Studia Pedagogiczne t. L XIV/2011
PL ISSN 0081–6795

MAŁGORZATA MAKIEWICZ
Uniwersytet Szczeciński

MATEMATYKA – NASZA NIEDOSTRZEGALNA KULTURA

W rozważaniach na temat kultury nie sposób pominąć sentencji: *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, która jest tytułem eseju A. L. Hammonda zamieszczonego w pracy pod redakcją Lynna Arthura Steena. Autor przedstawia królową nauk jako dyscyplinę pełną kontrowersji, żywą, rozwijającą się. Prowokuje dyskusję pytaniami: Jakie są kryteria dobrej matematyki? Czy matematykę się tworzy – czy odkrywa? Czy jej dzieła zaliczamy do zdobyczy nauki czy sztuki? Z problemów tych wyłania się nowa jakość – stanowiąca sedno i najbardziej praktyczny rezultat kształcenia szkolnego – kultura matematyczna.

Artykuł ten ma być próbą dostrzeżenia składników kultury człowieka w rozumowaniu matematycznym. Pragnę wskazać pewne wartości ogólne możliwe do kształtowania i pielęgnowania w toku nowoczesnego nauczania matematyki. Wartości, które mają charakter uniwersalny i ponadczasowy. Nie zmieniają i nie zmienią ich kolejne reformy szkolnictwa, tendencje społeczne czy polityczne. Choć nie zawsze związane są bezpośrednio z konkretną wiedzą matematyczną, wiedzy tej dotyczą. Pokazują, jak piękny staje się umysł człowieka *matematycznie – kulturalnego*. Zestawienie celu wyposażania ucznia w elementy kultury matematycznej z codziennością szkolną egzekwowania wiedzy i umiejętności powoduje konflikt. Z jednej strony chcemy działać tak, aby młody człowiek po ukończeniu edukacji na poziomie średnim dysponował aparatem syntetyzowania, analizowania, abstrahowania, aby potrafił rozumować z przypuszczenia i krytycznie weryfikować hipotezy, a z drugiej oczekujemy odpowiednio wysokich wskaźników egzaminu maturalnego, czy dobrych lokat w rankingach. Chciałabym przedstawić tendencję nowoczesnego stylu nauczania matematyki opierającego się na fundamentach kultury matematycznej, polegającego m.in. na odejściu od schematycznego egzekwowania wiedzy (recytowania definicji, przytaczania twierdzeń, rozwiązywania testów, schematycznego rozwiązywania problemów), która może ów konflikt oddalić.

Matematyka, tak jak filozofia, literatura czy sztuka od lat należy do centrum rozwoju myśli i dokonań człowieka. A. N. Whitehead podkreśla, że jedynie muzyka konkuruje z matematyką jako *najoryginalniejszy twór ludzkiego ducha*. Bez matematycznej wiedzy, intuicji, harmonii twórców, my – odbiorcy nie moglibyśmy świadomie zachwycać się kunsztem słynnych budowli, pięknem rzeźb, fresków, obrazów ani oryginalnością wynalazków. O tym, że matematyka jest niezwykle potrzebna, przekonywać nikogo nie trzeba. Na pytanie, *do czego jest potrzebna*, zazwyczaj odpowiadamy przywołując typowe problemy szkolne: „jak uzyskać 6% roztwór octu z 10%?", „jak obliczyć podatek" czy „jak oszacować procent składany na koncie bankowym". Jednak „o wielu poważnych zastosowaniach odkryć matematycznych nie mówi się powszechnie i otwarcie. Matematykę można traktować jako drogę poznania, ale podąża nią niewielu. Dialog z przyrodą, jak zaznaczył M. Heller, musi być prowadzony w języku matematyki, w przeciwnym razie przyroda nie odpowiada…"[1] .

KULTURA MATEMATYCZNA W SĄDACH RÓŻNYCH OSÓB

Adam Grobler z ostrożnością podchodzi do pluralistycznej koncepcji kultury, wskazując wielość wyodrębnionych kultur na podstawie woluntarystycznego dążenia grup społecznych do własnej autonomii i tożsamości oraz przyjętego kryterium podziału. Uzyskane w ten sposób kategorie nie mają charakteru rozłącznego – np. „nasza kultura zachodnia", wielkomiejska, młodzieżowa. Zauważa, że swoje kodeksy kulturowe mają filateliści, brydżyści, fani muzyki metalowej i kinomani, kibice piłkarscy i maklerzy giełdowi. Własną kulturę wytwarzają grupy zawodowe i środowiska rodzinne[2]. Czy kultura matematyczna to kultura określonej grupy zawodowej – np. nauczycieli lub matematyków-teoretyków? A może to wielowymiarowy stan ducha osób, które akurat myślą w sposób programowy, konsekwentny, ścisły?

Tematyka kultury matematycznej podejmowana jest cyklicznie na wielu seminariach, konferencjach, sympozjach, zjazdach matematyków. Jako studentka miałam okazję przysłuchiwać się dyskusji na ten temat odbywającej się podczas XII Zjazdu Matematyków Polskich w Krakowie w 1989 roku. Była to jedna z najdłuższych dysput Zjazdu, podczas której zabrali głos m.in. R. Duda, S. Hartman, M. Lubański, M. Janicki, M. Kordos i L. Jeśmanowicz. W dyskusji przedstawiono różne oblicza kultury matematycznej, jej źródła i tradycje oraz niepokój związany z perspektywą kształcenia uczniów i nauczycieli w oparciu o system egzekwujący nastawiony przede wszystkim na „realizację programu". Choć profesor Leon Jeśmanowicz skończył dysputę słowami: „proszę Państwa, moim zdaniem kulturalny człowiek to ten, który w towarzystwie o matematyce nie rozmawia", temat pozostał nadal aktualny, co odnotowane zostało w wielu publikacjach matematyków i dydaktyków matematyki, np. R. Dudy, F. Kuriny, M. Szurka, W. Więsława.

[1] M. Makiewicz (red.) (2007), *Kulturotwórcze konteksty nauczania matematyki*, Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, s. 7.

[2] A. Grobler (2001), *Nie o to chodzi, by złowić króliczka*, „Przegląd Filozoficzny" Nr 3, s. 293.

Na kłopoty z jednoznacznym określeniem kultury matematycznej zwraca uwagę m.in. badacz historii matematyki Witold Więsław: „zarówno pojęcie kultury, jak – w szczególności – kultury matematycznej – to pojęcia bardzo względne, a na pewno trudne do zdefiniowania”[3].

Stanowisko dydaktyków matematyki reprezentuje Michał Szurek: „z kulturą w nauczaniu matematyki jest tak, jak z kulturą w życiu codziennym. Trudno teoretyzować, łatwo dać przykłady zachowań kulturalnych i niekulturalnych. (…) Umiejętności – to za mało. Trzeba je umieć stosować w sposób… kulturalny[4]”. Kulturę matematyczną umiejscawia w ogrodzie dziewięciu muz – córek Zeusa i bogini pamięci Mnemozyny. Pozostawia ją pod opieką Uranii[5]. Zatem matematykę i wszystkie nauki ścisłe, jako objęte niezwykłą kuratelą, mamy prawo traktować jako pełnoprawne składniki kultury człowieka.

Wybitny polski topolog, wieloletni członek Polskiej Akademii Nauk, Roman Duda wysoko ceni wpływ kultury greckiej na rozwój cywilizacji: „Matematyka jest ważnym elementem kultury ludzkiej. W kulturze greckiej matematyka odgrywała wielką rolę wśród elity intelektualnej. Struktura nadana wówczas matematyce narzuciła innym dyscyplinom sposób ich uprawiania. Śledząc rozwój myśli matematycznej oglądamy rozwój techniki, cywilizacji”[6].

Kultura matematyczna, budowana przez wieki na fundamentach kultury greckiej, to nie tylko pewna technika, sprawność, posługiwanie się formalnym językiem, dowodzenie czy rozwiązywanie problemów. W skład kultury matematycznej wchodzi również twórczość i wyobraźnia geometryczna, dobre rozumienie pojęć oraz postrzeganie piękna tej dyscypliny. Kultura matematyczna polega także na tym, że zauważa się pewne idee matematyczne, problemy, a nawet twierdzenia w otaczającym nas świecie, w przyrodzie martwej, ożywionej, w dziełach rąk ludzkich[7]. Frantisek Kurina krytycznie odnosi się do skupienia programów kształcenia przyszłych nauczycieli na poszczególnych działach matematyki: analizie, algebrze, arytmetyce, geometrii, teorii mnogości – kosztem tzw. kultury matematycznej. Do jej składników zalicza:

„1. Zdobycie sprawności matematycznej.

---

[3] W. Więsław (1998), *Kultura matematyczna a kultura matematyków*, „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie” Nr 21, s. 27.

[4] M. Szurek (2010), Wstęp do: M. Makiewicz, *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczyciel,* Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, s. 7.

[5] M. Szurek (2005), *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów*, Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, t. 1, s. 28.

[6] R. Duda (1990), *Dyskusja „Co to jest kultura matematyczna?”*, „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie” Nr 5, s. 27.

[7] M. Makiewicz (2010), *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli,* Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, s. 9.

2. Zrozumienie ciągłego przejścia w poszczególnych dyscyplinach matematyki między matematyką-nauką i matematyką-przedmiotem nauczania.
3. Zrozumienie języka matematyki.
4. Umiejętność wybierania odpowiednich metod przy rozwiązywaniu zadań.
5. Posiadanie dobrej wyobraźni geometrycznej.
6. Opanowanie techniki obliczeń.
7. Opanowanie umiejętności przeprowadzania dowodów.
8. Opanowanie umiejętności wprowadzania pojęć.
9. Możliwości uprawiania w pewnym stopniu twórczości matematycznej.
10. Postrzeganie piękna matematyki"[8].

Jednocześnie czeski dydaktyk zaznacza, „że nabywanie kultury matematycznej zaczyna się już we wczesnym dzieciństwie"[9]. Kolejne rozważania na temat kultury matematycznej odniesiemy zatem do edukacji szkolnej.

Wyniki prowadzanych co trzy lata przez Organizację Współpracy Gospodarczej i Rozwoju badań PISA ujawniają stały, choć niewielki wzrost wyników polskich 15-latków w zakresie czytania ze zrozumieniem i interpretacji tekstów. Alarmują natomiast z powodu słabego posługiwania się wiedzą matematyczną i rozwiązywaniem zadań niealgorytmicznych[10]. Przyczyny takiej stagnacji związane są przede wszystkim z tym, że mimo zmian w podstawie programowej nadal dominuje schematyczny sposób uczenia, oparty na powtarzaniu i odtwarzaniu czynności prezentowanych przez nauczyciela. Matematyka – mówi Wacław Zawadowski – tworzy swoisty język, tak ważny w procesach: komunikowania, przewidywania i porozumiewania się[11]. Bez umiejętności matematycznego prezentowania i dyskutowania wyników nie sposób poprawić umiejętności posługiwania się wiedzą w sytuacjach praktycznych.

Sytuacja nie jest lepsza w przypadku uczniów szkół ponadgimnazjalnych. W dalszej części artykułu dokonam analizy sądów maturzystów, studentów i nauczycieli na temat przydatności wiedzy, umiejętności oraz atrybutów kultury matematycznej w dorosłym życiu – po szkole.

---

[8] F. Kurina (1991), *Kultura matematyczna nauczyciela matematyki*, „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie" Nr 6, s. 30.

[9] Tamże.

[10] Relacje z najnowszych badań PISA przedstawiają w mediach Z. Marciniak, J. Lech, A. Sułowska, W. Zawadowski, M Polak,

[11] W. Zawadowski, dokument elektroniczny http://www.youtube.com/watch?v=7639FVCRk9g

PRZYDATNOŚĆ KULTURY MATEMATYCZNEJ W ŻYCIU DOROSŁYM

Mimo że pragmatyzm w kontekście kultury matematycznej nie należy do postaw typowych, spróbujmy określić przydatność poszczególnych jej elementów w edukacji i życiu zawodowym absolwentów szkół ponadgimnazjalnych.

Badania sondażowe zostały przeprowadzone w 2009 roku na losowo dobranej próbie składającej się z nauczycieli, uczniów klas maturalnych i studentów województwa zachodniopomorskiego liczącej w sumie 240 osób. Celem podjętych badań było ujawnienie sądów badanych osób o wykorzystaniu szkolnej wiedzy, umiejętności i kultury matematycznej po zakończeniu szkoły średniej. Kwestionariusz ankiety zawierał 5 arkuszy (wiedza: zakres podstawowy, wiedza – zakres rozszerzony, umiejętności: zakres podstawowy, umiejętności – zakres rozszerzony oraz kultura matematyczna) zawierających po 10 wybranych treści programowych. Tabela 1 przedstawia treści zaklasyfikowane do obszaru „kultura matematyczna ucznia".

Tabela 1. Treści przypisane do obszaru kultury matematycznej

Zakres podstawowy i rozszerzony – kultura matematyczna
Krytyczne weryfikowanie otrzymanych wyników
Odróżnianie danych zależności od szukanych
Formułowanie hipotez i potrzeba ich weryfikacji
Umiejętność dostrzegania problemów, wrażliwość na prawidłowości otaczającego świata
Logiczne wnioskowanie
Rozumowanie nie wprost
Umiejętność argumentowania
Umiejętność analizowania i syntezowania
Umiejętność abstrahowania
Umiejętność modelowania i symulowania zjawisk

Badane osoby określały swoje sądy w odniesieniu do: absolwentów zamierzających kontynuować kształcenie instytucjonalne związane z matematyką (np. studia inżynierskie, uniwersyteckie na wydziałach matematycznych, techniczne szkoły pomaturalne), absolwentów zamierzających kontynuować kształcenie instytucjonalne niezwiązane z matematyką (np. studia na wydziałach prawa i administracji, akademiach medycznych, studia filologiczne) i absolwentów zamierzających zakończyć kształcenie instytucjonalne i podjąć pracę zarobkową (np. działalność gospodarcza).

Wyniki badań potwierdziły wstępne przypuszczenie o niskim stopniu wykorzystania wiedzy i umiejętności matematycznych przez osoby, których przyszłość nie będzie bezpośrednio związana z matematyką, oraz o wysokim znaczeniu tzw. kultury matematycznej. Okazało się, że zdaniem osób ankietowanych nauczane w szkołach ponadgimnazjalnych treści oraz umiejętności matematyczne mają znaczenie praktyczne tylko dla grupy absolwentów zamierzających kontynuować naukę związaną z matematyką. Badania wskazały również wyjątkowo wysoką (ponad 98%) ocenę znaczenia kultury matematycznej dla wszystkich absolwentów. Znaczące jest prawie jednomyślne zdanie uczniów i studentów oraz nauczycieli o niewykorzystaniu wiedzy ani umiejętności matematycznych (zarówno z zakresu podstawowego jak i rozszerzonego) przez osoby, których przyszłość „nie będzie związana z matematyką"[12].

WYBRANE PRZYKŁADY KSZTAŁTOWANIA KULTURY MATEMATYCZNEJ

Ze względu na rozmiar niniejszego artykułu przestawię jedynie egzemplifikację kształtowania kultury matematycznej uczniów przez ich nauczycieli. Wybór przykładów podyktowany został chęcią ukazania stałych wartości, niezależnych od treści zawartych w programach nauczania czy założeń kolejnych reform systemu oświaty. Ilustracje odnosić się będą do, być może, najważniejszych składników kultury matematycznej: wyobraźni geometrycznej, postrzegania piękna matematyki oraz rozumienia sensu i konieczności przeprowadzania dowodów. Powszechna dostępność narzędzi komputerowych przesunęła znaczenie trenowania sprawności obliczeniowych na dalsze, w stosunku do uwalniania wyobraźni, pielęgnowania zdolności twórczych i samodzielności myślenia, miejsce.

POSIADANIE DOBREJ WYOBRAŹNI GEOMETRYCZNEJ

Zadziwiające, że ludzie nie wierzą, iż w nauce jest miejsce na wyobraźnię. Chodzi tu o bardzo interesujący rodzaj wyobraźni, odmienny od wyobraźni artysty. Wielka trudność polega na próbie wyobrażenia sobie czegoś, czego nigdy wcześniej nie widzieliście, co byłoby w każdym szczególe zgodne z tym, co udało się zaobserwować, i co byłoby odmienne od tego, o czym już myślano.

R. P. Feyman

Wyobraźnia widziana oczyma filozofów związana jest przede wszystkim z poznawaniem otaczającej nas rzeczywistości. Rozumiana jako cecha psychiki ludzkiej wyrażająca się zdolnością przewidywania, uzupełniania i odtwarzania zdarzeń – wiąże się z procesem percepcji, pamiętania i myślenia. Dla pedagogów w zagadnieniu wyobraźni

[12] M. Makiewicz (2009), *Do czego szkolna matematyka może się przydać po szkole? Rozważania na temat celów nauczania matematyki*, „Matematyka, Pomagamy uczyć" Nr 4, s. 5–8.

ważny jest aspekt wychowawczy i edukacyjny[13]. Trudne zadanie rozwijania dziecięcej wyobraźni przestrzennej to przede wszystkim wspomaganie wspinania się ucznia na kolejne szczeble wyobrażeniowych schodów. Zadanie trudne, ale konieczne, gdyż bez dobrej wyobraźni nie ma mowy o twórczości, o projektowaniu, pracy naukowej i artystycznej.

Wyobraźnię geometryczną zaliczono do składników kultury matematycznej, gdyż warunkuje ona pewien, niezwykle ceniony, sposób myślenia – na podstawie konstruowania i rekonstruowania obrazów będących odbiciem form przestrzennych, płaskich i liniowych rzeczywistej przestrzeni fizycznej, obrazów obiektów matematycznych i zdolności przekształcania tych obrazów przez odpowiednie operacje myślowe[14]. Wyobraźnia geometryczna służy do matematycznego modelowania oraz do tworzenia własnych wyobrażeń obiektów bez konieczności odwoływania się do konkretnej przestrzeni fizycznej. W celu uogólniania, wyjaśniania, sprawdzania i naśladowania[15], jak również rozwijania wyobraźni uczniów, obok celowo opracowanego doboru pojęć i zadań, stosuje się modele, gry dydaktyczne, obrazy nieruchome i ruchome, płaskie i przestrzenne. Dobry nauczyciel – niczym lekarz starannie diagnozuje i precyzyjnie dawkuje środki ułatwiające dziecku przejście na kolejny stopień wyobraźni. Unika ich nadmiaru, wystrzega się rutynowych przyzwyczajeń i wyręczania dziecka podczas rozwiązywania problemu. Ceni sobie najbardziej: żywą rozmowę, spotkania z ciekawymi ludźmi, przyrodą, zadania postawione naturalnie – przez sytuację, w jakiej się znaleziono (np. jak oszacować odległość pomiędzy polami namiotowymi po przeciwnych stronach jeziora).

Naturalnym sposobem rozwijania wyobraźni jest zaskoczenie. Wywołanie w umyśle dziecka konfliktu między intuicją a obiektywną prawdą (gdy zawodzą nas zmysły, a rozwiązanie wydaje się niemożliwe, zaskakujące, nie do uwierzenia) rozbudza własną, odważną pomysłowość.

Rozwiązanie zadania z pewnością zaskoczy tych, którzy spotkają się z nim po raz pierwszy: *Podaną długość równika (ok. 40 000 km) należy przedłużyć o 1 metr i obliczyć, ile będzie miejsca, jeśli przestrzeń między Ziemią a przedłużonym obwodem wyrównamy ze wszystkich stron. Czy pod obręczą między równikiem a jego przedłużoną o 1 m „długością" zmieści się kot, mysz, a może jedynie kartka papieru?*

Zdziwienie niedowierzających uczniów, widoczna na twarzach potrzeba natychmiastowego sprawdzenia rozwiązania intuicyjnego, czasami grymas rozczarowania – tego doświadczamy podczas rozwiązywania podobnych zadań. Poniżej przedstawiam rozwiązanie ucznia z klasy I liceum:

[13] W. Limont (1996), *Analiza wybranych mechanizmów wyobraźni twórczej. Badania eksperymentalne*, Toruń: Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, s. 12.

[14] A. Pardała (1995), *Wyobraźnia przestrzenna uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki. Teoria, problemy, propozycje.* Rzeszów: Wydawnictwo Oświatowe FOSZE, s. 65–66.

[15] W. Nowak (1989), *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, s. 81–82.

*Przez **R** oznaczam promień Ziemi. Wtedy obwód wynosi 2π**R.** Do tego obwodu dodaję 1m i otrzymuję 2π**R**+1. Jaki promień ma koło, którego obwód wynosi 2π**R**+1?*

*Jeśli ten niewiadomy promień oznaczę przez r, to mogę napisać: 2π**r**=2π**R**+1, a zatem*

$$r = \frac{2\pi R + 1}{2\pi} = R + \frac{1}{2\pi}$$

$$r - R = \frac{1}{2\pi} \approx \frac{1}{2 \cdot 3.14} \approx 0.16m$$

*Różnica **r-R** wynosi zatem około 0.16 m, czyli 16 cm. Pod obręczą przejdzie zatem nawet całkiem duży kot.*

Sądzę, że od autorskiego rozwiązania ucznia ciekawsze są jego pytania i refleksje, które pojawiły się później:

Interesujące wydawało mi się, że przyrost promienia nie zależy od promienia Ziemi. Jest taki sam dla koła o promieniu 3 cm, jak i dla koła o promieniu milion razy większym od promienia Ziemi. Ciekawe, czy zagadnienie to da się uogólnić na „Ziemię" innego kształtu…, np. sześcianu, walca czy stożka?[16].

Rozważania te świadczą o postawie otwartej, o chęci rozszerzania zadania i stawiania nowych pytań, a takie postępowanie to nic innego, jak przykład aktywności matematycznej ucznia. O rozwijaniu wyobraźni przez aktywność własną, tzw. przedłużanie problemu i modyfikację zadań, pisze Kazimierz Skurzyński[17]. Autor podaje przykłady tworzenia list zadań na bazie początkowego oraz wskazuje na poznawcze aspekty takich działań (rozwijanie aktywności i wzbogacanie wiedzy matematycznej). Z punktu widzenia modelu twórczości L. Guilforda[18] jest to doskonały przykład prowokowania sytuacji trenowania płynności, giętkości i metaforyczności myślenia.

Zadań idealnie nadających się do modyfikacji jest wiele – np. *Cegła waży kilogram i pół cegły. Ile waży cegła*? albo *Sprzedawca kupił towar za 70 zł, potem go sprzedał za 80 zł, następnie go odkupił za 90 zł i sprzedał za 100zł. Oblicz zysk sprzedawcy po tych transakcjach* i stopniowo przechodźmy do zadań bardziej zaawansowanych (np.

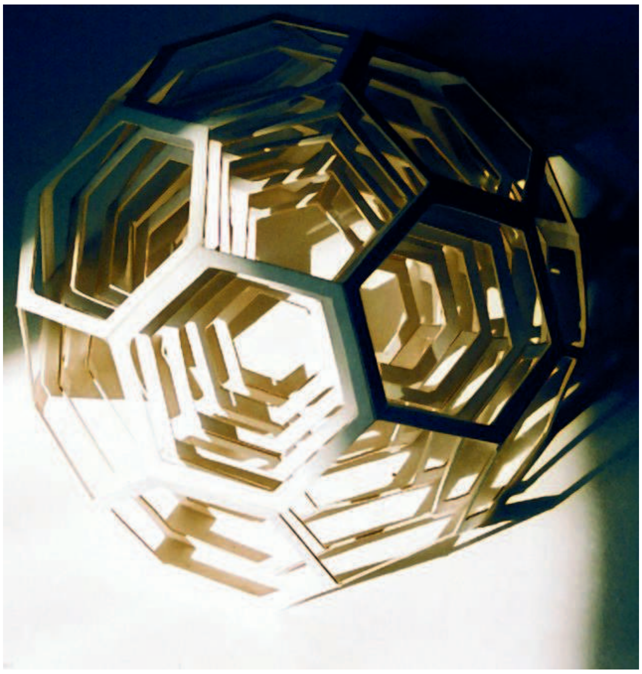
[16] Fragment wypowiedzi ucznia – autora rozwiązania.

[17] K. Skurzyński (2001), Niektóre *metody rozwijania matematycznej aktywności uczniów*, Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, s. 9–30.

[18] J. W. Eby, J. F. Smutny (1998), *Jak kształcić uzdolnienia dzieci i młodzieży.* Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, s. 52.

problem kolorowych kapeluszy czy bliźniaków[19]).

Innym, cenionym w szkołach twórczych, sposobem rozwijania geometrycznej wyobraźni uczniów jest konstruowanie i dyskutowanie matematycznych modeli. Służą do tego celu zestawy prętów i łączy, słomki do napojów, drewniane listewki.



Fot. 1 Dwunastodwudziestościan, Danuta Dąbrowska-Wojciechowska

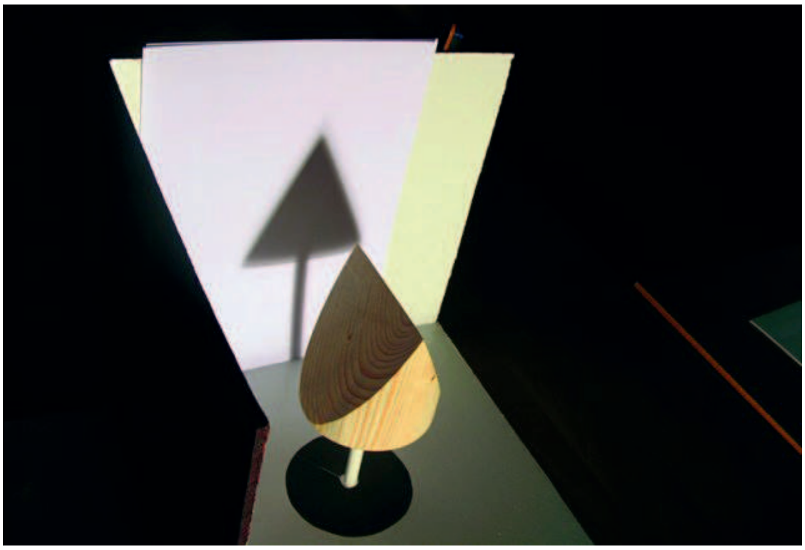
Przedstawiony na fot. 1 ujmujący precyzją wykonania model wielościanu półforemnego kryje w sobie wiele matematycznych ciekawostek i problemów. Zastosowane iteracje pozwalają pobudzić wyobraźnię przestrzenną odbiorcy. Pomagają poddać się wrażeniu możliwości nieskończonego spaceru w głąb figury sześcio – lub pięciokątnym korytarzem. Czy te drogi się spotkają? Kształt powinien być wyjątkowo dobrze znany piłkarzom, gdyż wykorzystywany jest przez twórców piłek futbolowych[20].

Po treningu wspomaganym narzędziami zewnętrznymi (modele, anaglify, komputerowe animacje) dobrze jest zaproponować rozwiązanie zadania przy użyciu jedynie swoich wyobrażeń. Może to być np. poszukiwanie takiej figury, która jednocześnie (aczkolwiek na trzy wzajemnie prostopadłe ściany pokoju) rzuci cień w kształcie kwa-

[19] Treści tych zadań znajdziemy w np. R. Smullyan (1995), *Dama czy tygrys oraz inne zagadki logiczne*, Warszawa: Książka i Wiedza.

[20] M. Makiewicz (2010), *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli* Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, s. 99.

dratu, koła, trójkąta[21]. Rozwiązanie można narysować, wykonać model (fot.2), ale świadectwem najbardziej rozwiniętej wyobraźni jest relacja (najlepiej telefoniczna – bez możliwości gestykulacji ani rysowania) konstrukcji szukanej figury: „model to pionowy cylinder o wysokości równej iloczynowi średnicy podstawy przez $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ze ściętym na dwie strony dachem w taki sposób, że od górnej średnicy cylindra symetrycznie opadają dwie ściany dachu. Każda ze stron tego dachu ma dotykać do dolnej podstawy cylindra dokładnie w jednym punkcie".



Fot. 2 Model ilustrujący rozwiązanie zadania – I, Małgorzata Makiewicz

Przedstawiony przykład nawiązuje do słów Richarda Feymana o wyobraźni. Mamy do czynienia z projektowaniem tego, czego wcześniej nie widzieliśmy, z tworzeniem nowych wyobrażeń, twórczym konstruowaniu nowych obrazów uznanym za najwyższy etap rozwoju wyobraźni przestrzennej[22].

POSTRZEGANIE PIĘKNA MATEMATYKI

Co do sądów na temat istoty matematycznego myślenia nie ma jednego stanowiska nawet wśród matematyków. Dla jednych (np. Pitagorejczyków) matematyka – to struktura „wytworzona jedynie rozumowaniem zajmujących się nią ludzi, którzy wyzwolili

[21] G. Nierenberg (1996), *Sztuka kreatywnego myślenia,* Warszawa: Studio Emka, s. 19.
[22] A. Pardała (1995), *Wyobraźnia …*, dz. cyt., s. 67.

się z niewoli pospolitych i dostępnych każdemu doświadczeń empirycznych"[23], dla innych rodzaj sztuki, jeszcze innych język opisania przyrody. Zygmunt Janiszewski mówił o sobie: „zajmuję się matematyką dlatego, aby przekonać się, jak daleko umysł ludzki może dojść samym rozumowaniem"[24]. Z kolei Henri Poincare, wybitny francuski znawca procesu twórczego w naukach ścisłych, zauważył pewien rodzaj zadowolenia estetycznego, który towarzyszy harmonii cyfr i norm. Matematyka, jego zdaniem, nierozerwalnie złączona jest z harmonią, pięknem, elegancją. Choć doświadczenie miało istotną rolę w powstaniu geometrii, w zdecydowany sposób wyłącza ją spośród nauk empirycznych. Podobnie angielski ekspert z zakresu teorii liczb Gofrey Hardy, który nigdy nie zajmował się praktycznymi zastosowaniami matematyki, z wyjątkowym szacunkiem odniósł się do estetyki odkryć w matematyce: „piękno i dostojeństwo są kryteriami, przy pomocy których należy oceniać dzieła. Nie ma na świecie trwałego miejsca dla brzydkiej matematyki"[25]. Jego zdaniem tworzący matematyk, podobnie jak malarz czy poeta, tworzy trwałe, piękne desenie. Pojęcia, zupełnie jak barwy, nuty czy słowa muszą harmonijnie pasować i układać się w wyjątkowy deseń. Swój podziw związany z konsekwencjami matematycznego modelowania wyraził Albert Einstein: „matematyka – produkt myśli ludzkiej niezależny od doświadczenia – tak idealnie pasuje do świata realnego"[26].

Jak dostrzegać piękno matematyki w szkole? Czy to w ogóle możliwe? Przecież matematykę, której uczymy się w szkole od jej prawdziwych odkryć oddziela wielka przestrzeń. Do zrozumienia i docenienia piękna teorii, elegancji rozwiązania lub przeprowadzonego rozumowania potrzeba pewnej dojrzałości. Wyczucie estetyczne, wrażliwość dziecka na piękno kształtuje się jeszcze przed pierwszą jego wizytą w szkole. Pierwsze lata życia to okres dostrzegania różnic, ujawniania pragnień, okazywania emocji, nabywania wzorców. Od postawy i stylu rodziców oraz walorów artystycznych otoczenia zależy rozwój wrażliwości dziecka. Nauczanie matematyki pozwala nie tylko rozpoznawać wzorce i upodobania, ale i je tworzyć, nazywać, opisywać nowe jakości. Matematyka szkolna pozwala dostrzec proporcje, zrozumieć harmonię i docenić piękno otaczającego nas świata. Do zrozumienia prawdziwego piękna matematycznego myślenia potrzeba opanowania pewnej ilości pojęć, związków zachodzących między nimi. Niezbędna jest również wyrobiona na pewnym poziomie kultura matematyczna.

[23] A. Chmielewski (2009), *Dynamiczna architektonika matematyki*, W: R. Konik (red.), *Matematyka, filozofia, sztuka* (2009), Wrocław: Studia Philosophica Wratislaviensia, s. 10.

[24] Za: K. Skurzyński (1990), *Materiały pomocnicze do nauczania dydaktyki matematyki*, Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, s. 11.

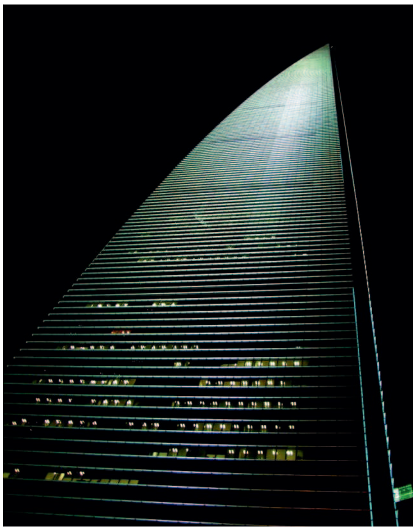
[25] Za: A. L. Hammond (1983) *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, [w:] L. A. Steen (red.) (1983), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, s. 34.

[26] Za: K. Skurzyński (1990), *Materiały pomocnicze …*, dz. cyt., s. 9.

Sposobów na kształtowanie poczucia matematycznego piękna jest wiele. Wrażliwość na symetrię, harmonię, złoty podział odcinka rozbudzić można podczas szkolnej wycieczki, postrzeganie matematycznych prawidłowości – na biwaku, podczas wykonywania zielnika czy kalendarza pogody, zaciekawić jednokładnością – podczas składania origami lub zabawy z cieniem. Jednym z ciekawszych sposobów pobudzenia uczniowskiej wrażliwości na matematyczne piękno jest fotografowanie. Proces ten to przede wszystkim wyzwalanie ciekawości, kształcenie dociekliwości poznawczej, myślenia oryginalnego i twórczego. Omawianie fotografii przedstawiających geometryczne pojęcia, prawidłowości lub metafory pozwala zaprzyjaźnić się z matematyką żywą i użyteczną. Wszelkie działania mające na celu wdrożenie uczniów poprzez sztukę do twórczego myślenia w matematyce wydają się uzasadnione. Wykorzystany w tym procesie aparat fotograficzny pomaga wyzwolić własną kreatywność i samodzielność uczniów (zarówno obserwacji, jak i wizualizacji[27]). Zaprezentowane poniżej fotografie pochodzą z I Ogólnopolskiego Konkursu Fotograficznego organizowanego przez Uniwersytet Szczeciński „Matematyka w obiektywie". Zwróćmy uwagę na różne oblicza matematyki, jak również na opisy pochodzące od autorów zdjęć.

Fotografia wykonana przez uczennicę gimnazjum (fot. 3) wyraża oryginalne spojrzenie autorki na architekturę. Piękno budowli łączy z abstrakcyjnym pojęciem nieskończoności.

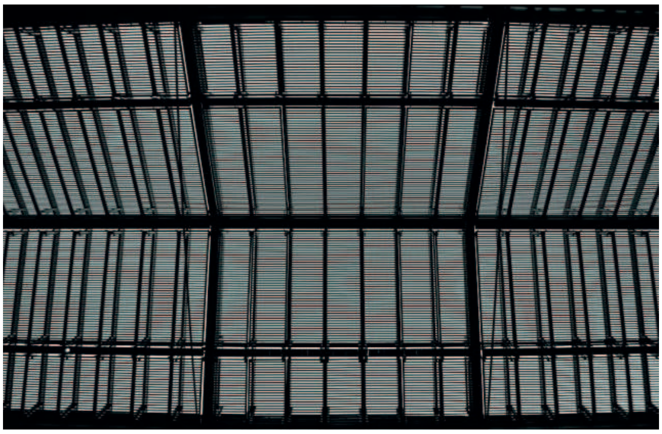
[27] M. Makiewicz (2010), *Przykłady twórczych pomysłów uczniów fotografujących obiekty matematyczne*, [w:] W. Limont, J. Cieślikowska, J. Dreszer (red.) (2010), *Osobowościowe i środowiskowe uwarunkowania rozwoju ucznia zdolnego* Toruń: Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika t. 2, s. 137.



Fot. 3 Nieskończoność, Jadwiga Bosacka

Byłam w Szanghaju i wydawało mi się, że jestem na końcu świata. Patrząc na najwyższy budynek w tym mieście, próbowałam wyobrazić sobie nieskończoność (opis: Jadwiga Bosacka).

Kolejne zdjęcie (fot. 4) wykonała uczennica podziwiająca dzieła w paryskim Luwrze. Zadziwiające, że zaciekawiła się matematycznymi aspektami szklanego świetlika… Autorski komentarz wskazuje na poznawcze aspekty odbioru tego obrazu.



Fot. 4 Punkt wspólny prostych równoległych, Sara Szostak

Nie mogę oprzeć się złudzeniu, że linie równoległe widoczne na zdjęciu mają punkt wspólny. Czyż to złudzenie nie jest przykładem, że nasz świat nie do końca podlega regułom geometrii euklidesowej (a konkretnie przeczy V Postulatowi Euklidesa) (Opis: Sara Szostak).

Na piękno matematyki – architektury przyrody zwraca uwagę fotografia przedstawiająca perfekcję złożenia obrotu z jednokładnością (fot. 5). Takie podobieństwo przemieszcza dowolny punkt (poza środkiem jednokładności) wzdłuż spirali równokątnej (logarytmicznej), która *podziela z linią prostą i okręgiem tę ważną własność, że podobieństwa tworzące pewną ciągłą grupę, przekształcają ja na nią samą*[28].

Fot. 5 Amonit, Daniel Wójcik

OPANOWANIE UMIEJĘTNOŚCI PRZEPROWADZANIA DOWODÓW

Wybitny węgierski matematyk i dydaktyk George Polya zaznacza, że *uczeń, który nigdy nie był pod urokiem dowodu matematycznego, pozbawiony został jednego z ważniejszych przeżyć intelektualnych.* Problem jednak w tym, że „być pod urokiem" nie jest tym samym, czego oczekuje się od studenta na egzaminie – przytoczenia dowodu lub jego zarysu. Studenci matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w swych „Rozmaitościach absurdalnych" pytają, „czy zdarzyło się wam powątpiewać w dopiero co udowodnione twierdzenie?". Mowa o odróżnieniu dowodu formalnego od przeświadczenia o prawdziwości twierdzenia. W klasach młodszych dobrzy nauczyciele uzasadniają fakty pokazując ich przykłady, rysunki, wizualizacje. I to wystarcza. Do przeprowadzania dowodu formalnego potrzeba nie tylko rozumienia na poziomie

[28] H. Weil (1997), *Symetria*, przeł. S. Kulczycki, Warszawa: Prószyński i S-ka, s. 73.

instrumentalnym i intuicyjnym, ale konieczne jest posługiwanie się myśleniem logicznym opartym na rozumowaniu hipotetyczno-dedukcyjnym[29]. Dobry nauczyciel potrafi rozpoznać i kształtować strefę najbliższych możliwości (rozwoju) ucznia i do niej dopasować swoje zabiegi dydaktyczne. Badania Lwa Wygotskiego optymistycznie odnoszą się do intelektualnych możliwości uczniów[30], ale pamiętajmy o kryzysie autorytetów, krytycznym stosunku do stwierdzeń dorosłych i wyjątkowej wrażliwości na niezgodności, które są atrybutami wieku dorastania[31]. Dopiero w tym okresie dane jest uczniom poczucie sensu przeprowadzania dowodu formalnego: „dowody zwalniają mnie od obowiązku przyjmowania twierdzenia na wiarę, poza tym umożliwiają głębsze zrozumienie sensu twierdzenia (…), dają mi wiele satysfakcji, która jest tym pełniejsza, im trudniejsze było zagadnienie do udowodnienia”[32].

W klasach młodszych stosujemy uzasadnienia obrazowe – np. sumy kątów w trójkącie lub indukcyjne uogólnienie zadań podobnych – np. obliczanie półtrójkątów o tej samej podstawie, których trzeci wierzchołek porusza się po prostej równoległej do podstawy. Dowodzenie formalne, jedna z najważniejszych aktywności matematycznych, wymaga od nauczyciela starannego przygotowania uczniów.

Weźmy pod uwagę twierdzenie o niewymierności $\sqrt{2}$. Dowód za pomocą rozumowania znanego pod nazwą *nie wprost* poprzedzimy serią zadań wprowadzających: udowodnić, że kwadrat liczby parzystej jest liczbą parzystą[33], udowodnić, że kwadrat liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą[34], udowodnić, że kwadrat liczby parzystej jest liczbą podzielną przez 4[35] oraz przypomnieniem określenia pierwiastka, liczby wymiernej. Wtedy rozumowanie:

Przypuśćmy, że tak nie jest – czyli, że liczba $\sqrt{2} \in Q$. Liczbę $\sqrt{2}$

można zapisać w postaci ułamka $\frac{a}{b}$, gdzie $a \in Z \quad b \in Z - \{0\}$.

Zatem $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Podnieśmy do kwadratu obie strony tego równania. Otrzymamy:

---

[29] H. Siwek (2005), *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, s. 194.

[30] L. Wygotski, *Myślenie i mowa*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, s. 165.

[31] Z. Włodarski, A. Hankała (2004), *Nauczania i wychowanie jako stymulacja rozwoju człowieka, Kraków:* Impuls, s. 71.

[32] H. Kąkol (1985), *Dowód twierdzenia; rodzaje dowodów,* „Oświata i Wychowanie” Wersja B 9/1985, s. 60–62.

[33] $(2n)^2=2n2n=4n^2=2(2n^2)$

[34] $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+\mathbf{1}$

[35] $(2n)^2=2n2n=4n^2=\mathbf{4}(n^2)$

$2 = \frac{a^2}{b^2}$ czyli $a^2 = 2b^2$. Rozpatrując parzystość i nieparzystość liczb a i b

mamy cztery przypadki:

I	II	III	IV
a – liczba nieparzysta b – liczba parzysta	a -liczba nieparzysta b – liczba nieparzysta	a – liczba parzysta b – liczba nieparzysta	a – liczba parzysta b – liczba parzysta
$a^2 = 2b^2$ kwadrat liczby nieparzystej (strona lewa) jest liczbą nieparzystą, ale prawa strona jest liczbą parzystą – sprzeczność	$a^2 = 2b^2$ kwadrat liczby nieparzystej (strona lewa) jest liczbą nieparzystą, ale prawa strona jest liczbą parzystą – sprzeczność	$a^2 = 2b^2$ kwadrat liczby parzystej (strona lewa) jest liczbą podzielną przez 4, ale prawa strona nie może być podzielna przez 4, bo b^2 nie jest liczbą parzystą (liczba b^2 nie była parzysta) – sprzeczność	$a^2 = 2b^2$ jest to ostatnia możliwość, ale łatwo zauważyć że prowadzi do sytuacji I, II lub III

W konsekwencji otrzymujemy również sprzeczność. Zatem przypuszczenie, że $\sqrt{2} \in Q$ było fałszywe. Prawdą musi być: $\sqrt{2} \notin Q$. Zauważmy, ze kilka zadań wstępnych, zręczne przygotowanie lematów uczyniło ten piękny dowód – łatwy i zrozumiały dla ucznia klasy I liceum.

Kolejny przykład dotyczy pomysłu nauczycielki klasy maturalnej w szczecińskim liceum ogólnokształcącym. Jako zadanie domowe poleciła ona wyszukać i przedstawić różne dowody twierdzenia $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$.

Nie chodziło oczywiście o sposób pokazany w podręczniku szkolnym. Podczas dwugodzinnej lekcji wielu uczniów prezentowało swoje „znaleziska" – trzeba było nie tylko sięgnąć do literatury fachowej, przeczytać, zrozumieć, wykonać stosowne notatki oraz przygotować się do zreferowania. Nie przypominam sobie, czy uczniowie otrzymali wtedy oceny. Pamiętam jednak, dyskretnie ukrywaną, dumę nauczycielki oraz pochwałę skierowaną do wszystkich, którzy zdecydowali się zaprezentować dowody. Choć od opisywanej lekcji minęło już ponad 25 lat, uważam ją za jeden z ciekawszych sposobów pokazania kultury matematycznej. To właśnie wtedy po raz pierwszy sięgnęłam po „analizę" Kazimierza Kuratowskiego[36] i zrozumiałam, że sposobów na rozwiązanie problemu może być wiele. Składam serdeczne podziękowania Pani Profesor Irenie Wrzosek za tę lekcję oraz wynikające z niej przemyślenia.

KULTURA MATEMATYCZNA NASZA I NASZYCH NAUCZYCIELI

Proces kształtowania kultury matematycznej uczniów odbywa się w wyniku kontaktu z materią matematyczną. Pośrednikiem w tym związku jest najczęściej nauczyciel. Kształci umiejętność czytania i rozumienia twierdzeń, pokazuje jak dostrzegać i jasno formułować problemy, zaszczepia potrzebę uzasadniania sądów, rozbudza zainteresowania i pasje, wskazuje drogi poznania. Od jego talentu pedagogicznego zależy w dużej mierze to, czy i w jakim zakresie uczeń jest zdolny przyjąć ofertę swojego mistrza. Kultura matematyczna przejawia się również w tym, że uczeń jest skłonny czerpać mądrość od swojego nauczyciela. Jest niczym jego cień, który wraz z upływem czasu, samorozwojem, zaczyna tworzyć samodzielną jakość. Bywa i tak, o czym skrycie marzą mistrzowie, że ta nowa jakość zachwyca tych, dzięki którym powstała. Wydaje się, że fotograficzna metafora mistrza (jako kryształowej kuli) i ucznia (jego cienia) (fot. 6) oddaje sens fraktalnej translacji wiedzy, umiejętności, światopoglądu.

Fot. 6 Elipsa cieniem kuli, Daniel Wójcik

Zauważmy, że wielkość cienia zmienia się wraz ze zmianą oświetlenia. Od niezauważalnego obszaru wokół punktu styczności w przypadku oświetlenia „w samo

[36] K. Kuratowski (1975), *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, s. 66–67.

południe" do „wieczornej" elipsy bardziej rozległej niż sama kula. Proces samorealizacji każdego człowieka jest wypadkową zdolności wrodzonych, wypracowanych umiejętności, jak również wpływu autorytetów, które pojawiły się na drodze życiowej.

ZAKOŃCZENIE

Janusz Majcherek przypomina: „samo pojęcie *kultura* wywodzi się od cycerońskiej metafory, ujmującej aktywność duchową *(kultura animi)* w kategoriach uprawy roli *(agralcultura)*"[37]. Ewolucja poglądów od monizmu kulturowego po pluralizm dopuszcza istnienie wielu kultur, a także ich wzajemne przenikanie, łączenie, scalanie. Postmodernistyczny „supermarket kultury" stał się pewnego rodzaju ofertą na transkulturowe i ponadkulturowe dążenia do budowania eklektycznych kompilacji i synkretycznych powiązań. Metafora kultury autorstwa Ruth Benedict przedstawiająca kubek, z którego piją jej użytkownicy, niezwykle trafnie określa jej egalitarną dostępność. Czy z kubka *kultury matematycznej* mogą pić rzeczywiście wszyscy? Jakie korzyści wynikają z połączenia oferowanej aktywności duchowej z codziennością i zadaniami, jakie stawia przed nami życie?

Zarysowane w artykule przykłady miały za zadanie ukazać praktykę dobrego rozumienia, rozbudzania i pielęgnowania elementów kultury matematycznej ucznia. Ponadczasowość wartości kształtowanych poprzez kulturę jest niezaprzeczalna. Lynn Arthur Steen pisze: „matematyka istnieje. Jest nieodłączną częścią racjonalnej siły człowieka i – podobnie jak język, sztuka czy religia – jest częścią jego natury i historii. Dziś wywiera ogromny (choć ciągle jeszcze niedostrzegalny) wpływ na naukę i społeczeństwo"[38]. Rzeczywiście – na przestrzeni ostatnich kilkudziesięciu lat abstrakcyjne myśli matematyczne bardzo istotnie wpłynęły na rozwój kryptografii, elektroniki, technologii, diagnostyki medycznej, meteorologii i wielu innych. Tworząca się równolegle do samej matematyki – jej kultura nie jest związana z żadnym terytorium, przestrzenią, ani (bezpośrednio) z jakąś grupą społeczną. Stanowi pewien zespół własności umysłu człowieka – zdolnego do matematycznego rozumowania. Obejmuje szereg, wymienionych wcześniej, umiejętności, które tylko z pozoru mogą wydawać się teoretyczne i abstrakcyjne. Pomaga sprawnie – technicznie prowadzić obliczenia, dowodzić, dobierać właściwe metody rozwiązywanych problemów. Dobrze rozwinięta wyobraźnia i wrażliwość na piękno stają się atrybutami człowieka wykształconego, który potrafi szacować, optymalizować, poprawnie wnioskować, demaskować cudze

[37] J. A. Majcherek (2009), *Kultura, osoba, tożsamość. Z zagadnień filozofii i socjologii kultury*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, s. 55.

[38] L. A. Steen (red.) (1983), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, s. 13.

błędy i odpierać nieuzasadnione sądy. Bogactwo człowieka mądrego kulturą matematyczną daje mu klucz do obserwacji i interpretacji świata Jak zauważył znany angielski fizyk i matematyk Roger Penrose, *umysł zawsze może nawiązać kontakt ze światem, ale postrzegany fragment jest na ogół bardzo mały.* Zrozumienie sensu, przyczyn i konsekwencji zjawisk przyrody, prawidłowości konstrukcji, proporcji, symetrii kształtów nadaje subiektywnemu odczuciu piękna nowy, wyższy wymiar.

Odkrycia matematyczne są przejawem kunsztu myślenia człowieka. Charakteryzują się precyzją, spójnością i sprawnością podążania drogami abstrakcji. Aby do nich doszło, konieczne jest przebywanie twórcy na pewnej orbicie – kultury matematycznej. Również w życiu codziennym inżyniera, projektanta, ogrodnika czy kucharki kultura matematyczna w sposób niedostrzegalny pomaga klarownie wyrażać swoje myśli, prezentować sądy, przybliżać, szacować, abstrahować czy krytycznie odnosić się do medialnego smogu informacji. Pomaga zgrabnie prowadzić rozumowanie z przypuszczenia, trafnie, a nierzadko wręcz optymalnie rozwiązywać różnorodne problemy.

W kolejnych latach szkoła będzie się zmieniać, ewoluować. Szkoła to nie zastany stan, to proces, w którym kształcenie matematyczne zajmuje ważną pozycję. Proces reformowania nauczania matematyki zapewne będzie dotyczył: programów, podręczników, metod nauczania. Najprawdopodobniej niezmiennikiem tych przemian staną się elementy kultury matematycznej, które wyposażą absolwentów w coś więcej niż wiedza czy umiejętności. Dadzą uniwersalne narzędzie do rozwiązywania nowych zadań w dorosłym życiu.

BIBLIOGRAFIA

Chmielewski A. (2009), *Dynamiczna architektonika matematyki*, W: R. Konik (red.), *Matematyka, filozofia, sztuka* (2009), Wrocław: Studia Philosophica Wratislaviensia.

Duda R. (1990), *Dyskusja „Co to jest kultura matematyczna?”*, „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie” Nr 5.

Eby J. W., Smutny J. F. (1998), *Jak kształcić uzdolnienia dzieci i młodzieży.* Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Grobler A. (2001), *Nie o to chodzi, by złowić króliczka*, „Przegląd Filozoficzny” Nr 3.

Kąkol H. (1985), *Dowód twierdzenia; rodzaje dowodów,* „Oświata i Wychowanie” Wersja B Nr 9.

Hammond A. L. (1983), *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, [w:] L. A. Steen (red.) (1983), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Kuratowski K. (1975), *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Kurina F. (1991), *Kultura matematyczna nauczyciela matematyki*, [w:] „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie” Nr 6.

Limont W. (1996), *Analiza wybranych mechanizmów wyobraźni twórczej. Badania eksperymentalne*, Toruń: Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.

Majcherek J. A. (2009), *Kultura, osoba, tożsamość. Z zagadnień filozofii i socjologii kultury*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego.

Makiewicz M. (red.) (2007), *Kulturotwórcze konteksty nauczania matematyki*, Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.

Makiewicz M. (2009), *Do czego szkolna matematyka może się przydać po szkole? Rozważania na temat celów nauczania matematyki* (2009), „Matematyka, Pomagamy uczyć" Nr 4.

Makiewicz M. (2010), *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli,* Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.

Makiewicz M. (2010), *Przykłady twórczych pomysłów uczniów fotografujących obiekty matematyczne*, W: W. Limont, J. Cieślikowska, J. Dreszer (red.) (2010), *Osobowościowe i środowiskowe uwarunkowania rozwoju ucznia zdolnego* Toruń: Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika t. 2.

Nierenberg G. (1996), *Sztuka kreatywnego myślenia,* Warszawa: Studio Emka.

Nowak W. (1989), *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Pardała A. (1995), *Wyobraźnia przestrzenna uczniów w warunkach nauczania szkolnej matematyki. Teoria, problemy, propozycje.* Rzeszów: Wydawnictwo Oświatowe FOSZE.

Siwek H. (2005), *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Skurzyński K. (1990), *Materiały pomocnicze do nauczania dydaktyki matematyki,* Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.

Skurzyński K. (2001), Niektóre *metody rozwijania matematycznej aktywności uczniów*, Szczecin: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.

Smullyan R. (1995), *Dama czy tygrys oraz inne zagadki logiczne*, Warszawa: Książka i Wiedza.

Steen L. A. (red.) (1983), *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Szurek M. (2005), *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów*, Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, t. 1.

Weil H. (1997), *Symetria*, przeł. S. Kulczycki, Warszawa: Prószyński i S-ka.

Więsław W. (1998), *Kultura matematyczna a kultura matematyków*, „Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie" Nr 21.

Włodarski Z., Hankała A. (2004), *Nauczania i wychowanie jako stymulacja rozwoju człowieka, Kraków:* Impuls.

Wygotski L. (1989), *Myślenie i mowa*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Małgorzata Makiewicz, *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*

Title: Mathematics – our indiscernible culture

Abstract: Mathematical culture, which was built for ages on the foundations of Greek culture, does not relate to a certain technique, skill or the ability of using formal language in the process of proving and solving problems. What mathematical culture embraces is also creativity and ingenuity, appropriate understanding of certain ideas as well as perceiving beauty and the usefulness of this discipline at the same time. Also, the already mentioned mathematical culture consists in the ability of discerning some mathematical ideas, schemes and problems in the world that surrounds us.

The aim of this text is to demonstrate certain values which can be treasured through teaching mathematics. Since they are universal and timeless, they are not prone to being affected by the consecutive reforms in education, nor new social and political outlooks. These values, though not related directly to the particular mathematical knowledge, concern the hitherto mentioned knowledge. They demonstrate how the mind of the mathematical-cultural man becomes beautiful. However, a certain conflict arises when it comes to the confrontation of the purpose of endowing the student with the elements of mathematical culture as opposed to the school reality which involves the necessity of executing the student's knowledge and his skills. On the one hand, our aims are focused on providing the graduate of the secondary school with the tools to synthesise, analyse and disregard the information so that he was able to reason on the basis of conjecture and critically verify the hypotheses, whereas on the other hand, we expect him to achieve high marks in the final exams or high classification in the rankings. In this article I would like to present a proposal of the change of the commonplace style of teaching mathematics which consists in departing from a schematic execution of knowledge (which is based on reciting definitions, theorems, solving tests and settling problems in a schematic way) to the one in favour of mathematical culture education.