z, et donc pour (α) $X'Xxy \longrightarrow Xxx'_1 \ldots x'_m y$, où $x'_1 \ldots x'_m$ sont des combinaisons de x, pour (β) $X'Xxy \longrightarrow Xxx'_1 \ldots x'_m$, où $x'_1 \ldots x'_m$ sont des combinaisons de x, y. Or, par (d) $xx'_1 \ldots x'_m y$ et $xx'_1 \ldots x'_m$ comportent au moins 3 termes, donc par (e) et (f) $Xxx'_1 \ldots x'_m y \longrightarrow x$, $Xxx'_1 \ldots x'_m \longrightarrow x$. Ainsi, et entre autres, A' et A tels que $A'xyz \longrightarrow xy(yz)zy$ et $Axyzw \longrightarrow x$ forment avec S une base: $A'Axy \longrightarrow Ax(xy)yx \longrightarrow x$.

X peut être aussi un combinateur qui au lieu d'éliminer tous les éléments d'une suite sauf le premier, élimine tous les éléments d'une suite sauf le dernier: $Xx_1 \ldots x_n \longrightarrow x_n$. Si on se donne par exemple $Axy \longrightarrow y$ et le combinateur C, on a $K =_{df}$ CA car $CAxy \longrightarrow Ayx \longrightarrow x$. Il s'ensuit que $\{C,\ A$ (c-à-d KI), $S\}$ est une base, donc aussi $\{C,\ A,\ W,\ B\}$, $\{C,\ A,\ W,\ B'\}$.

On peut généraliser ce résultat. Pour tout X tel que $Xx_1 \ldots x_n \longrightarrow x_n$, il existe un combinateur X' tel que $X'Xxy \longrightarrow x$. Il suffit en effet que X' ait une règle de récriture de la forme: $X'x_1x_2x_3 \longrightarrow x_1x_3 \ldots x_3\ x_2$, où $x_3 \ldots x_3$ comporte n - 1 occurrences de x_3 (C'est le cas particulier de X' pour lequel $x_3 \ldots x_3$ comporte un seul élément).

pour $Axyz \longrightarrow z$, on a $A'xyz \longrightarrow xzzy$, il vient $A'Axy \longrightarrow Ayyx \longrightarrow x$,
pour $Axyzw \longrightarrow w$, on a $A'xyz \longrightarrow xzzzy$, il vient $A'Axy \longrightarrow Ayyyx \longrightarrow x$, etc.

On pourrait démontrer ce résultat par récurrence. Une autre solution sera en outre présentée plus loin. Dans chacun de ces cas $\{A',\ A,\ S\}$ est une base.

Si on considère maintenant un combinateur X tel que $Xx_1 \ldots x_n \ldots x_n \longrightarrow x_{n-1}$ (où $n > 2$), on a $K =_{df} X \ldots X$, où $X \ldots X$ comporte n - 1 occurrences de X. Soit $Axyz \longrightarrow y$, on a $AAxy \longrightarrow x$; soit $Axyzw \longrightarrow z$, on a $AAAxy \longrightarrow x$, etc. (ce qu'une récurrence obtiendrait à nouveau). Notons qu'une seule récriture intervient pour chaque expression. Dans chacun de ces cas, $\{A,\ S\}$ forme une base. On va généraliser sur ce X et donner une définition de K à partir d'un combinateur X tel que $Xx_1 \ldots x_n \longrightarrow x_i$ (où $i \leqslant n - 2$).

Cette situation nous intéresse parce qu'elle donne l'occasion d'expliciter la manière dont heuristiquement peut se former une base de notions. L'attention se trouve focalisée sur un certain cas, ici une valeur particulière de i, la valeur n - 1, qui offre une solution facile ou plus élégante (un seul combinateur y suffit à remplacer K), puis la solution s'étend de part et d'autre, comme un cristal-germe le fait dans une eau-mère, ici d'un côté à i = n, de l'autre côté à $i \leqslant n - 2$, parce qu'on s'est aperçu que la formule donnant la solution du cas initialement considéré peut recevoir des ajouts qui la rendent propre à traiter des autre cas, et même si c'est au prix de sa première simplicité. Dès lors, se trouvent relégués certains résultats obtenus pour d'autres cas (comme ici d'une part pour i = 1, d'autre part pour i = n) qui n'ont pas suscité, même s'ils l'auraient pu, les mêmes développements, mais auxquels il peut arriver de préparer la voie au traitement définitif en offrant, comme ici, des solutions voisines. Sans doute faut-il reprendre après coup les résultats pour leur donner d'emblée une formulation plus satisfaisante mais il demeure intéressant aussi d'expliciter les processus psychologiquement formateurs, si maladroits soient-ils.

Soit un combinateur X tel que $Xx_1 \dots x_n \longrightarrow x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et soit les combinateurs

$Cx_1x_2x_3 \longrightarrow x_1x_3x_2$

et $C_1x_1x_2x_3x_4 \longrightarrow x_2x_3x_4x_1$,

$C_2x_1x_2x_3x_4 \longrightarrow x_2x_3x_4x_1x_1$, etc., en général

$C_hx_1x_2x_3x_4 \longrightarrow x_2x_3x_4x_1 \dots x_1$ (où $x_1 \dots x_1$ comporte h occurrences de x_1), et en supposant toujours exclus $n = 1$ car aucun combinateur d'ordre 1 n'a d'effet d'élimination, et le combinateur X tel que $Xxy \longrightarrow x$ qui se confond avec K. Il vient alors:

(1) si $i = n - 1$, $K =_{df} X \dots X$, où $X \dots X$ comporte $n - 1$ occurrences de X;

(2) si $i = n$, $K =_{df} C(X \dots X)$, où $X \dots X$ comporte $n - 1$ occurrences de X;

(3) si $i \leqslant n - 2$, $K =_{df} C_hX(X \dots X)$, où $X \dots X$ comporte i occurrences de X et où $h = (n - 1) - i$.

En effet, (1) peut s'obtenir, comme on l'a vu, par récurrence, (2) également en raisonnant sur les cas suivants:

pour $Ax_1x_2 \longrightarrow x_2$	$CAxy \longrightarrow Ayx \longrightarrow x$	$K =_{df} CA$
pour $Ax_1x_2x_3 \longrightarrow x_3$	$C(AA)xy \longrightarrow AAyx \longrightarrow x$	$K =_{df} C(AA)$
pour $Ax_1x_2x_3x_4 \longrightarrow x_4$	$C(AAA)xy \longrightarrow AAAyx \longrightarrow x$	$K =_{df} C(AAA)$ etc.

Afin d'établir (3), considérons une expression de forme (α): $X \dots Xxy$ et les expressions (β) $C_1X(X \dots X)$, où $X \dots X$ comporte une occurrence de X en moins que dans (α)

(β') $C_2X(X \dots X)$, où $X \dots X$ comporte deux occurrences de X en moins que dans (α). Dans (α) le X de tête possède les n arguments que lui attribue sa règle de récriture, et x est à la place $n - 1$, d'après (1). Or:

$C_1X(X \dots X)xy$ se récrit (γ): $X \dots XxyX$,

$C_2X(X \dots X)xy$ se récrit (γ'): $X \dots XxyXX$ etc.

Dans (γ), (γ'), etc. le X de tête possède une suite ayant le même nombre d'arguments que dans (α) puisque C_1X, C_2X, etc. placent à droite de l'expression $X \ldots Xxy$ exactement le nombre de X qu'elle comporte en moins sur sa gauche que dans (α). D'autre part, x est dans (γ), avec C_1X, à la place $(n - 1) - 1$, c.-à-d. $n - 2$, dans (γ'), avec C_2X, à la place $(n - 1) - 2$, c.-à-d. $n - 3$, etc., puisqu'il y a respectivement 2 arguments à la droite de x, 3 arguments à la droite de x, etc., donc avec C_hX à la place $(n - 1) - i$, i étant selon (3) chacune des valeurs égales ou inférieures à $n - 2$. Enfin, dans (γ), (γ'), etc. le X de tête récrit x la suite qu'il précède si X est tel que, respectivement: $Xx_1 \ldots x_n \rightarrow x_{n-2}$; $Xx_1 \ldots x_n \rightarrow x_{n-3}$, etc. Donc si $i \leqslant n - 2$, l'expression $C_hX(X \ldots X)xy$ obtiendra x à la place donnée pour i par X. On aura $C_hX(X \ldots X)xy \twoheadrightarrow x$. Soit p. ex.:

$Ax_1x_2x_3 \rightarrow x_2$	$AAxy \rightarrow x$	cf. (1)	$K =_{df} AA$
$Ax_1x_2x_3 \rightarrow x_1$	$C_1AAxy \rightarrow AxyA \rightarrow x$	cf. (3)	$K =_{df} C_1AA$
$Ax_1x_2x_3x_4 \rightarrow x_3$	$\rightarrow AAAxy \rightarrow x$	cf. (1)	$K =_{df} AAA$
$Ax_1x_2x_3x_4 \rightarrow x_2$	$C_1A(AA)xy \rightarrow AAxyA \rightarrow x$	cf. (3)	$K =_{df} C_1A(AA)$
$Ax_1x_2x_3x_4x_5 \rightarrow x_1$	$C_3AAxy \rightarrow AxyAAA \rightarrow x$	cf. (3)	$K =_{df} C_3AA$

Nous nous sommes intéressés aux remplaçants de K (et seulement d'une certaine classe). Il est possible aussi de trouver des remplaçants de S. Ainsi pour $Ax_1x_2x_3x_4 \rightarrow x_1x_2x_3x_4(x_3x_4)$ et $A'x_1x_2x_3x_4 \rightarrow x_1x_3x_4$, $S =_{df} AA'$ puisque $AA'xyz \rightarrow A'xyz(yz) \rightarrow xz(yz)$.

Dans la théorie des combinateurs qu'on vient d'explorer, les entités sont aussi peu différenciées que possible. Dans la seconde partie du programme combinatoire, au contraire, la théorie dite "de la fonctionnalité", elles vont être classées en catégories.

On se donne des catégories primitives, θ_1, θ_2, ... convenant aux objets d'un certain domaine, exprimé en un langage applicatif. On les attribue à certains objets de ce domaine, en écrivant p. ex. θ_1x, $\theta_2(xy)$, qu'on peut lire "x est un θ_1", "xy est un θ_2". Sur ces données, on obtient d'autres catégories du domaine et leur attribution à certains objets, grâce à un opérateur F (qui n'est pas un combinateur) tel que:

(1) si α et β sont des catégories, alors $F\alpha\beta$ est une catégorie;

(2) si $\alpha(xy)$ et βy, alors $F\beta\alpha x$, c.-à-d. si xy est un α et y un β, x est un $F\beta\alpha$: $\dfrac{\alpha(xy) \quad \beta y}{F\beta\alpha x}$ ou (2') qui permute dans (2) la majeure et la conclusion (avec restitution de l'ordre α, β, des variables):

(2') si $F\alpha\beta x$ et αy, alors $\beta(xy)$: $\dfrac{F\alpha\beta x \quad \alpha y}{\beta(xy)}$ Nous appellerons (2') "la règle (F)". Elle obtient la catégorie d'un terme composé à partir de celles de ses composants; α et β sont des métavariables de catégories. En seront aussi γ, δ, α', ..., δ', α'' ... Pour certains traitements, comme ceux qui suivent, on peut s'exprimer à l'aide des seules métavariables (c.-à-d. en termes généraux) en laissant θ_1, θ_2, ... sans emploi. $F\alpha\beta x$ se comprendra comme signifiant "x appartient à la catégorie $F\alpha\beta$ des objets dont chacun, appliqué à un objet de la catégorie α, détermine un objet de la catégorie β"; $F\alpha\beta$ sera dit "exprimer un caractère fonctionnel de x", c.-à-d. son type de fonction, et par rapport à des prémisses données. Dans une expression de forme $F\alpha\beta x$, x est dit "le sujet", $F\alpha\beta$ "le prédicat".

Par (2), on peut facilement déterminer le caractère fonctionnel de I ou de K. Si on pose qu'une expression et sa récriture appartiennent à la même catégorie, disons α, comme $Ix \longrightarrow x$, $Kxy \longrightarrow x$, il vient:

$$\dfrac{\alpha(Ix) \quad \alpha X}{F\alpha\alpha I} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\alpha(Kxy) \quad \beta y}{F\beta\alpha(Kx)} \quad \alpha x}{F\alpha F\beta\alpha K}$$

D'une manière comparable, on obtient l'expression $FF\alpha F\beta\gamma FF\alpha\beta F\alpha\gamma S$. En désignant par (FX) l'expression attribuant à X un caractère fonctionnel, on a donc: (FI) $F\alpha\alpha I$ (FK) $F\alpha F\beta\alpha K$ (FS) $FF\alpha F\beta\gamma FF\alpha\beta F\alpha\gamma S$.

Curry a formulé et démontré un théorème, dit "de construction du sujet", qui intéresse nos investigations. Il donne une technique permettant d'obtenir la déduction par (F) du caractère fonctionnel (qu'il n'est pas besoin de connaître avant de l'entreprendre) d'un combinateur donné X, à partir de prémisses données, ou d'établir que la déduction d'un caractère fonctionnel pour X est impossible dans le système considéré. Nous le présenterons moins formellement et en le restreignant d'abord à un cas simple. Puis, nous indiquerons comment il est possible de le généraliser pour retrouver l'ensemble des cas du théorème de Curry.

Soit à déduire le caractère fonctionnel d'un combinateur X par (F) à partir de (FK) (FS) donnés comme schémas d'axiomes et en se bornant à utiliser les termes primitifs K et S. Notons que, comme toutes les métaformules, (FK) (FS) incorporent en somme la règle de substitution dans leur formulation. Chaque variable α, β, ...

peut donc être remplacée par des symboles quelconques de catégories. Nous appellerons $\mathcal{F}_1$ ce système formel.

X est évidemment une molécule composée de K et de S par application. On prouve alors le théorème suivant:

Si on peut déduire des schémas d'axiomes (FK) (FS), par (F), le caractère fonctionnel d'un combinateur X, soit ηX, alors (I) il existe une déduction normale de ηX à partir de (FK) (FS), par (F). Cette déduction est telle qu'il existe des termes $X_1, \ldots, X_q$, $\eta_1, \ldots, \eta_q$ pour lesquels elle obtient les énoncés $\eta_1 X_1, \eta_2 X_2, \ldots, \eta_q X_q$, c.-à-d. X_1 a le caractère fonctionnel η_1, etc.;

(II) $X_1, \ldots, X_q$ forme une construction normale de X à partir de K, S par application. Cette construction est unique;

(III) si X_k n'est ni K ni S, c.-à-d. s'il a la forme $X_i X_j$, alors $\eta_i = F\eta_j\eta_k$ (le caractere fonctionnel de X_i s'obtient en plaçant F devant le caractère fonctionnel de X_j suivi du caractère fonctionnel de X_k);

(IV) si X_k est K ou S, alors $\eta_k X_k$ est une instance de (FK) ou de (FS);

(V) si X ne comporte pas K (respectivement, ne comporte pas S), alors aucune instance de (FS) (respectivement, de (FK)) n'intervient dans la déduction normale de X.

En esquisse, la preuve est la suivante: de même que si X_k est obtenu par application de X_i et de X_j, il existe une construction par application, de forme $\dfrac{X_i \quad X_j}{X_i X_j}$ qui est la construction dite "normale" de X_k, de même si $\eta_k X_k$ est obtenu par (F) de $\eta_i X_i$ et de $\eta_j X_j$, il existe une déduction par (F) de forme

$$\frac{\eta_i X_i \qquad \eta_j X_j}{\eta_k (X_i X_j)}$$

qui est la déduction normale de $\eta_k X_k$. D'autre part, cette déduction normale s'effectue en somme sur une construction normale puisque la déduction normale de $\eta_k X_k$ se confond avec la construction normale de X_k quand les η ne sont pas considérés. Cela légitime (I) et (II). On établit (III) en remarquant que pour obtenir par (F) $\eta_k(X_i X_j)$, il faut qu'on ait $\eta_i X_i$ et $\eta_j X_j$ tels que $\eta_i = F\eta_j\eta_k$. Il vient alors:

$$\frac{F\eta_j\eta_k X_i \qquad \eta_j X_j}{\eta_k (X_i X_j)}$$

(<u>IV</u>) et (<u>V</u>) sont à peu près évidents à partir de ce qui précède. En pratique:

Pour chercher à déduire (FX) de (FK) (FS), on procède ainsi: (1) on se donne la construction normale de X; p. ex., si X est SK $\dfrac{1.\ S \qquad 2.\ K}{3.\ SK}$, (2) pour chaque X_k de cette construction qui n'est ni K ni S, ici 3. SK, on place devant sa majeure, ici le S de 1. S, un η de forme $F\eta_j\eta_k$, où η_j figure le caractère fonctionnel de sa mineure et η_k celui de leur conclusion, selon (<u>III</u>). On a ici $\eta_1 = F\eta_2\eta_3$, (3) on attribue aux X_k de cette construction qui sont K ou S le η donné respectivement par (FK) et par (FS). Ici $\eta_1 = FF\alpha F\beta\gamma FF\alpha\beta F\alpha\gamma$, $\eta_2 = F\alpha F\beta\alpha$, (4) pour chaque X_i qui est à la fois la majeure d'un combinateur X_k moléculaire, et identique à K ou à S, on a donc différents η, (5) on examine alors en tirant toutes les conséquences des égalités si la possession de ces différents η est compatible. Elle ne l'est pas si l'analyse aboutit à des absurdités (p. ex. à identifier α à $F\alpha\beta$). Aucun caractère fonctionnel n'est donc déductible pour X. Elle est compatible dans le cas contraire, la déduction de ηX est possible et la preuve de compatibilité en fournit le modèle. Il est clair dans l'exemple que $\gamma = \alpha$, de là $\eta_1 = FF\alpha F\beta\alpha FF\alpha\beta F\alpha\alpha$. On a:

$$\frac{FF\alpha F\beta\alpha FF\alpha\beta F\alpha\alpha S \qquad F\alpha F\beta\alpha K}{FF\alpha\beta F\alpha\alpha(SK)}$$

Ce théorème peut être formulé plus généralement: il demeure vrai pour les déductions par (F) depuis tout ensemble de prémisses autres que (FK) (FS) exprimant le caractère fonctionnel d'un ensemble de termes primitifs $t_1, \ldots, t_p$. Il suffit de remplacer dans sa formulation et dans sa preuve K, S par $t_1, \ldots, t_p$, (FK) (FS) par $(Ft_1), \ldots, (Ft_p)$. Il demeure vrai également si les termes dont les schémas d'axiomes donnent le caractère fonctionnel ne sont pas des primitifs (p. ex. si (FI) est ajouté à (FK) (FS) dans un langage où K et S seulement sont des primitifs), dès lors que la construction de X est unique. Nous aurons à faire usage de ce théorème mais c'est un autre résultat de Curry qui intéresse plus directement notre problématique.

Si aux schémas d'axiomes (FK) (FS) on applique la transformation T suivante: on remplace F par P (qui note l'implication et en écriture préfixée) et on supprime le sujet, c.-à-d. le combinateur en question, on obtient respectivement: (1) $P\alpha P\beta\alpha$ (2) $PP\alpha P\beta\gamma PP\alpha\beta P\alpha\gamma$. Par la même transformation T, la règle (F) devient $\frac{P\alpha\beta \quad \alpha}{\beta}$ qui est la règle (P) de modus ponens. Or, on sait que (1) et (2) forment avec (P) un ensemble de schémas d'axiomes complet pour le calcul propositionnel intuitionniste $\mathfrak{J}$ de l'implication pure (c.-à-d. sans négation). Nous dirons en bref "axiomatisent $\mathfrak{J}$", Il s'ensuit par récurrence qu'à toute thèse de $\mathcal{F}_1$ correspond par T une thèse de $\mathfrak{J}$, et que, en appelant (PX) la formule qui correspond par T à (FX), si (FZ) est déductible par (F) de deux prémisses (FX)(FY), alors (PZ) est déductible par (P) de (PX)(PY).

On peut donc se demander si les schémas d'axiomes qui caractériseraient fonctionnellement les combinateurs d'une base quelconque correspondent de la même manière, c.-à-d. par T, à un ensemble complet de schémas d'axiomes pour $\mathfrak{J}$. Curry indique seulement que pour les bases connues $\{K, W, C, B\}$ et $\{K, W, B'\}$, dont chaque combinateur possède dans $\mathcal{F}_1$ un caractère fonctionnel, T obtient comme pour $\{K, S\}$ un tel ensemble. En allant un peu plus loin, nous démontrerons le <u>théorème</u> suivant:

Soit un ensemble de combinateurs $\{X_1, \ldots, X_m\}$ dont chacun possède dans $\mathcal{F}_1$ (où $\{K, S\}$ est une base) un définissant $X'_1, \ldots, X'_m$, respectivement, ayant un caractère fonctionnel, c.-à-d. tel qu'on ait $\eta_1 X'_1, \ldots, \eta_m X'_m$. Soit $\eta_a K$ et $\eta_b S$ les expressions (FK) (FS). Les formules $(PX'_1), \ldots, (PX'_m)$ obtenues en appliquant T à $\eta_1 X'_1, \ldots, \eta_m X'_m$, soit en bref $\eta_1^P, \ldots, \eta_m^P$, axiomatisent $\mathfrak{J}$ si et seulement si dans le système $\mathcal{F}_2$ dont $X_1, \ldots, X_m$ sont les seuls primitifs et $\eta_1 X_1, \ldots, \eta_m X_m$ les seuls schémas d'axiomes

(1) il existe des combinaisons de $X_1, \ldots, X_m$, disons Q_1 et Q_2, telles que $\eta_a Q_1$, $\eta_b Q_2$;

(2) $\eta_a Q_1$, $\eta_b Q_2$ se déduisent par (F) de $\eta_1 X_1, \ldots, \eta_m X_m$ (ou se confondent avec $\eta_1 X_1$ ou avec $\eta_2 X_2, \ldots,$ ou avec $\eta_m X_m$ si l'un des $X_1, \ldots, X_m$ est K ou S).

Si (1) et (2) sont vrais, en effet, comme à toute déduction s'effectuant sur des formules de $\mathcal{F}_1$ ou sur des formules de $\mathcal{F}_2$, il correspond une déduction s'effectuant sur les formules qui leur correspondent par T, $\eta_1^P, \ldots, \eta_m^P$ se déduisent des schémas d'axiomes η_a^P, η_b^P s'ils ne se confondent pas avec eux, et η_a^P, η_b^P se déduisent des schémas d'axiomes $\eta_1^P, \ldots, \eta_m^P$ s'ils ne se confondent pas avec eux. Les deux systèmes sont donc déductivement équivalents. Comme le premier axiomatise J, le second également.

Montrons que, réciproquement, si (PX'_1), ..., (PX'_m), soit η_1^P, ..., η_m^P, axiomatisent J, alors (1) et (2) sont vrais. Supposons d'abord que chaque η_1^P, ..., η_m^P est différent de η_a^P η_b^P. Comme η_a^P, η_b^P axiomatisent J, et comme par hypothèse η_1^P ..., η_m^P également, les deux systèmes sont déductivement équivalents. Or, si dans chaque formule d'une déduction qui obtient η_a^P, η_b^P de η_1^P, ..., η_m^P, on remplace P par F et si on applique η_1, ..., η_m respectivement à X_1, ..., X_m, ce qui forme $\eta_1 X_1$, ..., $\eta_m X_m$, on obtiendra par (F) $\eta_a Q_1$, $\eta_b Q_2$, où Q_1, Q_2 sont des combinaisons de X_1, ..., X_m. En effet, chaque déduction par (P) est ainsi transformée en une déduction par (F), le remplacement de P par F déterminant une formule unique et le sujet de la conclusion étant déterminé de manière unique par ceux des prémisses. Supposons maintenant qu'il y ait un η_i^P (i = 1 ... m) qui se confonde avec η_a^P ou avec η_b^P, et soit X_i le sujet attribué à η_i, alors (1) et (2) sont vrais car $\eta_a Q_1$ où $Q_1 = K$, ou bien $\eta_b Q_2$, où $Q_2 = S$ se confond avec $\eta_i X_i$. Donc, si les formules (PX'_1), ..., (PX'_m), obtenues comme indiqué, axiomatisent J, alors (1) et (2) sont vrais.

Notons que (1) revient à exiger qu'il y ait dans $\mathcal{F}_2$ deux combinateurs Q_1, Q_2 ayant les caractères fonctionnels de K et de S, respectivement, et non pas que Q_1 soit un définissant de K, Q_2 un définissant de S. Comme le remarque Curry, en effet, sur exemple, deux combinateurs peuvent avoir le même caractère fonctionnel, comme Q_1 et K, Q_2 et S, sans avoir la même règle de récriture. On peut démontrer toutefois:

<u>Corollaire</u>: soit $\{X_1, ..., X_m\}$, (PX'_1), ..., (PX'_m), comme dans le théorème précédent, mais où, en outre, $\{X_1, ..., X_m\}$ est une base. (PX'_1), ..., (PX'_m) axiomatise J si (a): les formules $\eta_a K'$, $\eta_b S'$, où K' et S' sont des définissants dans $\mathcal{F}_2$ de K et de S respectivement, se déduisent par (F) de $\eta_1 X_1$, ..., $\eta_m X_m$, à moins que $\eta_a K$, $\eta_b S$ ne figurent parmi $\eta_1 X_1$, ..., $\eta_m X_m$.

En effet, si (a) est vrai, alors (1) et (2) sont vrais, K' et S' étant des combinaisons de X_1, ..., X_m; donc (PX'_1), ..., (PX'_m) axiomatisent J. En revanche, la condition (a) n'est pas nécessaire car si (PX'_1), ..., (PX'_m) axiomatisent J alors (1) et (2) sont vrais, selon le théorème précédent, mais (1) et (2) n'impliquent pas (a), les combinateurs Q_1, Q_2 pouvant ne pas être K', S'.

On ajoutera que si un ensemble de formules $M_1, \ldots, M_p$ axiomatisent $\mathcal{J}$, alors pour les expressions $\eta_1, \ldots, \eta_p$ obtenues en remplaçant P par F dans $M_1, \ldots, M_p$, il n'existe pas toujours un ensemble de combinateurs $X_1, \ldots, X_p$ tels que pour leurs définissants $X'_1, \ldots, X'_p$ dans $\mathcal{F}_1$ on ait $\eta_1 X'_1, \ldots, \eta_p X'_p$, et tels que $X_1, \ldots, X_p$ forment une base.

Nous nous contenterons de remarquer qu'on connaît pour $\mathcal{J}$ des systèmes à un seul schéma d'axiome et qu'aucune base n'a qu'un seul élément.

Nous terminerons en construisant à partir du corollaire précédent et d'une base de combinateurs déjà donnée un ensemble de formules qui axiomatisent $\mathcal{J}$. L'exemple sera simple pour illustrer seulement la méthode.

Soit $\{C, A, S\}$ avec $Axy \longrightarrow y$. On a établi plus haut que $\{C, A, S\}$ est une base et qu'elle permet d'obtenir $K =_{df} CA$. D'autre part, dans $\mathcal{F}_1$, $A =_{df} K(SKK)$; en effet: $K(SKK)xy \longrightarrow SKKy \longrightarrow Ky(Ky) \longrightarrow y$. Or, on peut déduire dans $\mathcal{F}_1$: $F\alpha F\beta\beta(K(SKK))$, car d'une part on a $F\alpha\alpha(SKK)$, comme Curry l'établit p. 285, et donc:

$$\frac{1.\ FF\beta\beta F\alpha F\beta\beta K \qquad\qquad 2.\ F\beta\beta(SKK)}{F\alpha F\beta\beta(K(SKK)}$$

où 1. est (FK) avec $\alpha = F\beta\beta$, $\beta = \alpha$, et 2. est (F(SKK)) avec $\alpha = \beta$. On a aussi dans $\mathcal{F}_1$ $FF\alpha F\beta\gamma F\beta F\alpha\gamma C$ (cf. p. 279).

D'autre part, la formule $\eta_a K'$, c.-à-d. $F\alpha F\beta\alpha(CA)$, se déduit par (F) dans $\mathcal{F}_2$ qui possède les primitifs C, A, S et les schémas d'axiomes suivants:

(FC) $FF\alpha F\beta\gamma F\beta F\alpha\gamma C$,
(FA) $F\alpha F\beta\beta A$,
(FS) $FF\alpha F\beta\gamma FF\alpha\beta F\alpha\gamma S$.

Il vient en effet en utilisant le théorème de construction du sujet:

$$\frac{1.\ FF\beta F\alpha\alpha F\alpha F\beta\alpha C \qquad\qquad 2.\ F\beta F\alpha\alpha A}{3.\ F\alpha F\beta\alpha(CA)}$$

où 1. est (FC) avec $\alpha = \beta$, $\beta = \alpha$, $\gamma = \alpha$, et 2. est (FA) avec $\alpha = \beta$, $\beta = \alpha$.

Dès lors, l'ensemble

$$PP\alpha P\beta\gamma P\beta P\alpha\gamma$$
$$P\alpha P\beta\beta$$
$$PP\alpha P\beta\gamma PP\alpha\beta P\alpha\gamma$$

axiomatise J. Rappelons qu'il suffit d'ajouter le schéma d'axiome $PPP\alpha\beta\alpha\alpha$ à une axiomatisation de J, p. ex. à celle qui précède, pour axiomatiser le calcul classique d'implication.

En utilisant les théorèmes portant sur ce qui est nommé "la stratification", dont nous n'avons pas pu traiter, on obtiendrait des résultats plus élégants et plus forts.

Cette manière d'obtenir la notion P et ses propriétés dans J, en plus de son utilité technique, illustre bien le fait qu'une partie du travail mathématique consiste à atteindre des notions dites "de base" dans une certaine théorie au terme d'un parcours plus ou moins long effectué avec les moyens d'une autre. Il resterait ici à comprendre ce qui permet à F d'être une sorte de généralisation de P. Ce serait l'objet d'une autre étude.

Université Lyon III
France

Jean-Pierre Ginisti

TWORZENIE POJĘĆ W LOGICE KOMBINATORYCZNEJ

Przedmiotem pracy jest logika kombinatoryczna, gałąź logiki ufundowana przez takich autorów, jak Schönfinkel i Curry, której najbardziej znaczącą cechą jest tworzenie języków formalnych pozbawionych zmiennych. W pierwszym rzędzie przedstawia się pojęcia bazowe tego przedsięwzięcia, tj. teorię kombinatorów i teorię funkcjonalności. Podejmując i kontynuując rezultaty, jakie osiągnął Curry, autor poddaje analizie sposób, w jaki można otrzymać zupełny zbiór aksjomatów dla rachunku zdaniowego intuicjonistycznego, wychodząc od utworzenia zupełnego zbioru kombinatorów pierwotnych.