

## DYNAMICZNE STOCHASTYCZNE MODELE RÓWNOWAGI OGÓLNEJ: ZARYS METODOLOGII BADAŃ EMPIRYCZNYCH<sup>1</sup>

RENATA WRÓBEL-ROTTER

Katedra Ekonometrii  
Akademia Ekonomiczna w Krakowie  
PL 31-150 Kraków, ul. Rakowicka 27  
*e-mail: eewrobel@cyf-kr.edu.pl*

Praca przedstawiona na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych i Komisji Statystyczno-  
Demograficznej Oddziału PAN w Krakowie oraz Polskiego Towarzystwa Statystycznego w dniu  
21 lutego 2007 r. przez Renatę Wróbel-Rotter.

### ABSTRACT

Renata Wróbel-Rotter, 2007. *Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: an introduction to  
empirical research*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2007, 48: 69–93.

The paper presents general idea of construction and estimation of Dynamic Stochastic General  
Equilibrium Models. Models belonging to the class of DSGE combine in one specification  
the optimization behavior of consumers and producers with mechanisms that allow to model  
the nominal and real rigidities observed at the macroeconomic level. DSGE models are widely  
applied by financial institutions as a consequence of their ability to flexibly include and test  
alternative economic hypotheses and the existence of estimation methods. The article begins  
by reviewing main components of the theoretical model with discussion of the most  
important assumptions, which is followed by presentation of methods for solving rational  
expectation models and the Bayesian estimation of structural parameters.

### KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

dyanamic Stochastic General Equilibrium model, rational expectations, utility and profit  
maximisation, Bayesian inference, Markov Chain Monte Carlo

dynamiczne stochastyczny model równowagi ogólnej, racjonalne oczekiwania, maksymali-  
zacja zysku i użyteczności, wnioskowanie bayesowskie, metody Monte Carlo oparte na  
łańcuchach Markowa

---

<sup>1</sup> Praca wykonana w ramach badań statutowych Katedry Ekonometrii Akademii Ekonomicznej  
w Krakowie. Autorka pragnie złożyć podziękowania Profesorowi Jackowi Osiewalskiemu oraz uczestni-  
kom seminarium Katedry Ekonometrii za komentarze i dyskusję podczas prezentacji opracowania.

## 1. WSTĘP

Modele równowagi ogólnej są obecnie podstawowymi narzędziami analizy dynamiki głównych zmiennych makroekonomicznych, cykli koniunkturalnych oraz wpływu polityki pieniężnej na sferę realną gospodarki. Coraz częściej we współczesnych badaniach empirycznych wykorzystuje się modele należące do klasy dynamicznych, stochastycznych modeli równowagi ogólnej (ang. *Dynamic Stochastic General Equilibrium Models* — DSGE), spełniających kryteria odpowiedniego zaawansowania teoretycznego i estymacyjnego oraz możliwości implementacji. Modele te odzwierciedlające w swojej strukturze założenia teorii makroekonomii równocześnie bazują na fundamentach mikroekonomicznych opisujących postępowanie producentów i konsumentów, co może być pomocne w analizie długoterminowej ewolucji gospodarki, szczególnie w sytuacjach zmiany sposobu podejmowania decyzji przez decydentów fiskalnych i monetarnych oraz w przypadku, kiedy dane empiryczne charakteryzują się znaczną niepewnością. Ich zastosowanie w bankach centralnych oraz w instytucjach finansowych o charakterze międzynarodowym stało się możliwe dzięki opracowaniu spójnych metod wnioskowania o parametrach modeli oraz rozwojowi metod numerycznych. Zagadnienia specyfikacji i bayesowskiej estymacji modeli DSGE, opis procesów optymalizacyjnych podmiotów gospodarczych i ich reguł decyzyjnych oraz dyskusja zasadniczych założeń są tematem niniejszego opracowania. Charakter przeglądowy i systematyzujący główne problemy metodologiczne określa ramy niniejszego opracowania, które powinno być traktowane jako wstęp do dalszych badań nad możliwościami zastosowania DSGE w modelowaniu gospodarki polskiej.

## 2. GENEZA MODELI DSGE

Modele równowagi ogólnej mają za zadanie opisanie gospodarki kraju bądź grupy krajów jako całości, umożliwiając badanie wpływu czynników egzogenicznych i endogenicznych na poziom kluczowych zmiennych makroekonomicznych, określenie determinantów wzrostu gospodarczego, wyjaśnienie fluktuacji makroekonomicznych i cyklu koniunkturalnego, analizę mechanizmu transmisyjnego, opisanie propagacji zakłóceń popytowych, podażowych, technologicznych i strukturalnych, prognozowanie efektów zmian polityki gospodarczej oraz wyjaśnienie persystencji w szeregach danych makroekonomicznych. Termin „dynamiczne stochastyczne modele równowagi ogólnej” odnosi się do szerokiej klasy modeli makroekonomicznych, które obejmują zarówno neoklasyczne modele wzrostu jak i modele monetarne z nominalnymi i realnymi nieelastycznościami (por. m.in. King i wsp. 1988; Christiano i wsp. 1999, 2005). Należą one do klasy modeli makroekonomicznych o niewielkiej skali podobnie jak wektorowa autoregresja (VAR — Sims, 1980) czy koncepcje związane ze szkołą

Realnego Cyklu Koniunkturalnego i pracami Kydlanda i Prescottta (1982), które powstały w odpowiedzi na krytykę stosowanych do końca lat 70. wielorównaniowych strukturalnych modeli popytowych opracowanych pod kierunkiem Komisji Cowlesa (podsumowanie badań — Fair, 1994). Sposób konstrukcji modeli DSGE pozwala na odparcie głównych zarzutów kierowanych pod adresem modeli popytowych, które koncentrowały się wokół nieodpowiedniego modelowania dynamiki gospodarki, identyfikacji równań behawioralnych oraz formowania oczekiwań podmiotów gospodarczych w odpowiedzi na zmiany polityki gospodarczej (por. m.in. Lucas, 1976).

Obecnie stosowane w praktyce modele makroekonomiczne ujmujące dynamikę całej gospodarki i wywodzące się z teorii ekonomii wyłoniły się w efekcie obserwowanej w literaturze ostatniej dekady (por. np. Lane, 1999) tendencji zmierzającej do opracowania spójnych ram modelowania makroekonomicznego, która doprowadziła do połączenia koncepcji dynamicznych modeli równowagi ogólnej (ang. *Dynamic General Equilibrium* — DGE), zakładających równoważące się rynki oraz racjonalne oczekiwania podmiotów gospodarczych, z koncepcją niedoskonałej konkurencji i nominalnych nieelastyczności występujących w gospodarce (Obstfeld i Rogoff, 1995). W konsekwencji powstałe modele zaliczane są zarówno do nurtu nowej klasycznej syntezy jak i nazywane bywają nowo-keynesowskimi dynamicznymi modelami równowagi ogólnej (Goodfriend i King, 1997; Rotemberg i Woodford, 1997; Rabanal i Rubio-Ramírez, 2005). Modele te głównie stanowiły koncepcje teoretyczne, które po kalibracji parametrów strukturalnych, wykorzystywano m.in. do porównań rezultatów uzyskanych z modeli wektorowej autoregresji oraz konstrukcji restrykcji ekonomicznych poprawiających zdolności prognostyczne VAR (Malley i wsp., 2005; Lane, 1999; Ingram i Whiteman, 1994). Obserwowane w gospodarce nieprzewidywalne czynniki losowe oraz występowanie innych zakłóceń egzogenicznych spowodowało wprowadzenie do modeli makroekonomicznych dodatkowych licznym stacjonarnych i niestacjonarnych procesów stochastycznych i ukształtowanie się klasy modeli nazywanych w literaturze stochastycznymi dynamicznymi modelami równowagi ogólnej (Chang i Schorfheide, 2003). Zaliczane są one obecnie do nurtu Nowej Makroekonomii Gospodarki Otwartej (ang. *New Open Economy Macroeconomics* — NOEM, por. np. Bergin, 2003; Lubik i Schorfheide, 2005).

Skonstruowanie układu dynamicznego opisującego gospodarke i jednocześnie wywodzącego się z teorii ekonomii, zawierającego znaczną liczbę niestacjonarnych procesów losowych opisujących ewolucję technologii, zmiennych o charakterze błędzenia losowego oraz nominalnych i realnych opóźnień w dostosowywaniu się cen i płac, okazało się mieć kluczowe znaczenie w opisie persystencji szeregów makroekonomicznych. Opracowanie metod efektywnej estymacji parametrów strukturalnych oraz możliwość elastycznego formułowania i testowania zróżnicowanych hipotez ekonomicznych przesądziło o ich

szerokich możliwościach aplikacyjnych. Model DSGE skonstruowany przez Christiano i wsp. (2005) dla gospodarki zamkniętej uważany jest za pionierski w zakresie budowy średniej wielkości empirycznych systemów służących modelowaniu polityki pieniężnej. Dalsze prace rozwijały DSGE dla gospodarek zamkniętych, następnie wprowadzono założenia gospodarki otwartej, stanowiące obecnie dominujący nurt badań empirycznych. Modele DSGE o większej skali niż pierwotne modele teoretyczne należące do nurtu NOEM, i w większości kalibrowane, znalazły zastosowanie przede wszystkim w bankach centralnych: Erceg, Guerrieri i Gust (2003) model SIGMA skonstruowany dla Federal Reserve Board, Benigno i Thoenissen (2003) dla Bank of England, Coletti i wsp. (1996) i Murchison i wsp. (2004) dla Bank of Canada, Lindé i wsp. (2004) oraz Adolfson i wsp. (2005) dla Riksbank, Kortelainen (2002) dla Bank of Finland oraz m.in. Laxton i Presenti (2003) dla MFW. Zainteresowanie budową modeli opisujących mechanizm transmisyjny oraz ujmujących zarówno krótkookresową jak i długookresową dynamikę gospodarki wynika częściowo z konieczności dostarczenia instytucjom finansowym o znaczeniu globalnym narzędzia umożliwiającego badanie wpływu polityki pieniężnej na zmienne makroekonomiczne oraz częściowo z próby odpowiedzi na pytanie o istnienie i trwałość skutków decyzji pieniężnych w czasie. W obecnym stanie badań modele DSGE wydają się stanowić najlepsze narzędzie umożliwiające odpowiedź na te pytania.

### 3. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA

Modele DSGE są konstrukcją łączącą i umożliwiającą praktyczną implementację teorii mikroekonomii i makroekonomii oraz wykorzystującą zagadnienia stochastycznego dynamicznego programowania do opisu problemów decyzyjnych reprezentatywnego konsumenta i producenta. Zachowanie podmiotów gospodarczych jest wynikiem stosowania reguł decyzyjnych i rozwiązania zagadnień optymalizacji w czasie, których postać wynika z kształtu preferencji konsumentów, technologii stosowanej przez przedsiębiorstwa oraz innych założeń o strukturze sfery realnej gospodarki. Maksymalizacja użyteczności konsumentów oraz maksymalizacja zysku producentów na poziomie mikroekonomicznym są ujęte w modelu razem z założeniami konstruującymi wewnętrzny mechanizm pozwalający na naśladowanie obserwowanej w szeregach danych makroekonomicznych inercji w reakcji na zmianę warunków zewnętrznych. Niepewność związana z przyszłymi warunkami ekonomicznymi, np. z nominalnymi stopami procentowymi ustalonymi przez bank centralny, czy też z produktywnością czynników produkcji ujmowana jest poprzez uwzględnienie egzogenicznych procesów stochastycznych i zakłóceń strukturalnych (wstrząsów ekonomicznych bądź szoków, ang. *shock*) wpływających na zmianę poziomu technologii oraz generujących nieprzewidziane odchylenia od reguły stopy procentowej

decydenta monetarnego. Cechy charakterystyczne modeli DSGE obejmują ponadto założenia monopolistycznej i doskonałej konkurencji dla ustalonych grup przedsiębiorstw, znaczną liczbę nominalnych i realnych nieelastyczności cen i płac, akumulację kapitału wraz z kosztem dostosowania jego zasobu i kosztami zmiany poziomu inwestycji, występowaniem rynków pracy, kształtowanie się przyzwyczajzeń w konsumpcji, zróżnicowanie sektorów produkcyjnych i prowadzących wymianę z zagranicą, bezpośrednie modelowanie gospodarki zagranicznej i polityki fiskalnej oraz istnienie zmiennej w czasie reguły stopy procentowej. Skonstruowanie modelu dla gospodarki otwartej wymaga dodatkowo bezpośredniego uwzględnienia kursu walutowego oraz zagregowanych zmiennych, charakteryzujących wszystkie gospodarki zagraniczne traktowane jako całość, np. średniej zagranicznej stopy procentowej czy całkowitego popytu na eksport. Najczęściej przyjmowane w modelach wykorzystywanych w praktyce założenia małej gospodarki otwartej powodują, że podmioty krajowe nie mają wpływu na resztę świata a zmienne makroekonomiczne opisujące gospodarkę zagraniczną są traktowane w modelu egzogenicznie.

Model DSGE, stanowiąc konstrukcję teoretyczną, ujmującą dynamikę gospodarki, opisuje również jej ewolucję w czasie oraz zmiany na skutek oddziaływania stochastycznych zakłóceń o charakterze zewnętrznym i wewnętrznym, dotyczących kluczowych wielkości wpływających na technologię czy też preferencje konsumentów. Określone grupy podmiotów występujących w modelu, mające w uproszczony sposób odzwierciedlać jednostki funkcjonujące w gospodarce, kierujących się w swoim postępowaniu ustalonymi zagadnieniami optymalizacyjnymi i regułami decyzyjnymi, które po odpowiednim zapisaniu warunków koniecznych optymalizacji wraz z ograniczeniami zasobowymi i warunkami równoważenia się rynków, tworzą równania strukturalne modelu. Standardowo przyjmowane w modelach makroekonomicznych założenia reprezentatywnego konsumenta pozwalają na ujednoczenie zagadnień decyzyjnych, a w szczególnych przypadkach na ich zapisanie w formie jednego programu dynamicznego dla zagregowanej konsumpcji i innych zmiennych, występujących w funkcji użyteczności oraz niekiedy przyjęcie koncepcji społecznego decydenta (ang. *social planner*, Woodford, 2003).

Systemy równań tworzące model DSGE mogą być zarówno kalibrowane jak i estymowane, z uwzględnieniem dodatkowych informacji pochodzących z innych źródeł, np. badań mikroekonomicznych. Analiza zdolności modeli kalibrowanych do opisu stylizowanych faktów z gospodarki USA wskazuje na potencjalne problemy oraz potrzebę stosowania w praktyce metod estymacji parametrów strukturalnych (Söderström i wsp., 2002). Modele DSGE o dużej skali funkcjonujące w instytucjach finansowych jednak najczęściej są kalibrowane (Erceg i wsp., 2005; Laxton i Presenti, 2003; Kortelainen, 2002), stosuje się niekiedy przybliżone metody estymacji, wykorzystujące funkcje odpowiedzi impulsowych (Black i wsp., 1997), rzadziej metodę największej wiarygodności

(Bouakez i wsp., 2002; Moran i Dolar, 2002) oraz wnioskowanie bayesowskie (Smets i Wouters, 2003; Adolfson i wsp., 2005). Zastosowanie wnioskowania bayesowskiego do estymacji parametrów strukturalnych i parametrów opisujących strukturę stochastyczną modeli DSGE wiąże się z koncepcją bayesowskiej kalibracji (Canova, 1994; DeJong i wsp., 1996; Geweke, 1999) oraz z pracami bezpośrednio prezentującymi możliwości jej praktycznego wykorzystania, z których za pionierską uważa się rozprawę doktorską J. Landon-Lane'a z 1998 roku, (Landon-Lane, 2000) oraz artykuły: DeJong i wsp., 2000; Schorfheide, 2000; Otrok, 2001). Funkcję wiarygodności w modelach DSGE konstruuje się na podstawie danych z kilku bądź kilkunastu zagregowanych szeregów makroekonomicznych, do których należą m.in.: PKB, realny kurs walutowy, realne płace, krótkookresowa stopa procentowa, wskaźnik inflacji i inne wielkości przyjęte do estymacji parametrów strukturalnych. Zwiększenie liczby szeregów czasowych, na których estymowany jest model, może prowadzić do precyzyjniejszego oszacowania jego parametrów.

Główna różnica między DSGE a wcześniejszymi modelami makroekonomicznymi, jak np. Area-Wide Model dla strefy Euro, polega na tym, że parametry i procesy stochastyczne występujące w równaniach strukturalnych są związane z parametrami fundamentalnymi (ang. *deep parameters*), opisującymi preferencje, technologię oraz ograniczenia zasobowe decydentów monetarnych i fiskalnych (Fagan i wsp., 2001). Model łączący parametry formy zredukowanej z parametrami fundamentalnymi, których duża zmienność pod wpływem czynników nominalnych jest uważana za mało prawdopodobną (Pagan, 2001), wydaje się odpowiedni do analizy wariantów polityki pieniężnej i uwzględniać argumenty Lucasa (1976). Mikroekonomiczne podstawy, na których jest konstruowany model, powodują, że bezpośrednio uwzględnia się oczekiwania podmiotów co do kształtowania się przyszłych warunków gospodarczych oraz mechanizmy ustalania się cen i wydatków konsumpcyjnych. Model DSGE rozważa się również w kontekście analizy społecznych konsekwencji alternatywnych scenariuszy polityki pieniężnej i fiskalnej, wykorzystując użyteczność gospodarstw domowych jako miarę dobrobytu społecznego (An i Schorfheide, 2006; Otrok, 2001).

#### 4. ZAGADNIENIA SPECYFIKACJI MODELU

Model DSGE jest konstrukcją teoretyczną, łączącą w jednym systemie teorię makroekonomii i mikroekonomii, co powoduje, że wszelkie wielkości opisujące gospodarke i prognozy są wynikiem założonej w modelu teorii oraz struktury procesów stochastycznych, kształtującej jej dynamikę. Ogólny charakter DSGE wskazuje na kilka potencjalnych źródeł jego nieodpowiedniej konstrukcji, mających swoje przyczyny w niepoprawnym określeniu relacji strukturalnych,

preferencji konsumentów i technologii, pominięciu zależności nieliniowych, nieprawidłowej formie procesów egzogenicznych i stochastycznych oraz symetrycznym traktowaniu podmiotów w modelach dla gospodarek otwartych (Lubik i Schorfheide, 2005). Zmniejszenie stopnia niepoprawnej specyfikacji DSGE jest możliwe poprzez zwiększenie liczby zmiennych losowych modelujących zakłócenia strukturalne w modelu zapisanym w postaci systemu racjonalnych oczekiwani (Smets i Wouters, 2003; Lubik i Schorfheide, 2005), lub też wprowadzenie stochastycznych zakłóceń do równania obserwacji, bez nadawania im interpretacji ekonomicznej (Sargent, 1989). Ocena modeli DSGE jest najczęściej dokonywana po ich zapisaniu w formie VAR z odpowiednimi parametrycznymi restrykcjami i analizie ich zgodności z danymi empirycznymi i modelem referencyjnym (Schorfheide, 2000).

Opracowanie formalnych metod estymacji modeli DSGE pozwoliło na empiryczne badania stopnia ich niepoprawnej specyfikacji, które uzasadniają stwierdzenie, że w obecnie stosowanych systemach nie jest tak znaczący jak w poprzedniej generacji kalibrowanych modeli makroekonomicznych. Stopień niezgodności restrykcji, wynikających z mikroekonomicznych zagadnień optymalizacyjnych i reguł decyzyjnych, z danymi makroekonomicznymi może być również analizowany w kontekście rozkładu *a priori* i *a posteriori* na gruncie wnioskowania bayesowskiego. Del Negro i Schorfheide (2004) przedstawili propozycję konstrukcji rozkładu *a priori* dla VAR w formie ograniczeń wynikających z teorii ekonomicznej, ujętej przez model DSGE, a następnie Del Negro i wsp. (2005) omówili wpływ ich stopniowego uwalniania na zmianę brzegowej gęstości obserwacji oraz przebieg funkcji odpowiedzi impulsowych. Formalne porównanie brzegowych gęstości obserwacji referencyjnego modelu VAR z rozkładem *a priori* typu Minnesota oraz estymowanego modelu DSGE dla dwóch krajów przedstawili Lubik i Schorfheide (2005), natomiast procedury porównywania zbioru modeli DSGE za pomocą funkcji straty zaproponował Schorfheide (1999, 2000). Omówienie zagadnień polityki pieniężnej w przypadku modeli z pewnym stopniem nieodpowiedniej specyfikacji można znaleźć w pracy Del Negro i Schorfheide (2005), alternatywne ekonometryczne interpretacje modeli DSGE wraz z dyskusją ich założeń prezentuje Geweke (1999).

Obecność potencjalnie niezgodnych z danymi empirycznymi założeń w modelach DSGE nie oznacza ich dyskwalifikacji w świetle VAR, w których duża liczba swobodnych parametrów może prowadzić do znacznej niepewności związanej z wartościami prognozowanymi. Modele VAR nie pozwalają na interpretację dynamiki obserwowanej w szeregach makroekonomicznych w kategoriach zachowania racjonalnych i optymalizujących swoje decyzje podmiotów gospodarczych oraz nie modelują *explicite* wpływu zmian reguł decyzyjnych polityki pieniężnej i fiskalnej na ich zachowanie się oraz kształtowanie oczekiwań. Obecnie rozwijana klasa modeli DSGE wydaje się posiadać własności empiryczne bliskie modelom VAR i jednocześnie pozostaje w pełni uzasadniona

przez teorię makroekonomiczną. Nieliniowe zależności między zmiennymi makroekonomicznymi mogą być w pełni odzwierciedlone przez nieliniowy charakter modeli DSGE, pozwalających równocześnie na ich efektywną estymację, natomiast aproksymacja DSGE liniowymi modelami racjonalnych oczekiwań jest dokonywana w celu uproszczenia obliczeń numerycznych, związanych z konstrukcją funkcji wiarygodności oraz zastosowaniem filtru Kalmana.

## 5. GOSPODARSTWA DOMOWE

Gospodarstwa domowe podejmują kluczowe decyzje w modelach DSGE, wpływając na kształtowanie się poziomu aktywności w teoretycznej gospodarce krajowej, określając m.in.: podaż pracy, rodzaj konsumpcji, alokację środków pieniężnych między krajowe i zagraniczne aktywa finansowe, które mają związek z oczekiwanymi zmianami kursu walutowego w przypadku gospodarki otwartej — stanowią jedyne źródło kapitału dla przedsiębiorstw krajowych oraz ustalają wielkość jego podaży i inwestycji, warunkową względem danego kosztu dostosowania kapitału (ang. *capital adjustment costs*). Rynek pracy w zależności od sformułowania modelu jest traktowany jako doskonale konkurencyjny w sytuacji przyjęcia założenia jednorodności gospodarstw domowych (Christiano i wsp., 2005; Altig i wsp., 2004), bądź jako monopolistyczny w przypadku ich heterogeniczności, określanej przez niepowtarzalność posiadanych kwalifikacji (Adolfson i wsp., 2005). Modelowanie nominalnych nieelastyczności płac obserwowanych w szeregach makroekonomicznych uzyskuje się po wprowadzeniu mechanizmu Calva (1983) do procesu ich ustalania się w modelu oraz założeniu określania wysokości wynagrodzenia przez konsumentów, opierając się na rozwiązaniu zagadnienia maksymalizacji użyteczności. Mechanizm Calvo (1983) implikuje, że w danym momencie jedynie frakcja gospodarstw domowych rozwiązuje zagadnienie optymalizacyjne, natomiast pozostała część uaktualnia stawkę płacy wykorzystując przyjętą regułę indeksacyjną, zawierającą m.in. bieżący wskaźnik inflacji oraz oczekiwaną inflację w okresie następnym.

Decyzje konsumpcyjne i inwestycyjne gospodarstw domowych są opisywane w czasie przez ciąg identycznych zagadnień maksymalizacji użyteczności, niezmiennych dla każdego ze stanów przyszłości, warunkowych względem danego ciągu ograniczeń budżetowych. Liczba istniejących wiecznie gospodarstw domowych jest unormowana i indeksowa przez  $j \in (0, 1)$ . Preferencje konsumentów wyrażają się założoną postacią analityczną chwilowej funkcji użyteczności  $U(\cdot)$ , której argumentami są najczęściej: wielkość konsumpcji  $C_{j,t}$ , podaż pracy  $h_{j,t}$  oraz wartość realnych zasobów pieniężnych  $q_{j,t}$ . Continuum gospodarstw domowych, podejmując decyzje maksymalizuje warunkową względem ograniczenia budżetowego, oczekiwaną, nieskończoną sumę zdyskontowanych użyteczności:



$$E_0^j \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_{j,t}, h_{j,t}, q_{j,t}; \xi_t^j), \quad (1)$$

gdzie:  $E_0$  jest operatorem wartości oczekiwanej, warunkowej względem zbioru informacji posiadanej przez konsumenta w momencie początkowym,  $\beta$  jest wspólnym dla całej gospodarki czynnikiem dyskontującym,  $C_{j,t}$  oznacza agregat CES dóbr krajowych i importowanych nabywanych przez  $j$ -te gospodarstwo domowe w celach konsumpcyjnych i inwestycyjnych, natomiast  $\xi_t^j$  jest wektorem egzogenicznych procesów stochastycznych. Obejmuje on wszystkie zmienne losowe opisujące stochastyczną zmienność czynników realnych, wpływających na argumenty funkcji użyteczności, do których można zaliczyć zmienność w gustach gospodarstw domowych związaną z poziomem konsumpcji czy też ilością oferowanej pracy. Obecność procesów stochastycznych o charakterze realnym w funkcji użyteczności ma istotne znaczenie dla kształtowania się wartości zmiennych w równowadze modelu i określenie np. nominalnej stopy procentowej odpowiedniej dla zapewnienia stabilności cen (Woodford, 2003). Argumenty oraz postać analityczna funkcji  $U(\cdot)$ , zależą od przyjętych w modelu założeń; najczęściej są to funkcje o stałej awersji do ryzyka i ich uogólnienia (ang. *constant rate of risk aversion*, Lubik i Schorfheide, 2005; Erceg i wsp., 2005; Lindé i wsp., 2004; Walque i Wouters, 2004; Benigno i Thoenissen, 2003; Smets i Wouters, 2003), ich połączenia z postaciami logarytmicznymi (Adolfson i wsp., 2005) oraz funkcje CES (Kortelainen, 2002). Możliwa jest również alternatywna specyfikacja założeń modelowych poprzez uchylenia warunku nieskończonego horyzontu istnienia gospodarstw domowych (Kortelainen, 2002).

Funkcje użyteczności w modelach wykorzystywanych w praktyce bankowej najczęściej uwzględniają dodatkowe cechy opisujące kształtowanie się decyzji konsumentów. Poprzez wprowadzenie zmiennej  $C_{j,t-1}$ , modeluje się inercję zachowań konsumpcyjnych oraz zasadę kształtowania przyzwyczajeń (ang. *habit formation*), oznaczającą zmianę poziomu i rodzaju własnej konsumpcji na skutek systematycznego dostosowywania jej do obserwowanej konsumpcji innych gospodarstw domowych, według zasady „dorównać Kowalskim” (ang. *catching up with the Joneses*). Obecność w funkcji użyteczności realnych zasobów pieniężnych modeluje koszty transakcyjne związane z utrzymywaniem pewnego zasobu pieniądza nie przynoszącego dochodu oraz w sposób pośredni ujmuje nieelastyczności występujące w gospodarce, związane z koniecznością zawierania transakcji (ang. *transactions frictions*). O funkcji użyteczności  $U(\cdot)$  przyjmujemy standardowe neoklasyczne założenia: dla dowolnej realizacji wektora zakłóceń  $\xi_t$  jest to funkcja wklęsła i silnie rosnąca względem konsumpcji oraz dodatkowo addytywnie separowalna względem podaży pracy i zasobów pieniężnych. Kontrowersje związane z nazewnictwem

funkcji  $U(\cdot)$  — niekiedy nazywana jest ona „niebezpośrednią” funkcją użyteczności — dyskusja konsekwencji uchylenia poszczególnych założeń oraz ich wpływ na istnienie i określoność równowagi w modelu została zawarta m.in. w pracy Woodford (2003).

Ciąg ograniczeń budżetowych reprezentatywnego gospodarstwa domowego w kolejnych momentach  $t$  zawiera dodatkową informację na temat kształtowania się przepływów aktywów w modelowanej gospodarce. Ograniczenie budżetowe najczęściej jest zapisywane w formie prezentującej sposoby alokacji zasobów (lewa strona) oraz wskazującej źródła ich pochodzenia (prawa strona):

$$M_{j,t} + B_{j,t} + S_{j,t} \leq W_{j,t} + D_{j,t} - T_{j,t} \quad (2)$$

gdzie:

$M_{j,t}$  — całkowita ilość gotówki,

$B_{j,t}$  — nominalna wartość portfela krajowych i zagranicznych aktywów finansowych,

$S_{j,t}$  — całkowite wydatki gospodarstwa domowego na krajowe i zagraniczne dobra konsumpcyjne i inwestycyjne,

$W_{j,t}$  — całkowite dochody z pracy,

$D_{j,t}$  — dochody z portfela aktywów,

$T_{j,t}$  — podatki.

Modele wykorzystywane w analizie polityki pieniężnej posiadają znacznie bardziej rozbudowane ograniczenia budżetowe, uwzględniające ponadto: niepewność związaną z przychodem od zagranicznych aktywów finansowych, odpowiednie stopy podatkowe, koszt kapitału, koszt zmiany wielkości i stopnia wykorzystania kapitału, wydatki inwestycyjne gospodarstw domowych, transfery i inne zmienne wynikające z przyjętych założeń modelowych, odpowiadających sferze realnej gospodarki (por. np.: Adolfson i wsp., 2005; Erceg i wsp., 2005; Murchison i wsp., 2004; Benigno i Thoenissen, 2003; Smets i Wouters, 2003; Laxton i Presenti, 2003; Kortelainen, 2002; Black i wsp., 1997).

Ograniczenie budżetowe zapisywane jest podczas optymalizacji w formie równości ze względu na założenie racjonalności działania gospodarstw domowych oraz przyjmowane są dwa dodatkowe warunki brzegowe: istnieje granica zadłużenia (eliminująca schemat Ponzi) oraz restrykcja związana z akumulacją bogactwa (Woodford, 2003). Rozwiązanie zagadnienia maksymalizacji międzyokresowej funkcji użyteczności (1) przy ciągu ograniczeń budżetowych (2) prowadzi do warunków pierwszego rzędu w formie równań Eulera, obrazujących optymalne decyzje gospodarstwa domowego dla każdego momentu w zakresie ustalania wielkości konsumpcji, podaży pracy i kapitału, portfela aktywów oraz pozostałych zmiennych w zależności od specyfikacji, wykorzystywane następnie do estymacji parametrów fundamentalnych modelu. Założenia reprezentatywnego gospodarstwa domowego powodują, że w stanie stabilnym wybory doko-

nywane przez gospodarstwa domowe będą się pokrywały, co umożliwi odpowiednią agregację i transformację decyzji dokonywanych na poziomie mikroekonomicznym w decyzje na poziomie całej gospodarki oraz opisanie kształtowania się zmiennych makroekonomicznych.

## 6. SEKTOR PRODUKCYJNY

Sektor produkcyjny w modelach DSGE stanowią przedsiębiorstwa wytwarzające produkty pośrednie z nakładów pracy i kapitału, przetwarzane następnie w jednorodne dobra końcowe przez producentów finalnych (Christiano i wsp., 2005). Niekiedy wprowadza się do modelu dodatkowe przedsiębiorstwa, których celem jest jedynie przekształcenie niejednorodnej podaży pracy, oferowanej przez monopolistyczne gospodarstwa domowe, w homogeniczny czynnik produkcji, umożliwiając równocześnie modelowanie nominalnych opóźnień w reakcji płacy na stochastyczne zmiany warunków zewnętrznych poprzez mechanizm Calvo (1983; zob. Adolfson i wsp., 2005)). Produkt finalny jest sprzedawany gospodarstwom domowym w celach inwestycyjnych i konsumpcyjnych oraz przedsiębiorstwom prowadzącym wymianę z zagranicą w przypadku gospodarki otwartej. Producent finalny, działający na rynku doskonale konkurencyjnym, wykorzystuje technologię opisaną standardowo indeksem Dixita i Stiglitz (1977), formułującym agregat CES, o stałym efekcie skali produkcji i malejącej produktywności krańcowej, z continuum produktów pośrednich:

$$Y_t = \left[ \int_0^1 Y_{it}^{\frac{1}{\lambda_t}} di \right]^{\lambda_t}, \quad (3)$$

gdzie:  $1 \leq \lambda_t \leq \infty$ ,  $t = 1, \dots, T$ , oznacza proces stochastyczny determinujący, możliwie zmienne w czasie, współczynniki agregacji. Ceny nakładów czynników produkcji, ustalane przez monopolistycznych producentów dóbr pośrednich, oraz cena produktu, wynikająca z warunku zerowych zysków ekonomicznych, są dla producentów finalnych egzogeniczne. Technologia produkcji o stałym efekcie skali oraz przyjęcie założeń doskonałej konkurencji nie pozwalają na określenie optymalnej wielkości produkcji producenta finalnego. Funkcje popytu na dobra pośrednie, wynikające z zagadnienia maksymalizacji zysku przy danej technologii, cenach produktu i nakładów, równoważnie uzyskuje się rozwiązując zagadnienie minimalizacji kosztu całkowitego. Opisują one zapotrzebowanie producenta finalnego na poszczególne dobra pośrednie w zależności od ich ceny, charakteryzują się stałą elastycznością cenową popytu i jednorodnością stopnia pierwszego względem produktu finalnego. Cena dobra final-

nego ma postać indeksu CES i jest wyprowadzana po uwzględnieniu w funkcji produkcji zapotrzebowania na dobra pośrednie.

Sektor wytwarzający dobra pośrednie stanowi w modelu continuum przedsiębiorstw, indeksowanych przez  $i \in (0, 1)$ , działających według zasad konkurencji monopolistycznej, bez możliwości wejścia i wyjścia z rynku. Przedsiębiorstwa pośrednie nabywają pracę i wynajmują kapitał od gospodarstw domowych na rynku doskonale konkurencyjnym, wytwarzają niejednorodne dobra pośrednie, ustalają ich cenę i sprzedają je producentom finalnym. Technologia każdego z producentów pośrednich opisana jest przez funkcję produkcji Cobba i Douglasa o stałym efekcie skali i podlega stochastycznemu wzrostowi w czasie w modelu Adolfson i wsp., 2005):

$$Y_{i,t} = z_t^{1-\alpha} \varepsilon_t K_{i,t}^\alpha H_{i,t}^{1-\alpha} - z_t \varphi,$$

gdzie:  $\alpha$  oznacza parametr funkcji produkcji,  $z_t$  ujmuje permanentny i egzogeniczny wzrost poziomu technologii,  $\varepsilon_t$  jest kowariancyjnie stacjonarną zmienną losową modelującą stochastyczne zakłócenia technologiczne,  $H_{i,t}$  oznacza jednorodny nakład pracy oraz  $K_{i,t}$  jest ilością kapitału bezpośrednio wykorzystywanego w procesie produkcji. Całkowity zasób kapitału fizycznego może się różnić od rzeczywistych jego nakładów, ze względu na czynione w niektórych modelach założenia zmiennego jego wykorzystania (Adolfson i wsp., 2005; Baxte i Farr, 2005). Funkcja produkcji może również zawierać wielkość  $z_t \varphi$ , wzrastającą pod wpływem akumulacji postępu technologicznego, służącą zapewnieniu zerowych zysków w stanie stabilnym modelu (Christiano i wsp., 2005; Adolfson i wsp., 2005).

Optymalizując decyzje dotyczące zapotrzebowania na czynniki produkcji przedsiębiorstwa pośrednie rozwiązują zagadnienie minimalizacji kosztu całkowitego produkcji, warunkowe względem zadanych egzogenicznie przez producentów dóbr finalnych funkcji popytu na dobra pośrednie, oraz egzogenicznie ustalanych przez gospodarstwa domowe cen kapitału i pracy. Swoje zobowiązania płacowe regulują z funduszy własnych oraz zaciągając kredyty, co prowadzi do określenia związku między nominalną stopą procentową w gospodarce a kosztami pracy w przedsiębiorstwie. Odpowiednio sformułowane zagadnienie minimalizacji kosztu przez przedsiębiorstwo  $i$ -te w momencie  $t$ , zapisane w postaci funkcji Lagrange, ma następującą postać w modelu Adolfson i wsp. (2005):

$$\min_{K_{i,t}, H_{i,t}} I_t R_t^k H_{i,t} + R_t^k K_{i,t} + \lambda_t P_{i,t} \left[ Y_{i,t} - z_t^{1-\alpha} \varepsilon_t K_{i,t}^\alpha H_{i,t}^{1-\alpha} + z_t \varphi \right],$$

gdzie:  $R_t^k$  oznacza całkowitą nominalną stopę procentową: po której wynajmowany jest kapitał, tzn. zapisaną w postaci  $(1 + r_t)$ , gdzie:  $r_t$  jest właściwą stopą procentową,  $I_t$  jest nominalnym wynagrodzeniem jednostki pracy  $H_{i,t}$

$R_t^f$  oznacza całkowitą efektywną stopę procentową płaconą przez przedsiębiorstwa, odzwierciedlającą założenie o finansowaniu ułamka  $i_t$  należności z funduszy zewnętrznych, która jest związana z nominalną stopą procentową w gospodarce  $R_{t-1}$  zależnością:  $R_t^f \equiv v_t R_{t-1} + 1 - v_t$ . Mnożnik Lagrange  $\lambda_t P_{i,t}$  jest interpretowany jako nominalny koszt krańcowy dobra pośredniego, zaś  $\lambda_t$  — jako koszt realny.

Obserwowane w gospodarce opóźnienia w reakcji cen na zmianę warunków zewnętrznych ujmuje się w modelu poprzez wprowadzenie określonych mechanizmów kształtowania się cen w skali całej gospodarki, przy utrzymaniu założenia optymalizacji decyzji na poziomie mikroekonomicznym. Najczęściej uwzględnia się mechanizm Calvo (1983) w procesie określania cen dóbr pośrednich, który oznacza przyjęcie ograniczenia częstotliwości optymalizacji decyzji w czasie dla grupy przedsiębiorstw pośrednich (inne schematy ustalania cen i ich wpływ na zdolność modelu do opisu danych empirycznych przedstawia Laforte, 2005). Szansa swobodnego i niezależnego od przeszłości ustalenia ceny przez podmiot zadana jest przez rozkład Bernoulliego, którego parametr  $\xi_{i,t}$  określa w każdym momencie ułamek jednostek mogących dokonać reoptymalizacji ceny, natomiast  $(1 - \xi_{i,t})$  jest frakcją, która uaktualnia cenę według ustalonej reguły indeksacyjnej, korygującej ją o wskaźnik inflacji z okresu bieżącego  $\pi_t$  oraz o przyszły cel inflacyjny  $\pi_{t+1}^c$ . Nowa cena sprzedaży  $P_t^{new}$  w momencie  $t$ , uwzględniająca ryzyko braku możliwości jej optymalizacji w przyszłości, otrzymywana jest w wyniku maksymalizacji oczekiwanej terażniejszej wartości przyszłych zysków, warunkowej względem egzogenicznej funkcji popytu (Adolfson i wsp., 2005):

$$\max_{P_t^{new}} E_t \sum_{q=0}^{\infty} (\beta \xi_{i,t})^q u_{i,t+q} \left[ (\pi_t \dots \pi_{t+q+1})^{\kappa_i} (\pi_{t+1}^c \dots \pi_{t+q}^c)^{1-\kappa_i} P_t^{new} Y_{i,t+q} - MC_{i,t+q} (Y_{i,t+q} + Z_{t+q} \phi) \right],$$

gdzie:  $(\beta \xi_{i,t})^q u_{i,t+q}$  jest stochastycznym czynnikiem dyskontującym,  $u_{i,t+q}$  jest krańcową użytecznością nominalnego dochodu w okresie  $(t + q)$  dla gospodarstw domowych, traktowaną egzogenicznie przez przedsiębiorstwa pośrednie,  $\kappa_i$  jest parametrem indeksacji, zaś  $MC_{i,t}$  oznacza nominalny koszt krańcowy produkcji. Konstrukcja zagadnienia maksymalizacyjnego zapewnia spełnienie wymogu zerowych zysków ekonomicznych w stanie stabilnym, natomiast warunki pierwszego rzędu są wykorzystywane do sformułowania zagregowanej krzywej Phillipisa w gospodarce. Nowa cena sprzedaży w sytuacji braku zakłóceń stochastycznych jest wyrażona jako marża (ang. *markup*) na wartości oczekiwanej kosztu krańcowego produkcji, warunkowej względem zbioru informacji w momencie bieżącym, natomiast w pozostałych przypadkach jest ona ustalana jako funkcja oczekiwanej średniej ważonej przyszłych nominalnych kosztów krańcowych (Christiano i wsp., 2005).

W rozbudowanych modelach dla gospodarek otwartych analogiczne zagadnienia optymalizacyjne ustalania cen sprzedaży są rozwiązywane przez przedsiębiorstwa prowadzące wymianę zagraniczną. Continuum eksporterów nabywa jednorodny dobro finalne na rynku krajowym, które transformuje w continuum zróżnicowanych dóbr eksportowych sprzedawanych następnie zagranicznym gospodarstwom domowym (Adolfson i wsp., 2005). Modelowa transformacja dobra polega na nadaniu mu odpowiedniej marki (ang. *brand naming*), powodującej że każde z przedsiębiorstw jest jedynym dostawcą danego produktu na rynku międzynarodowym. Najczęściej dopuszcza się również istnienie niepełnego dostosowania cenowego na skutek zmian kursu walutowego (ang. *incomplete exchange rate pass-through*) oraz krótkookresowych odchyień od prawa jednej ceny, zarówno w sektorze eksportowym, jak i importowym, modelowanych poprzez mechanizm Calvo (1983; zob. Christiano i wsp., 2005; Adolfson i wsp., 2005; Adolfson, 2002; Ambler i wsp., 2003). Cena dobra eksportowanego jest ustalana po uwzględnieniu ceny dobra krajowego, określającej koszt krańcowy produkcji, relacji ceny własnej do zagregowanej ceny eksportowej, wynikającej z funkcji popytu na dane dobro oraz niepewności co do możliwości przyszłej jej optymalizacji. Eksporterzy, którzy w danym momencie nie mogą rozwiązać zagadnienia maksymalizacji zysku, przy danej funkcji popytu na swoje produkty, ustalają nową cenę sprzedaży poprzez indeksowanie dotychczasowej, wykorzystując wskaźnik inflacji dóbr eksportowych z okresu bieżącego oraz krajowy cel inflacyjny (Adolfson i wsp., 2005). Sektor importowy najczęściej składa się z dwóch kategorii przedsiębiorstw nabywających jednorodny produkt na rynku międzynarodowym i przekształcający go odpowiednio w dobra konsumpcyjne i inwestycyjne, sprzedawane następnie gospodarstwom domowym na rynku krajowym. Cena sprzedaży dóbr jest ustalana podobnie jak w przypadku eksporterów poprzez rozwiązanie zagadnienia maksymalizacji zysku i uwzględnienie schematu Calvo (1983).

## 7. POLITYKA PIENIĘŻNA I RÓWNOWAGA

Modele DSGE wykorzystywane są w praktyce głównie do wspomagania decyzji monetarnych, dlatego polityka fiskalna jest modelowana w sposób zwięzły, najczęściej poprzez zapisanie ograniczenia budżetowego państwa i specyfikację procesów egzogenicznych dla wydatków budżetowych, bądź też poprzez ich opis systemem VAR wraz ze stopami podatkowymi (Ambler i wsp., 2003; Adolfson i wsp., 2005). Funkcję decydenta monetarnego w modelach DSGE pełni bank centralny, którego działanie opisywane jest za pomocą ustalonej reguły decyzyjnej (ang. *instrument rule*), dostosowującej poziom krótkoterminowej stopy procentowej do odchyień wskaźnika inflacji od założonego, zmieniającego się w czasie, celu inflacyjnego, luki popytowej i realnego kursu walutowego. Poli-

tyka pieniężna w modelach DSGE ma wpływ na zmienne realne najczęściej poprzez kanał stopy procentowej, kursu walutowego oraz kapitału wykorzystywanego w przedsiębiorstwach (ang. *working capital channel*). Alternatywne specyfikacje reguł decyzyjnych wraz z omówieniem ich wpływu na gospodarkę można znaleźć m.in. w pracy Woodford (2003), dyskusję zagadnień wygładzania stopy procentowej przedstawili m.in. Belaygorod, Chib i Dueker (2004)), natomiast szczegółowe omówienie kanałów transmisyjnych polityki monetarnej m.in. Mishkin (1996). Specyfikacja reguły decyzyjnej i uwzględnienie w niej dodatkowych procesów stochastycznych umożliwia badanie wpływu zakłóceń związanych z realizacją polityki pieniężnej na zmienne realne. Luka popytowa występująca w równaniu reguły decyzyjnej banku centralnego może być mierzona odchyleniami obserwowanej produkcji od wartości wynikającej z trendu w gospodarce, maksymalnej produkcji możliwej do uzyskania, bądź jako odchylenia od wielkości produkcji przy giętkich cenach (Adolfson i wsp., 2005; Smets i Wouters, 2003).

Określenie stanu równowagi w modelu DSGE wymaga uwzględnienia warunków jednoczesnego równoważenia się rynków dóbr i rynków finansowych, ograniczeń zasobowych gospodarki oraz warunków pierwszego rzędu, wynikających z zagadnień optymalizacyjnych. Jeśli popyt zgłaszany przez gospodarstwa domowe, decydena fiskalnego oraz eksporterów jest zrównoważony przez krajową produkcję dobra finalnego oraz import inwestycyjny i konsumpcyjny, to istnieje równowaga na krajowym rynku dóbr. Rynek finansowy znajduje się w równowadze, jeśli popyt na kredyty zgłaszany przez przedsiębiorstwa w celu realizacji ich zobowiązań płacowych jest równy podaży depozytów przez gospodarstwa domowe, powiększonej o ilość pieniądza wprowadzonego do gospodarki przez bank centralny. Rynek zagranicznych obligacji w modelach dla gospodarek otwartych równoważy się, jeśli saldo zobowiązań i należności przedsiębiorstw eksportujących i importujących są równe saldu obligacji, jakie gospodarstwa domowe są skłonne utrzymywać.

Model DSGE dostarcza narzędzia pozwalającego na opisanie kształtowania się w czasie równowagi gospodarki, mającej charakter dynamiczny i określanej jako zbiór procesów stochastycznych, spełniających odpowiednie układy równań, przy założonym kształtowaniu się procesów egzogenicznych i ewolucji pozostałych zmiennych stanu. Ścieżkę równowagi opisują ilościowo ograniczenia zasobowe i budżetowe, warunki pierwszego rzędu zagadnień optymalizacyjnych, reguły decyzyjne banku centralnego oraz pozostałe równania tworzące nieliniowy system, zawierający opóźnione i oczekiwane wartości zmiennych makroekonomicznych, procesy stochastyczne oraz inne wielkości występujące w modelu. Trajektoria równowagi może być również zapisana w postaci wektora stanów  $s_t$ , nieobserwowalnego dla procesów ukrytych, którego ewolucję w czasie określa równanie przejścia, o parametrach związanych z parametrami fundamentalnymi modelu, natomiast dynamikę kształtu-

je ciąg egzogenicznych, niezależnych zmiennych losowych (innowacji). Równania strukturalne modelu DSGE tworzą nieliniowy system racjonalnych oczekiwań, który w zależności od założeń może nie posiadać stabilnej trajektorii równowagi, można wskazać jedno rozwiązanie (ang. *determinacy*) bądź kilka (ang. *indeterminacy*). Omówienie problemów istnienia lokalnej i globalnej równowagi dynamicznej oraz jej określoność w rozważanej klasie modeli jest analizowana m.in. w pracach Woodford (2003), Lubik i Schorfheide (2003; 2004), Benhabib i wsp. (2001), Beyer i Farmer (2004).

## 8. ROZWIĄZANIE MODELU

Nieliniowy system racjonalnych oczekiwań nie ma najczęściej znanego rozwiązania analitycznego, dlatego przed estymacją wykorzystuje techniki numeryczne do określania rozwiązania modelu, które tworzy funkcja przejścia (ang. *policy function*), warunkowa względem wektora parametrów strukturalnych modelu  $\theta$ :

$$s_t = f(s_{t-1}, \varepsilon_t^s; \theta), \quad (4)$$

gdzie  $\varepsilon_t^s$  jest wektorem innowacji związanych z procesami egzogenicznymi opisującymi zakłócenia strukturalne w modelu. Najwcześniej zaproponowana grupa metod rozwiązywania model racjonalnych oczekiwań zakładała liniową aproksymację funkcji przejścia i ich stosowanie wydaje się być uzasadnione w przypadku, kiedy istnieją przesłanki do założenia liniowej ewolucji gospodarki w czasie. Metody te, wymagające linearyzacji równań strukturalnych modelu DSGE, powstały w odpowiedzi na trudności z implementacją i problemy z wielowymiarowością bezpośredniej techniki rozwiązywania zagadnienia optymalizacyjnego społecznego decydenta, tzw. metody iterowania funkcji wartości (ang. *value function iteration*), zachowując jednocześnie odpowiednie własności asymptotyczne.

Estymacja modeli DSGE najczęściej bazuje na metodach wykorzystujących funkcję wiarygodności i do ich rozwiązania w praktyce używa się metod liniowych. Prowadzą one do reprezentacji DSGE w liniowej przestrzeni stanów, ograniczającej problemy numeryczne związane z implementacją oraz umożliwiającą wykorzystanie filtru Kalmana do wyznaczenia funkcji wiarygodności. Ze zbioru dostępnych metod najbardziej znany wydaje się algorytm Blancharda i Kahna (1980), wykorzystywany m.in. przez banki centralne: Bouakez i wsp. (2002) i Dib (2001), wraz z algorytmami dostarczającymi technik jego numerycznej realizacji, zaproponowanymi przez Andersona i Moore'a (1985) dla modeli w Systemie Rezerwy Federalnej, i następnie uogólnionymi przez Andersona (2000), które stosują m.in. Murchison i wsp. (2004) oraz Adolfson i wsp. (2005); ponadto nieco rzadziej wykorzystuje się technikę bazującą na dekompozycji QZ



zaproponowaną przez Simsa (2002), metodę nieokreślonych współczynników (ang. *undetermined coefficients*) dla zmiennych w postaci logarytmów i poziomów (m.in. Uhlig, 1990; Taylor i Uhlig, 1999) oraz liniowo-kwadratowe aproksymacje Kydlanda i Prescottta (1982).

Nieliniowe metody rozwiązywania modeli racjonalnych oczekiwań umożliwiają precyzyjniejszą aproksymację funkcji przejścia i obejmują m.in. technikę perturbacji, zaproponowaną przez Judd i Guu (1997), którą następnie rozwinęli Judd (2002) i Juillard (2003), oraz metody rzutowania: skończonych elementów i spektralne (por. np. An, 2005 oraz literatura cytowana). Metoda perturbacji polega na rozwinięciu funkcji przejścia w szereg Taylora wokół niestochastycznego, statycznego stanu stabilnego modelu, a następnie wyznaczaniu współczynników aproksymacji. Metoda ta zapewnia lepsze przybliżenie funkcji przejścia niż metody liniowe, m.in. poprzez uwzględnienie momentów wyższych rzędów rozkładów zakłóceń strukturalnych, i może być stosowana w szerszej klasie modeli (np. w gospodarkach nie będących Pareto optymalnymi). Własności metody perturbacji oraz porównania z alternatywnymi technikami rozwiązywania modeli racjonalnych oczekiwań zostały omówione m.in. przez: Aruoba i wsp. (2006) oraz An (2005). Aproksymacja wyższego rzędu funkcji przejścia jest możliwa również poprzez rozwinięcie drugiego rzędu warunków równowagi modelu (An, 2005).

Estymacja parametrów modelu DSGE wymaga połączenia konstrukcji teoretycznej, powstałej z przyjętej teorii ekonomicznej, z danymi empirycznymi, którą określa się za pomocą odpowiedniej postaci analitycznej równania obserwacji (ang. *measurement equation*). Wiąże ono poszczególne elementy nieobserwowalnego wektora stanu  $s_t$  z wektorem obserwowanych zmiennych makroekonomicznych  $y_t$ :

$$y_t = g(s_t, \varepsilon_t^*; \theta), \quad (5)$$

gdzie  $\varepsilon_t^*$  są egzogenicznymi, niezależnymi zmiennymi losowymi, interpretowanymi jako błąd pomiaru danych oraz ujmującymi potencjalną misspecyfikację modelu (Lubik i Schorfheide, 2005); zakłada się standardowo niezależność  $\varepsilon_t^*$  oraz  $\varepsilon_t$ . Liniowa postać funkcji  $f(\cdot)$  w równaniu przejścia oraz funkcji  $g(\cdot)$  w równaniu obserwacji powoduje, że otrzymany układ równań można traktować jako liniowy system przestrzeni stanów, bezpośrednio wykorzystywany do konstrukcji funkcji wiarygodności. W obecnie stosowanych w praktyce modelach DSGE regułą jest przyjmowanie liniowej postaci równania obserwacji oraz zakładanie rozkładów normalnych dla zakłóceń stochastycznych, występujących w postaci strukturalnej modelu oraz w równaniach obserwacji ze względu na mniejszy stopień skomplikowania numerycznego aplikacji. Metody rozwiązywania i estymacji modelu w przypadkach ogólnych opracowali Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2004; 2006).

## 9. ZAGADNIENIA ESTYMACJI I INFORMACJI WSTĘPNEJ

Analiza bayesowska dostarcza narzędzia wnioskowania o parametrach strukturalnych modelu DSGE, oceny niepewności związanej z ich estymacją oraz metody określania błędu popełnianego przy szacowaniu interesujących badacza charakterystyk gospodarki. Możliwość konstrukcji rozkładu prawdopodobieństwa wybranej funkcji parametrów fundamentalnych modelu, procesów stochastycznych i pozostałych wielkości odzwierciedlających mechanizmy gospodarcze ma kluczowe znaczenie w ocenie stopnia wiarygodności rezultatów badań oraz określeniu skutków podejmowanych decyzji, takich jak: odpowiedzi banku centralnego na zmianę kursu walutowego, opisanie zachowania konsumentów i producentów czy analizie cyklu koniunkturalnego i propagacji zakłóceń ekonomicznych. Bayesowskie podejście do estymacji parametrów strukturalnych modeli DSGE wykorzystuje kompletny system warunków pierwszego rzędu, ograniczeń zasobowych i reguł decyzyjnych, który jest następnie szacowany na podstawie danych pochodzących ze zagregowanych szeregów czasowych, pozwalając równocześnie na skonstruowanie jednej miary określającej stopień dopasowania modelu do danych empirycznych. Jednoczesna estymacja kompletnej reprezentacji modelu dynamicznego pozwala na uniknięcie problemów endogeniczności zmiennych, występujących w regule decyzyjnej banku centralnego, napotykanych przy stosowaniu uogólnionej metody momentów dla wyznaczania współczynników pojedynczych równań. Estymacja bayesowska bazuje na funkcji wiarygodności generowanej przez model DSGE w odróżnieniu od kalibracji i pierwszych technik szacowania parametrów strukturalnych, ustalających ich wartości po minimalizacji odległości wybranych funkcji odpowiedzi impulsowych z modelu DSGE od analogicznych wielkości w identyfikowalnym modelu VAR (Rotemberg i Woodford, 1997; Murchison i wsp., 2004; Christiano i wsp., 2005).

Bayesowskie metody estymacji dostarczają spójnych metod wnioskowania o parametrach strukturalnych w sytuacji potencjalnej misspecyfikacji i braku identyfikowalności modelu. Model ekonometryczny nie jest identyfikowalny, jeśli różne parametryzacje, mające różną interpretację ekonomiczną, prowadzą do tego samego rozkładu prawdopodobieństwa obserwacji (są obserwacyjnie równoważne), natomiast misspecyfikacja związana jest z zagadnieniem uznania danego modelu za właściwy proces generujący obserwacje. Geweke (1999) przedstawił alternatywne ekonometryczne interpretacje modeli DSGE: silną, związaną z metodą największej wiarygodności, słabą spotykaną w literaturze traktującej o technikach kalibracji oraz minimalną, pozwalającą na porównywanie modeli zarówno między sobą jak również w stosunku do modelu referencyjnego. Określenie warunków identyfikowalności DSGE jest trudniejsze niż w przypadku modeli VAR bądź liniowych modeli o równaniach współzależnych ze względu na nieliniowość związku między parametrami strukturalnymi a reprezentacją w przestrzeni stanów

formy zredukowanej (4) i (5), określającej łączny rozkład prawdopodobieństwa obserwacji. Modele racjonalnych oczekiwań i DSGE są identyfikowalne przy założeniu odpowiednich rozkładów *a priori* oraz struktury procesów egzogenicznych (Lubik i Schorfheide, 2004; Beyer i Farmer, 2004). Metody estymacji wykorzystujące podejścia z niepełną informacją (uogólniona metoda momentów bądź metoda estymacji poprzez porównywanie funkcji odpowiedzi impulsowych) mogą powodować występowanie ukrytych problemów identyfikacyjnych, ze względu na pominięcie podczas estymacji części założeń dotyczących pozostałych równań bądź procesów stochastycznych modelu. Specyfikacja pełnego układu założeń, konstrukcja funkcji wiarygodności, uwzględnienie informacji spoza próby poprzez rozkład *a priori* oraz jednoczesna estymacja systemu równań pozwalają na zapewnienie identyfikowalności modelu i istnienie rozkładu *a posteriori* (Lubik i Schorfheide, 2005).

Na gruncie bayesowskim wnioskowania o parametrach strukturalnych oraz określonych ich funkcjach dokonuje się poprzez wyznaczenie rozkładów brzegowych z łącznego rozkładu *a posteriori*. Łączny rozkład *a posteriori* wektora parametrów oraz zmiennych ukrytych  $p(\theta_i; \gamma, M_i)$ , warunkowy względem *i*-tej specyfikacji  $M_i$ , jest otrzymywany ze statystycznego modelu bayesowskiego na podstawie wzoru Bayesa:

$$p(\theta_i; \gamma, M_i) = \frac{p(\gamma; \theta_i, M_i) p(\theta_i; M_i)}{p(\gamma; M_i)},$$

gdzie iloczyn łącznego rozkładu wektora obserwacji  $\gamma = (\gamma_1', \dots, \gamma_T')$ , określającego gęstość próbkową  $p(\gamma; \theta_i, M_i)$  oraz gęstości *a priori*  $p(\theta_i; M_i)$ , definiuje statystyczny model bayesowski, natomiast  $p(\gamma; M_i)$  oznacza brzegową gęstość obserwacji w *i*-tej specyfikacji:  $p(\gamma; M_i) = \int p(\gamma; \theta_i, M_i) p(\theta_i; M_i) d\theta_i$  (Zellner, 1971; Osiewalski, 1991; O'Hagan, 1994). Po zaobserwowaniu wektora  $\gamma$ , gęstość wektora obserwacji  $p(\gamma; \theta_i, M_i)$  rozpatrujemy jako funkcję parametrów  $\theta_i$  przy danych obserwacjach, czyli rozważamy funkcję wiarygodności postaci:  $l(\theta_i; \gamma, M_i) = p(\gamma; \theta_i, M_i)$ . Gęstość rozkładu *a posteriori* jest proporcjonalna do iloczynu funkcji wiarygodności  $l(\theta_i; \gamma, M_i)$  i rozkładu *a priori*:

$$p(\theta_i; \gamma, M_i) \propto l(\theta_i; \gamma, M_i) p(\theta_i; M_i).$$

Łączny rozkład *a posteriori* parametrów i innych zmiennych w modelu zawiera wszystkie dostępne o nich informacje, pozwalając na wnioskowanie o ocenach punktowych i niepewności związanej z wybranymi funkcjami parametrów, poprzez odpowiednie rozkłady brzegowe. Estymacja bayesowska modeli równowagi ogólnej prowadzi do elastycznego uwzględnienia informacji o funkcjonowaniu gospodarki uzyskanej z badań mikroekonomicznych. Znajomość przeciętnego

czasu trwania kontraktów placowych, preferencji konsumentów w zakresie podaży pracy oraz prawdopodobnego przedziału zmienności innych wielkości pozwala na ich uwzględnienie poprzez rozkład *a priori*, którego rozproszenie można interpretować jako odzwierciedlenie stopnia wiarygodności wiedzy wstępnej. Subiektywne przekonania badacza dotyczące zachowań grup podmiotów gospodarczych w modelu, wyrażone w rozkładzie *a priori*, są zawsze modyfikowane przez funkcję wiarygodności, co pozwala interpretować różnice między wnioskowaniem *a priori* i *a posteriori* również w kategoriach rozbieżności między danymi mikroekonomicznymi i danymi z szeregów makroekonomicznych. Niska wstępna wiedza o kształtowaniu się parametrów strukturalnych modelu bądź jej całkowity brak oznacza w praktyce przyjęcie dla nich nieinformacyjnych rozkładów *a priori* powodujących, że wnioskovanie *a posteriori* opiera się głównie na informacjach zawartych w funkcji wiarygodności. Alternatywnie do podejścia bayesowskiego w niewielkich modelach DSGE, zarówno liniowych jak i nieliniowych, stosowano do estymacji metodę największej wiarygodności, której własności omawiają m.in. Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2004, 2005, 2006; Fernández-Villaverde i wsp., 2006).

Metody wnioskowania bayesowskiego dostarczają ponadto formalnego narzędzia służącego porównywaniu konkurencyjnych modeli DSGE poprzez ich prawdopodobieństwa *a posteriori* (Landon-Lane, 2000; Schorfheide, 2000; Del Negro i Schorfheide, 2004). W zbiorze alternatywnych statystycznych modeli bayesowskich,  $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ , dla danego wektora obserwacji  $y$ , możemy określić prawdopodobieństwo *a posteriori*  $i$ -tego modelu, korzystając ze wzoru Bayesa:

$$P(M_i; y) = \frac{p(y; M_i) P(M_i)}{\sum_{j=1}^m p(y; M_j) P(M_j)},$$

gdzie  $\theta_i$  jest wektorem parametrów strukturalnych w każdym z konkurencyjnych modeli DSGE, natomiast  $P(M_i)$  jest prawdopodobieństwem *a priori* danej specyfikacji, opisującej subiektywne przekonania badacza co do możliwości opisu wektora obserwacji przez ten model. Model w którym rozkład *a priori* jest scentrowany w obszarach przestrzeni parametrów dla których funkcja wiarygodności przyjmuje niskie wartości będzie mniej prawdopodobny *a posteriori* niż ten sam model z bardziej rozproszonym rozkładem *a priori*, przy założeniu jednakowych szans *a priori* każdej ze specyfikacji. Zgodność informacji wstępnej z funkcją wiarygodności prowadzi do najwyższego prawdopodobieństwa *a posteriori*. Bayesowskie porównywanie modeli umożliwia również eliminację wpływu prawdopodobieństw  $P(M_i)$  poprzez rozważenie ilorazu szans *a posteriori* par modeli, zdefiniowanego przez iloczyn czynnika Bayesa oraz ilorazu szans *a priori*:

$$\frac{P(M_s; y)}{P(M_q; y)} = \frac{p(y; M_s)}{p(y; M_q)} \times \frac{P(M_s)}{P(M_q)}$$

Czynnik Bayesa  $B_{sq}$ , określony przez iloraz brzegowych gęstości wektora obserwacji, mierzy relatywną moc wyjaśniającą modeli  $M_s$  oraz  $M_q$  i ujmuje informacje w jakim stopniu obserwacje potwierdzają model  $M_s$  w porównaniu z modelem  $M_q$ ;  $B_{sq} > 1$  oznacza wskazanie przez obserwacje, że model  $M_s$  jest bardziej adekwatny do ich opisu (Jeffreys, 1961).

Metody wnioskowania bayesowskiego mogą również zostać zastosowane do bezpośredniego łączenia wiedzy z konkurencyjnych specyfikacji o kształtowaniu się wybranej funkcji parametrów strukturalnych modelu i procesów stochastycznych, opisujących interesującą badacza wielkość makroekonomiczną  $\Delta$ , np. wskaźnik się inflacji (Jacobson i Karlsson, 2002). Funkcja gęstości uśrednionego rozkładu *a posteriori*  $\Delta$  jest średnią ważoną gęstości *a posteriori*  $\Delta$  w każdym z modeli:

$$p(\Delta; y) = \sum_{i=1}^m p(\Delta; y, M_i) P(M_i; y),$$

gdzie wagi  $p(M_i; y)$  są określone przez prawdopodobieństwa *a posteriori* modeli. Strona numeryczna aplikacji modeli DSGE realizowana jest z wykorzystaniem technik Monte Carlo opartych na łańcuchach Markowa, generujących losową próbkę z łącznego rozkładu *a posteriori*, na podstawie której oblicza się rozkłady brzegowe interesujących charakterystyk modelowanej gospodarki oraz niekiedy Monte Carlo z funkcją ważności (DeJong i wsp., 2000; An i Schorfheide, 2006 oraz literatura cytowana). Metody Monte Carlo są stosowane zarówno do aproksymacji brzegowych rozkładów *a posteriori* parametrów jak i w porównaniach modeli DSGE oraz VAR (m.in. Del Negro i wsp., 2004).

## 10. PODSUMOWANIE

Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej są obecnie jednym z głównych narzędzi stosowanych przez instytucje finansowe do analizy mechanizmu transmisyjnego polityki pieniężnej oraz badania cykli koniunkturalnych w gospodarkach. Stanowią one konstrukcję łączącą nominalne nieelastyczności cen i płac obserwowane w szeregach zagregowanych danych makroekonomicznych z optymalizacyjnym zachowaniem podmiotów gospodarczych, charakterystycznym dla poziomu mikroekonomicznego. Opracowane w ostatnich latach metody estymacji parametrów strukturalnych modeli DSGE, możliwość ich uzasadnienia na gruncie modeli autoregresyjnych oraz łatwość formułowania

i testowania hipotez ekonomicznych zarówno dla gospodarek zamkniętych jak i otwartych przesądziły o coraz szerszym ich wykorzystaniu praktycznym. W zakresie dotyczącym polityki pieniężnej pozwalają one na elastyczne testowanie kanałów mechanizmu transmisyjnego, stopnia dostosowania się cen do zmian kursu walutowego oraz analizę propagacji zakłóceń ekonomicznych. W obecnie wykorzystywanych przez instytucje finansowe modelach DSGE coraz częściej odchodzi się od technik kalibracji parametrów strukturalnych na rzecz ich formalnej estymacji, uwzględniającej pełną informację. Bayesowskie metody estymacji dostarczają spójnych metod wnioskowania o parametrach modelu DSGE oraz pozostałych, interesujących z ekonomicznego punktu widzenia wielkościach, pozwalając równocześnie na włączenie do procesu estymacji dostępnej decydentowi monetarnemu wiedzy, pochodzącej zarówno z badań mikroekonomicznych i innych analiz podmiotów gospodarczych jak i zawartych w funkcji wiarygodności. Modele DSGE pozwalają na formalną estymację i ocenę niepewności związaną z parametrami fundamentalnymi, specyfikacją procesów stochastycznych oraz kształtowaniem się dynamiki modelu.

## BIBLIOGRAFIA

- Adolfson M. 2002. *Incomplete exchange rate pass-through and simple monetary policy rules*. Sveriges Riksbank, Working Paper Series 149.
- Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M. 2005. *Bayesian estimation of an open economy DSGE model with incomplete pass-through*, Sveriges Riksbank, Working Paper Series 15.
- Altig D.E., Christiano L.J., Eichenbaum M., Lindé J. 2004. *Firm-specific capital, nominal rigidities, and the business cycle*, Federal Reserve Bank of Cleveland, Working Paper 16.
- Ambler S., Dib A., Rebei N. 2003. *Nominal rigidities and exchange rate pass-through in a structural model of a small open economy*, Bank of Canada Working Paper 29.
- An S. (2005). *Bayesian estimation of DSGE models: Lessons from second-order approximations*, manuscript, University of Pennsylvania.
- An S., Schorfheide F. 2006. *Bayesian analysis of DSGE models*, Federal Reserve Bank of Philadelphia, Working Paper 5.
- Anderson G. 2000. *A reliable and computationally efficient algorithm for imposing the saddle point property in dynamic models*, manuscript, Federal Reserve System.
- Anderson G.S., Moore G. (1985). *A linear algebraic procedure for solving linear perfect foresight models*, Economic Letters 17.
- Aruoba S.B., Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F. 2006. *Comparing solution methods for dynamic equilibrium economies*, Journal of Economic Dynamics and Control 30.
- Baxte M., Farr D.D. 2005. *Variable capital utilization and international business cycles*, Journal of International Economics 65.
- Benhabib J., Schmitt-Grohé S., Uribe M. 2001. *Monetary policy and multiple equilibria*, American Economic Review 91.
- Benigno G., Thoenissen C. 2003. *Equilibrium exchange rates and supply side performance*, Economic Journal 113.
- Bergin P.R. 2003. *Putting the „New Open Macroeconomics” to a test*, Journal of International Economics 60.

- Beyer A., Farmer R.E.A. 2004. *On the indeterminacy of New-Keynesian economics*, European Central Bank, Working Paper 323.
- Black R., Cassino V., Cassino A., Hansen E., Hunt B., Rose D., Scott A. 1997. *The forecasting and policy system: the core model*, Reserve Bank of New Zealand, Research Paper 43.
- Blanchard O.J., Kahn C.M. 1980. *The solution of linear difference models under linear expectations*, *Econometrica* 48.
- Bouakez H., Cardia E., Ruge-Murcia F.J. 2002. *Habit formation and the persistence of monetary shocks*, Bank of Canada Working Paper 27.
- Calvo G. 1983. *Staggered prices in a utility-maximizing framework*, *Journal of Monetary Economics* 12.
- Canova F. 1994. *Statistical inference in calibrated models*, *Journal of Applied Econometrics* 9.
- Canova F. 2002. *Validating monetary DSGE models through VARs*, manuscript, Universitat Pompeu Fabra, LBS i CEPR.
- Chang Y., Schorfheide F. 2003. *Labour supply shifts and economic fluctuations*, *Journal of Monetary Economics* 50.
- Christiano L.J., Eichenbaum M., Evans C. 1999. *Monetary policy shocks: What have we learned and to what end?*, [w:] *Handbook of Macroeconomics* 1A, M. Woodford i J. Taylor (red.), Amsterdam–New York–Oxford.
- Christiano L.J., Eichenbaum M., Evans C. 2005. *Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy*, *Journal of Political Economy* 113.
- Coletti D., Hunt B., Rose D., Tetlow R. 1996. *The dynamic model: QPM*, manuscript, Bank of Canada.
- DeJong D.N., Ingram B.F., Whiteman C.H. 1996. *A Bayesian approach to calibration*, *Journal of Business Economics and Statistics* 14.
- DeJong D.N., Ingram B.F., Whiteman C.H. 2000. *A Bayesian approach to dynamic macroeconomic*, *Journal of Econometrics* 98.
- Del Negro M., Schorfheide F. 2004. *Priors from General Equilibrium models for VARs*, *International Economic Review* 45.
- Del Negro M., Schorfheide F. 2005. *Monetary policy analysis with potentially misspecified models*, European Central Bank, Working Paper Series 475.
- Del Negro M., Schorfheide F., Smets F., Wouters R. 2005. *On the fit and forecasting performance of New-Keynesian models*, European Central Bank, Working Paper Series 491.
- Dib A. 2001. *An estimated Canadian DSGE model with nominal and real rigidities*, Bank of Canada Working Paper 26.
- Dixit A.K., Stiglitz J. 1977. *Monopolistic competition and optimum product diversity*, *American Economic Review* 67.
- Erceg C.J., Guerrieri L., Gust C. 2005. *SIGMA: A New open economy model for policy analysis*, *International Finance Discussion Papers* 835.
- Fagan G., Henry J., Mestre R. 2001. *An Area-Wide model (AWM) for the Euro Area*, European Central Bank, Working Paper Series 42.
- Fair R. 1994. *Testing Macroeconomic Models*, Cambridge, Harvard University Press.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F. 2004. *Estimating nonlinear dynamic equilibrium economies: A likelihood approach*.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F. 2005. *Estimating dynamic equilibrium economies: Linear versus nonlinear likelihood*, *Journal of Applied Econometrics* 20.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F. 2006. *Estimating macroeconomic models: A likelihood approach*, manuscript, University of Pennsylvania, NBER, CEPR i Federal Reserve Bank of Atlanta.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J.F., Santos M. 2006. *Convergence properties of the likelihood of computed dynamic models*, *Econometrica* 74.
- Geweke J. 1999. *Computational experiments and reality*, manuscript, University of Minnesota.
- Goodfriend M., King R. 1997. *The new neoclassical synthesis and the role of monetary policy*, *NBER Macroeconomic Annual* 12.

- Ingram B.F., Whiteman C.H. 1994. *Supplanting „Minnesota” prior. Forecasting macroeconomic time series using real business cycle model priors*, Journal of Monetary Economics 34.
- Jacobson T., Karlsson S. 2002. *Finding good predictors for inflation: A Bayesian model averaging approach*, Sveriges Riksbank, Working Paper Series 148.
- Jeffreys H. 1961. *Theory of Probability*, Oxford University Press, London.
- Judd K.L. 2002. *Perturbation methods with nonlinear changes of variables*, Mimeo, Hoover Institution.
- Judd K.L., Guu S.M. 1997. *Asymptotic methods for aggregate growth models*, Journal of Economic Dynamics and Control 21.
- Juillard M. 2003. *Solving Stochastic Dynamic Equilibrium models: A k-order perturbation approach*, manuscript, CEPREMAP i University Paris 8.
- King R., Plosser C., Rebelo S. 1988. *Production, growth and business cycles: I and II*, Journal of Monetary Economics 21.
- Kortelainen M. 2002. *EDGE: a model of the Euro Area with applications to monetary policy*, Bank of Finland Studies E:23.
- Kydland F., Prescott E. 1982. *Time to build and aggregate fluctuations*, Econometrica 50.
- Laforte J.F. 2005. *Pricing models: A Bayesian DSGE approach for the US Economy*, manuscript, Federal Reserve System.
- Landon-Lane J. 2000. *Evaluating real business cycle models using likelihood methods*, manuscript, The University of New South Wales.
- Lane P.R. 1999. *The New Open Economy Macroeconomic: A survey*, CEPR Discussion Paper 2115.
- Laxton D., Pesenti P. 2003. *Monetary rules for small, open, emerging economies*, manuscript, International Monetary Fund, Federal Reserve Bank of New York i NBER.
- Lindé J., Nessén M., Söderström U. 2004. *Monetary policy in an estimated open-economy model with imperfect pass-through*, Sveriges Riksbank, Working Paper Series 18.
- Lubik T., Schorfheide F. 2003. *Computing sunspot equilibria in linear rational expectations models*, Journal of Economic Dynamics & Control 28,
- Lubik T., Schorfheide F. 2004. *Testing for indeterminacy: An application to US monetary policy*, American Economic Review 94.
- Lubik T., Schorfheide F. 2005. *A Bayesian Look at New Open Economy Macroeconomics*, manuscript, Johns Hopkins University i University of Pennsylvania.
- Lucas R.E.Jr. 1976. *Econometric policy evaluation: a critique*, [w:] *The Phillips Curve and Labor Markets*, K. Brunner and A.H. Meltzer (red.), Amsterdam–North-Holland.
- Malley J.R., Muscatelli V.A., Woitek U. 2005. *Real business cycles, sticky wages or sticky prices? The impact of technology shocks on US manufacturing*, European Economic Review 49.
- Mishkin F.S. 1996. *The channels of monetary transmission: Lessons for monetary policy*, NBER Working Paper 5464.
- Moran K., Dolar V. 2002. *Estimated DGE models and forecasting accuracy: A preliminary investigation with Canadian Data*, Bank of Canada Working Paper 18.
- Murchison S., Rennison A., Zhu Z. 2004. *A structural small open-economy model for Canada*, Bank of Canada Working Paper 4.
- O’Hagan A. 1994. *Bayesian Inference*, Edward Arnold, London.
- Obstfeld M., Rogoff K. 1995. *Exchange rate dynamics Redux*, Journal of Political Economy 103.
- Osiewalski J. 1991. *Bayesowska estymacja i predykcja dla jednorodnaniowych modeli ekonometrycznych*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Monografie, nr 100, Kraków.
- Otrok C. 2001. *On measuring the welfare cost of business cycles*, Journal of Monetary Economics 47.
- Pagan A. 2001. *Report on modeling and forecasting at the Bank of England*, manuscript, Bank of England.
- Rabanal P., Rubio-Ramírez J.F. 2005. *Comparing New Keynesian models of the Business cycle: A Bayesian approach*, Journal of Monetary Economics 52.
- Rotemberg J., Woodford M. 1997. *An optimization based econometric framework for the evaluation of monetary policy*, NBER Macroeconomic Annual 12.



- Sargent T.J., 1989. *Two models of measurements and the investment accelerator*, Journal of Political Economy 97.
- Schorfheide F. 1999. *A unified econometric framework for the evaluation of DSGE models*, Penn Institute for Economic Research, Working Paper 7.
- Schorfheide F. 2000. *Loss function based evaluation of DSGE models*, Journal of Applied Econometrics 15.
- Sims C.A. 1980. *Macroeconomics and reality*, Econometrica 48.
- Sims C.A. 2002. *Solving linear rational expectations models*, Computational Economics 20.
- Smets F., Wouters R. 2003. *An estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium model of the Euro Area*, Journal of the European Economic Association 1.
- Söderström U., Söderlind P., Vredin P. 2002. *Can a calibrated New-Keynesian model of monetary policy fit the facts?*, Sveriges Riksbank, Working Paper Series 147.
- Taylor J.B., Uhlig H. 1990. *Solving nonlinear stochastic growth models: A comparison of alternative solution methods*, Journal of Business and Economic Statistics 8.
- Uhlig H. 1999. *A toolkit for analyzing nonlinear dynamic stochastic models easily*, [w:] *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*, R. Marimón i A. Scott (red.), Oxford University Press.
- Walque G., Wouters R. 2004. *An open economy DSGE model linking the Euro Area and the US economy*, manuscript, National Bank of Belgium.
- Woodford M.M. 2003. *Interest and Prices, Foundations of a Theory of Monetary Policy* Princeton University Press.
- Zellner A. 1971. *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, J. Wiley (red.), New York.