Filozofia Nauki (*The Philosophy of Science*)
ISSN 1230-6894
2018, vol. 26(3) [103]: 99-112
DOI: 10.14394/filnau.2018.0019

JERZY DADACZYŃSKI*

O NIEKTÓRYCH INSPIRACJACH HILBERTOWSKIEGO PROGRAMU FORMALIZMU

Abstract

ON SOME INSPIRATIONS OF HILBERT'S FORMALISM

Hilbert's program of formalism was undoubtedly a result of many mathematical, logical, and philosophical factors. The aim of this paper is to indicate some rarely highlighted contexts. One important goal of Hilbert's program was to prove the consistency of arithmetic. The paper shows that Hilbert did not begin the study of this issue only after the discovery of Russell's paradox. The issue of the consistency of the arithmetic of real numbers was associated with the discovery — by Burali-Forti and Cantor — of the first set-theoretical antinomy, i.e. the antinomy of the greatest ordinal number. Hilbert, already in 1899, asked whether the set of real numbers — to use Cantor's terminology — was a consistent collection. He then raised the issue of the consistency of the arithmetic of natural numbers in 1904, after the discovery of Russell's paradox. Fundamental for Hilbert's mature program of formalism was the distinction between the finitistic and the infinitistic mathematics. The paper points out that the source of this distinction can be found in Brouwer's proof-theoretical and constructivist criticism of certain theorems of the classical logic. So significant was the criticism that Hilbert had to take it into account in his formalistic reconstruction of classical mathematics. The result was precisely his distinction between the finitistic and the infinitistic mathematics.

Keywords: David Hilbert, Georg Cantor, Bertrand Russell, L. E. J. Brouwer, philosophy of mathematics, formalism, Hilbert's program

Hilbertowski program formalizmu był niewątpliwie wypadkową wielu czynników matematycznych, logicznych i filozoficznych. Celem artykułu jest wskazanie niektórych z nich, dotąd bardzo rzadko zauważanych.

Program Hilberta kojarzy się przede wszystkim z celem, dla którego został zbudowany, a więc z zamiarem udowodnienia niesprzeczności matematyki klasycznej. Niebezpieczeństwo antynomii w podstawach matematyki ujawniło

* Katedra Filozofii Logiki, Wydział Filozoficzny, Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie, ul. Kanonicza 9, 31-002 Kraków, dada59@gmail.com.

się przede wszystkim w związku z odkryciem antynomii Russella i stwierdzeniem niemożliwości realizacji programu logicyzmu w jego pierwotnej, Frege'owskiej, wersji. Jako że antynomia Russella uderzała przede wszystkim w podstawy arytmetyki liczb naturalnych, to właśnie dowiedzenie jej niesprzeczności wydawało się najważniejszym zadaniem formalizmu.

Jednym z celów artykułu jest pokazanie, że studia nad niesprzecznością arytmetyki — tyle że liczb rzeczywistych — pozostawały w centrum zainteresowania Hilberta jeszcze zanim pojawiły się zasadnicze zakłócenia w realizacji programu Fregego. Ważne jest więc pytanie, co inspirowało Hilberta do tak wczesnego podjęcia zagadnienia niesprzeczności arytmetyki oraz w jakim stopniu ujawnienie antynomii Russella przyczyniło się do modyfikacji przedmiotu badań Hilberta. Ponadto, artykuł wskazuje źródła fundamentalnego rozróżnienia między matematyką finitystyczną a infinitystyczną, które odgrywało istotną rolę w dojrzałym programie formalizmu.

1. CANTOR I NIESPRZECZNOŚĆ ARYTMETYKI LICZB RZECZYWISTYCH (1899)

12 października 1899 r. do redakcji „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" wpłynął artykuł Hilberta *Über den Zahlbegriff*. Istotną część tekstu stanowiła aksjomatyzacja arytmetyki liczb rzeczywistych. Niemiecki matematyk charakteryzował w nim liczby rzeczywiste jako ciało[1] uporządkowane[2], archimedesowe[3] i zupełne[4]. Ostatnie dwa warunki stwierdzały w istocie ciągłość tego ciała. W 1900 r. w czasie II Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Paryżu Hilbert wystąpił ze słynnym wykładem *Mathematische Probleme*. Przedstawił w nim najważniejsze zadania, które stały według niego

---

[1] W 1899 r. Hilbert nie dysponował jeszcze koncepcją ciała algebraicznego, która została wprowadzona przez Ernsta Steinitza dopiero w 1910 roku. Odpowiednie aksjomaty arytmetyki liczb rzeczywistych nie były niezależne, czego zresztą Hilbert był świadomy. Niemniej to, co Hilbert chciał wyrazić za pomocą zależnych aksjomatów, daje się wyrazić za pomocą aksjomatów charakteryzujących ciało algebraiczne.

[2] Chodzi o uporządkowanie dziedziny liczb rzeczywistych przez relację mniejszości.

[3] „IV 1. (Aksjomat Archimedesa). Jeśli $a > 0$ i $b > 0$ są dwiema dowolnymi liczbami, to ciągle jest możliwe dodawanie a do siebie tylekroć razy, że powstała suma posiada własność $a + a + \ldots + a > b$" (Hilbert 1900b: 183).

[4] „IV 2. (Aksjomat zupełności). Nie jest możliwe dołączenie do systemu liczb innego systemu przedmiotów tak, by również w nowo powstałym systemie spełnione były wszystkie aksjomaty I, II, III, IV 1; albo krócej: liczby tworzą system przedmiotów, którego, przy spełnieniu wszystkich aksjomatów, nie można w żaden sposób rozszerzyć" (Hilbert 1900b: 183).

przed matematyką u progu XX wieku. Wśród 23 problemów na drugim miejscu postawił zagadnienie niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych (Hilbert 1900a: 264-266). Należy przypuszczać, że umieszczenie tej kwestii na tak wysokim miejscu, zaraz po problemie hipotezy *continuum* Cantora, wyrażało wagę, jaką Hilbert przypisywał problemowi niesprzeczności arytmetyki.

Problem niesprzeczności arytmetyki — w przyszłości przede wszystkim liczb naturalnych — odgrywał zasadniczą rolę w programie formalizmu, zdefiniowanym w latach dwudziestych, a zapowiedzianym już w 1904 roku. W związku z tym warto zastanowić się nad powodami, dla których już w 1900 r. Hilbert przywiązywał do tego problemu tak wielką wagę.

Pierwsza odpowiedź może być określona jako standardowa [STAND]: Hilbert uważał, że jeśli aksjomatyzuje się jakiś fragment matematyki, to oprócz pytania o niezależność aksjomatów z konieczności należy też postawić pytanie o niesprzeczność systemu aksjomatycznego[5].

Można pytać dalej, skąd brała się tego typu standardowa odpowiedź. Najogólniej rzecz biorąc, wynikała ona z XIX-wiecznych badań metageometrycznych zainspirowanych odkryciem pluralizmu geometrii, notabene w badaniach tych po raz pierwszy istotnie wyeksplikowano kwestię semantyki teorii matematycznych. Hilbert brał czynny udział w końcowej fazie tych badań. W 1899 r. zwieńczył je pracą *Grundlagen der Geometrie*.

Kwestię niesprzeczności aksjomatyk geometrii podejmowano właśnie z powodu pojawienia się w XIX wieku geometrii nieeuklidesowych. Ze względu na ich nieklasyczność, „nieortodoksyjność", stawiano pytanie o ich niesprzeczność. Udało się na nie pozytywnie odpowiedzieć, wskazując modele geometrii nieeuklidesowych w geometrii euklidesowej. Badanie tych kwestii kontynuował Hilbert w *Grundlagen der Geometrie*, uzyskując przynajmniej dwa istotne wyniki. Po pierwsze, wskazał euklidesowy model geometrii niearchimedesowej Giuseppe Veronesego, a po drugie, pokazał, że geometria euklidesowa ma model w arytmetyce liczb rzeczywistych. W ten sposób dostarczone zostały dowody niesprzeczności znanych geometrii. Przy tym Hilbert doskonale zdawał sobie sprawę, że są to dowody względne[6].

5 „Przy głębszym namyśle powstaje pytanie, czy pewne wypowiedzi pojedynczych aksjomatów między sobą się warunkują i czy w ten sposób aksjomaty nie zawierają wspólnych składowych [*Bestandteile*], które muszą być usunięte, jeśli chce się otrzymać system aksjomatów całkowicie od siebie niezależnych. Przede wszystkim chcę jednak wskazać jako najważniejszy problem — wśród licznych pytań, które mogą być postawione odnośnie do aksjomatów — to, czy są one między sobą niesprzeczne, to znaczy, czy na ich podstawie, za pomocą skończonej liczby wnioskowań logicznych, nigdy nie dojdzie się do rezultatów, które są ze sobą sprzeczne" (Hilbert 1900a: 264).

6 „W geometrii otrzymuje się dowód niesprzeczności aksjomatów w ten sposób, że konstruuje się odpowiednią dziedzinę liczb tak, że aksjomatom geometrycznym odpowiadają

Tę względność można wysłowić w sposób następujący: jeśli niesprzeczna jest arytmetyka liczb rzeczywistych, to niesprzeczne są znane geometrie. I tutaj można odnaleźć drugi istotny powód [RELAT1], dla którego Hilbert uważał za niezwykle istotne podjęcie kwestii niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych. Niesprzeczność arytmetyki liczb rzeczywistych gwarantowała niesprzeczność geometrii, lecz kwestia niesprzeczności tej pierwszej pozostawała nierozstrzygnięta.

Trzeciego powodu niemiecki matematyk nie wysłowił, ale wydaje się on oczywisty. W XIX wieku, przede wszystkim dzięki ogromnemu wysiłkowi i geniuszowi trzech matematyków — Bernarda Bolzana, Augustina Cauchy'ego i Karla Weierstrassa — dokonano arytmetyzacji analizy, będącej sztandarową dyscypliną matematyczną, przynajmniej między XVII a XIX wiekiem. W ten sposób udało się usunąć sprzeczności tkwiące w podstawach analizy, zapoczątkowanej przez Leibniza i Newtona. Rzecz jasna, przekonanie o niesprzeczności zarytmetyzowanej analizy musiało się opierać na przekonaniu o niesprzeczności fundującej ją arytmetyki liczb rzeczywistych. Zatem trzeci powód, dla którego należało podjąć kwestię niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych [RELAT2] należy ująć za pomocą następującego warunku: jeśli niesprzeczna jest arytmetyka liczb rzeczywistych, to niesprzeczna jest klasyczna analiza matematyczna.

Co najważniejsze jednak, żaden ze wskazanych powodów [STAND], [RELAT1], [RELAT2] nie był pierwszym i bezpośrednim powodem, dla którego Hilbert podjął, i to z wielkim naciskiem, kwestię niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych. Przekonuje o tym zakończenie artykułu *Über den Zahlbegriff* z 1899 r. (Hilbert 1900b), w którym Hilbert przedstawił aksjomatykę tej arytmetyki. Z tego, co pisze, wynika, że najważniejszym powodem podjęcia kwestii niesprzeczności arytmetyki było odkrycie przez Cantora pierwszej chronologicznie antynomii teoriomnogościowej. A zatem rzeczywista inspiracja pochodziła z zakresu badań teoriomnogościowych[7].

W tym miejscu konieczne jest krótkie wyjaśnienie. Cantor w liście do Richarda Dedekinda z 28 lipca 1899 r. przedstawił pierwszą znaną antynomię teorii mnogości, dotyczącą największej liczby porządkowej, a nazwaną później

analogiczne związki między liczbami tej dziedziny, i że konsekwentnie każda sprzeczność we wnioskowaniach z aksjomatów geometrycznych musiałaby być poznawalna w arytmetyce tej dziedziny liczb. W ten sposób poszukiwany dowód niesprzeczności aksjomatów geometrycznych jest sprowadzany do stwierdzenia niesprzeczności aksjomatów arytmetycznych. Natomiast dla dowodu niesprzeczności aksjomatów arytmetycznych potrzeba bezpośredniej drogi" (Hilbert 1900a: 264-265).

[7] Por. Hilbert 1900b: 184. Hilbert odwołuje się tutaj — mówiąc o niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych — do terminologii Cantora z 1899 r. wypracowanej w związku z odkryciem pierwszej antynomii teoriomnogościowej.

antynomią Burali-Fortiego[8]. Nazwa bierze się stąd, że jako pierwszy publikował na ten temat włoski matematyk Cesare Burali-Forti (1897). Publikacja ta początkowo znana była jednak tylko w niektórych kręgach matematyków włoskich. Przypuszcza się natomiast, że antynomię największej liczby porządkowej rzeczywiście jako pierwszy odkrył Cantor, najprawdopodobniej już w 1895 r. (por. Jourdain 1904: 70, Grattan-Guiness 1971).

W każdym razie w liście do Dedekinda z 28 lipca 1899 r. Cantor zaproponował pierwsze rozwiązanie problemu antynomii teoriomnogościowych. Jako pierwotne przyjął pojęcie *wielości*, a następnie zdefiniował:

1. Wielość absolutnie nieskończoną (= sprzeczną) [CSW]:

> Jedna wielość może być mianowicie tego rodzaju, że przyjęcie, iż *wszystkie* jej elementy „tworzą pewną całość", prowadzi do sprzeczności, tak że nie jest możliwe ujmowanie tej wielości jako jedności, jako „pewnej gotowej rzeczy". Takie wielości nazywam *absolutnie nieskończonymi* albo *sprzecznymi* (Cantor 1932: 443, tłum. Murawski 1986: 172).

2. Wielość *niesprzeczną* (= zbiór) [CNW]:

> Jeżeli, przeciwnie, ogół elementów pewnej wielości może być pomyślany bez sprzeczności jako „będący razem", tak że możliwe jest ujęcie go jako „*jednej* rzeczy", to nazywam tę wielość *wielością niesprzeczną* albo „zbiorem" (Cantor 1932: 443, tłum. Murawski 1986: 172).

Trzeba dodać, że choć list Cantora do Dedekinda po raz pierwszy został opublikowany dopiero w 1932 r., to tekst Hilberta z 1899 r. wskazuje, że treść tego listu, przynajmniej w części dotyczącej antynomii Burali-Fortiego, już wtedy była dobrze znana w środowisku niemieckich matematyków. Istnieją też przesłanki przemawiające za tym, że Cantor osobiście powiadomił Hilberta o odkryciu antynomii i próbach rozwiązania problemów, które rodzi[9].

Dla prowadzonych tutaj badań ważne jest stwierdzenie, że w dowodzie niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych Hilbert widział przede wszystkim uzasadnienie tego, że wielość liczb rzeczywistych istnieje i jest niesprzeczna w sensie Cantorowskim [CNW][10]. Można przy okazji zaznaczyć, że

---

[8] Por. Cantor 1932: 443-450 (listy Cantora do Dedekinda z 28.07.1899, 28.08.1899, 31.08.1899).

[9] Według Jourdaina Cantor poinformował Hilberta, Dedekinda i jego samego o stwierdzeniu sprzeczności, do jakiej prowadziłoby przyjęcie istnienia największej liczby porządkowej (por. Jourdain 1904: 70).

[10] „Aksjomaty IV 1 i IV 2 są wzajemnie niezależne; nie zawierają żadnej wypowiedzi o pojęciu zbieżności albo o istnieniu granicy, niemniej wynika z nich, jak można pokazać, Bolzanowskie twierdzenie o istnieniu punktu skupienia. Tym samym poznajemy tożsamość naszego systemu liczb ze zwykłym systemem liczb rzeczywistych. Aby udowodnić niesprzeczność przedstawionych aksjomatów, potrzeba tylko odpowiedniej modyfikacji zna-

Hilbert natychmiast rozpoznał niebezpieczeństwo, jakie stanowiła dla matematyki pierwsza odkryta antynomia teoriomnogościowa. Połączenie zagadnienia niesprzeczności aksjomatyki arytmetyki liczb rzeczywistych, bezpośrednio po jej pierwszej prezentacji, z niesprzecznością wielości [CNW] liczb rzeczywistych wskazuje właśnie, że bardzo aktualna sprawa niesprzeczności/sprzeczności wielości [CNW/CSW], podnoszona przez Cantora, była pierwszą i decydującą przesłanką nakazującą Hilbertowi postawienie zagadnienia niesprzeczności arytmetyki.

Wracając do artykułu Hilberta z 1899 r. (Hilbert 1900b), trzeba przypomnieć, że autor połączył sprawę niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych nie tylko z Cantorowską niesprzecznością wielości [CNW] liczb rzeczywistych, lecz także z kwestią *istnienia* wielości liczb rzeczywistych[11].

W wystąpieniu na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu w 1900 r. Hilbert wyjaśnił tę kwestię, formułując kryterium istnienia (matematycznego). Stwierdził, że jeśli można wykazać, iż danemu przedmiotowi matematycznemu nie sposób przypisać dwu sprzecznych predykatów, to jest to równoznaczne ze stwierdzeniem matematycznego istnienia owego przedmiotu[12].

Hilbert wyjaśniał dalej, że jeśli uda się wykazać niesprzeczność aksjomatyki opisującej własności przedmiotów pewnego systemu, to jest to równoznaczne ze stwierdzeniem matematycznego istnienia (i niesprzeczności [CNW]) owego systemu przedmiotów. Innymi słowy, postulowany już w latach 1899 i 1900 przez Hilberta dowód niesprzeczności aksjomatyki arytmetyki liczb rzeczywistych miał

---

nych metod wnioskowań. W takim dowodzie niesprzeczności postrzegam jednocześnie dowód istnienia wielości liczb rzeczywistych, albo — odwołując się do terminologii Cantora — dowód tego, że system liczb rzeczywistych jest wielością niesprzeczną (gotową)" (Hilbert 1900b: 184).

[11] „Wątpliwości, które w ogóle można mieć co do istnienia wielości wszystkich liczb rzeczywistych, tracą przy wyżej przedstawionym ujęciu wszelką prawomocność: wielości wszystkich liczb rzeczywistych nie pojmujemy chociażby jako wielości wszystkich możliwych praw, według których po kolei mogą występować wyrazy dowolnego ciągu podstawowego [dowolnego ciągu liczb wymiernych spełniającego warunek Bolzana–Cauchy'ego — J. D.], lecz raczej — jak to pokazano — jako system przedmiotów, których wzajemne związki dane są przez *skończony* i *domknięty* system aksjomatów I-IV, i o których nowe wypowiedzi mają tylko wtedy ważność, gdy można je wyprowadzić z tych aksjomatów przez skończoną liczbę wnioskowań logicznych" (Hilbert 1900b: 184).

[12] „Jeśli pewnemu pojęciu przydziela się cechy, które są ze sobą sprzeczne, to powiadam: to pojęcie nie istnieje matematycznie. Tak więc nie istnieje na przykład liczba rzeczywista, której kwadrat równa się -1. Jeśli jednak da się udowodnić, że przydzielone danemu pojęciu cechy nigdy nie mogą prowadzić do sprzeczności przy zastosowaniu skończonej liczby wnioskowań logicznych, to twierdzę, że w ten sposób dowiedzione jest matematyczne istnienie owego pojęcia, na przykład liczby lub funkcji, która spełnia pewne warunki" (Hilbert 1900a: 265).

być równoznaczny z dowodem matematycznego istnienia wielości (Cantorowska wielość niesprzeczna [CNW]) liczb rzeczywistych. Tekst wystąpienia Hilberta z 1900 r. zdaje się sugerować, że bronił on w ten sposób matematycznego istnienia wielości liczb rzeczywistych — wielości mocy *continuum* — przed negującymi to istnienie praintuicjonistami, np. Leopoldem Kroneckerem[13].

Wypada w tym miejscu podsumować kwestię motywów podjęcia przez Hilberta zagadnienia niesprzeczności arytmetyki (w tym wypadku — liczb rzeczywistych), która miała odegrać tak znaczącą rolę w stworzonym później programie formalizmu. Otóż, wbrew niektórym przypuszczeniom, motywy [STAND], [RELAT1], [RELAT2] nie były najistotniejszymi i pierwszymi przyczynami położenia przez Hilberta nacisku na kwestię niesprzeczności arytmetyki. Rozstrzygającym powodem nie była też antynomia Russella, która ujawniona została przy realizacji programu logicyzmu dopiero w roku 1902. Hilbert sformułował bowiem wymóg dowodu niesprzeczności arytmetyki (liczb rzeczywistych) już w 1899 r. i postawił na bardzo wysokim, drugim miejscu nierozwiązanych problemów matematycznych w roku 1900. Pierwszym i decydującym powodem, dla którego Hilbert wymagał dowodu niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych, było odkrycie przez Cantora pierwszej antynomii teoriomnogościowej — Burali-Fortiego — i chęć wykazania w związku z tym, że wielość liczb rzeczywistych jest Cantorowską wielością niesprzeczną [CNW], a więc — wbrew praintuicjonistom — istniejącym w sensie Hilberta przedmiotem matematycznym.

[13] „W tym przypadku, gdy chodzi o aksjomaty arytmetyki liczb rzeczywistych, dowód niesprzeczności aksjomatów jest jednocześnie dowodem matematycznego istnienia wielości liczb rzeczywistych lub *continuum*. Rzeczywiście, kiedy uda się w pełni udowodnić niesprzeczność aksjomatów, wtedy utracą podstawę wszelkie wątpliwości dotyczące istnienia wielości liczb rzeczywistych. Oczywiście, wielość liczb rzeczywistych nie jest, przy zaprezentowanym [aksjomatycznym — J. D.] ujęciu, wielością wszystkich możliwych rozwinięć dziesiętnych albo wielością wszystkich możliwych praw, według których mogą następować po sobie kolejne wyrazy ciągów fundamentalnych, lecz jest systemem przedmiotów, których wzajemne relacje są uregulowane przez aksjomaty, i dla których prawdziwe są tylko te stany rzeczy, które mogą być wyprowadzone z aksjomatów na podstawie skończonej liczby wnioskowań. Tylko w tym znaczeniu, według mnie, pojęcie *continuum* jest uchwytne w sposób ściśle logiczny. Rzeczywiście, tak ujęte pojęcie *continuum* odpowiada też najlepiej, jak mi się wydaje, danym doświadczenia i oglądu. Pojęcie *continuum*, a także pojęcie systemu wszystkich funkcji, istnieje wtedy w tym samym znaczeniu co system liczb całkowitych albo Cantorowskie klasy liczb porządkowych pozaskończonych i klasy pozaskończonych mocy" (Hilbert 1900a: 265-266).

2. RUSSELL I NIESPRZECZNOŚĆ ARYTMETYKI LICZB NATURALNYCH (1904)

Do klasyki badań podstaw matematyki prowadzonych w ramach realizacji programu formalizmu należały badania (niesprzeczności) arytmetyki liczb naturalnych. Ze wskazanych wyżej powodów Hilbert skoncentrował pierwotnie swoją uwagę na arytmetyce liczb rzeczywistych. Istotny przełom w tym względzie nastąpił w 1904 r. i zasygnalizowany został w czasie wystąpienia Hilberta na III Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Heidelbergu. Całe to wystąpienie poświęcone było kwestii niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych. Powstaje tutaj pytanie, interesujące z punktu widzenia historii badań podstaw matematyki: co spowodowało, że Hilbert główny nacisk w roku 1904 położył na arytmetykę liczb naturalnych, a nie na arytmetykę liczb rzeczywistych?

Hilbert sam odpowiedział na to pytanie, komentując realizację programu logicyzmu przez Fregego. Z jednej strony chwalił jego zasługi w zakresie badań podstaw arytmetyki liczb naturalnych, z drugiej zaś wskazywał braki tego przedsięwzięcia. Nie znając jeszcze, rzecz jasna, poprawionej wersji logicyzmu Russella i Whiteheada, Hilbert wykazywał, że antynomie teoriomnogościowe obaliły przedsięwzięcie Fregego. Co ciekawe, w tym kontekście nie wymienia *explicite* znanej już w 1904 r. antynomii Russella, lecz wskazuje jedynie przykładowo antynomię zbioru wszystkich zbiorów[14].

Ponieważ jednak odkrycie antynomii Russella faktycznie spowodowało załamanie programu Fregego i przesunięcie uwagi na kwestię podstaw i niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych, to słusznie można twierdzić, że przeniesienie przez Hilberta w 1904 r. nacisku z kwestii niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych na zagadnienie niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych było ostatecznie spowodowane odkryciem Russella.

Warto zaznaczyć, że już w 1904 r. Hilbert zaproponował pierwszy dowód niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych (Hilbert 1905). Przy czym —

---

[14] „Gottlob Frege postawił sobie za zadanie, by za pomocą środków logiki [...] uzasadnić prawa arytmetyki. Ma on zasługi właściwego rozpoznania istotnych własności pojęcia liczby naturalnej i znaczenia wnioskowania na podstawie indukcji zupełnej. Pozostając jednak wierny swoim planom i przyjmując jako podstawową zasadę, że pojęcie (zbiór) jest zdefiniowane i natychmiast możliwe do zastosowania, gdy dla każdego przedmiotu jest określone, czy podpada on pod to pojęcie, czy też nie, i nie nakładając przy tym żadnych ograniczeń na pojęcie »każdy«, padł ofiarą paradoksów teoriomnogościowych, które tkwią przykładowo w pojęciu zbioru wszystkich zbiorów i które pokazują, jak mi się wydaje, że ujęcia i narzędzia badawcze logiki, przedstawione przez niego, nie dorastają do ścisłych wymagań, które stawia teoria mnogości. Uniknięcie takich sprzeczności i tłumaczenie podstaw każdego paradoksu powinny być od początku głównym celem badań pojęcia liczby" (Hilbert 1905: 175).

odmiennie niż w ramach logicyzmu — nie chodziło tu o system nabudowany na logice, lecz o system aksjomatów arytmetycznych wzbogacony koniecznymi aksjomatami logicznymi. W końcowej części wykładu Hilbert powrócił jeszcze krótko do kwestii niesprzeczności swego systemu arytmetyki liczb rzeczywistych. Stwierdza, że wszystkie jego aksjomaty (wzbogacone aksjomatami logicznymi) dają się zapisać w postaci formuł analogicznych do aksjomatów liczb naturalnych i możliwy będzie dowód niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych (Hilbert 1905: 175).

Przy okazji warto zauważyć, że Hilbert nie zdecydował się na genetyczną metodę konstrukcji arytmetyki liczb rzeczywistych z arytmetyki liczb naturalnych[15], ale obstawał przy bezpośrednim dowodzie niesprzeczności pierwszej z wymienionych arytmetyk. Zapewne zdawał sobie sprawę z tego, że genetyczna konstrukcja liczb rzeczywistych angażowała środki teoriomnogościowe — chociażby przy zastosowaniu przekrojów Dedekinda czy ciągów podstawowych — a teoria mnogości kryła niebezpieczeństwo antynomii i w 1904 r. nie była jeszcze zaksjomatyzowana.

3. BROUWER I PODZIAŁ MATEMATYKI NA FINITYSTYCZNĄ I INFINITYSTYCZNĄ (1922)

Klasyczny dla formalizmu Hilberta jest podział matematyki na część finitystyczną i infinitystyczną. Rozróżnienie to jest istotne również dla współczesnych badań podstaw matematyki. Wystarczy w tym miejscu wspomnieć chociażby ograniczony program Hilberta i powiązaną z nim tzw. matematykę odwrotną (*reverse mathematics*). Przy czym do dziś nie ma powszechnej zgody na to, jak interpretować niejasne Hilbertowskie terminy „matematyka finitystyczna" i „matematyka infinitystyczna".

Celem będzie tu pokazanie, że myślicielem, który w zasadniczy sposób wpłynął na dokonanie omawianego podziału, był twórca intuicjonizmu, Luitzen Brouwer. W tym celu przeanalizowane zostaną fragmenty tekstu Hilberta *Die*

---

[15] „Upewnijmy się najpierw co do sposobu wprowadzenia pojęcia liczby. Wychodząc od pojęcia liczby 1, myśli się zazwyczaj o powstaniu i rozwinięciu praw arytmetyki, przez proces liczenia, najpierw kolejnych liczb naturalnych 2, 3, 4, ...; następnie dochodzi się, przez żądanie powszechnej wykonywalności odejmowania, do całkowitych liczb ujemnych, dalej definiuje się liczbę ułamkową, chociażby przy pomocy pojęcia pary liczb [całkowitych — J. D.] — [...] — i wreszcie [definiuje się] liczbę rzeczywistą jako przekrój [Dedekinda — J. D.] albo jako ciąg fundamentalny [...]. Możemy nazwać tę metodę wprowadzania pojęcia liczby *metodą genetyczną*, ponieważ najszersze pojęcie liczby — pojęcie liczby rzeczywistej — wytworzone jest przez sukcesywne rozszerzanie prostego pojęcia liczby" (Hilbert 1900b: 180).

logischen Grundlagen der Mathematik z 1922 roku[16], gdzie po raz pierwszy odróżnia matematykę finitystyczną od finitystycznej. Hilbert zarysowuje najpierw system, który nazywa „logiką finitystyczną" (system, który potem nazywano „matematyką finitystyczną"). Szkic tego systemu zawarty w artykule Hilberta jest najbliższy, w porównaniu do jego innych tekstów, sformalizowanemu systemowi PRA arytmetyki Skolema. Dlatego należy przypuszczać, że właśnie ten szkic przyczynił się do wyboru PRA jako najpopularniejszej sformalizowanej interpretacji Hilbertowskiej matematyki finitystycznej[17]. Następnie autor zastanawia się, kiedy następuje przekroczenie granic matematyki finitystycznej. Stwierdza ogólnie, że już wtedy, gdy zaczyna się stosować w matematyce wyrażenia kwantyfikatorowe „dla każdego" i „istnieje"[18].

Z całego kontekstu wynika, że owo przekroczenie granic matematyki finitystycznej ma miejsce dokładnie wtedy, gdy wspomniane wyrażenia kwantyfikatorowe stosuje się do przedmiotów należących do zbiorów nieskończonych.

Hilbert rozważa krótko stosowanie wyrażeń kwantyfikatorowych do przedmiotów należących do zbiorów skończonych. Stwierdza, że uprawomocnione są wtedy zasady klasycznego rachunku predykatów[19].

---

[16] Tekst ten jest poprawionym zapisem wykładu gościnnego, który Hilbert wygłosił w 1922 r. w Kopenhadze i w Hamburgu. Autor wysłał swój tekst do redakcji „Mathematische Annalen" 29 września 1922 r. i dlatego taki rok podano w tytule paragrafu. Tekst opublikowano w roku 1923.

[17] System Hilberta składa się z dziesięciu aksjomatów: logicznych, charakteryzujących predykat równości, oraz arytmetycznych. Nie stanowiły one, w opinii Hilberta, pełnego opisu „logiki finitystycznej". Dlatego dodał: „Na podstawie aksjomatów 1-10 otrzymujemy łatwo liczby naturalne i obowiązujące dla nich równania liczbowe. Z tych początków [aksjomatów] da się też wyprowadzić elementarną teorię liczb za pomocą „skończonej" logiki na drodze naocznych przemyśleń, do których należy rekursja i naoczna indukcja stosowana w danych zbiorach skończonych. Przy tym nie dochodzi się do stosowania wątpliwych lub problematycznych sposobów wnioskowania" (Hilbert 1923: 154). Tekst ten jest opatrzony następującym przypisem Hilberta odnośnie do rekursji i „naocznej indukcji": „W ostatecznym przedstawieniu [wariancie] mojej teorii ugruntowanie elementarnej teorii liczb dokonuje się również za pomocą aksjomatów; tutaj zaś powołuję się jedynie na bezpośrednie naoczne ugruntowanie ze względu na skrótowy charakter [tekstu]" (Hilbert 1923: 154).

[18] „W naszej teorii dowodu [metamatematyce — J. D.] chcemy wyjść poza zakres skończonej [finitystycznej] logiki i otrzymać takie dowodliwe formuły, które są »odwzorowaniami« (*Abbilder*) pozaskończonych twierdzeń zwykłej matematyki. Właściwą siłę i uprawomocnienie naszej teorii dowodu dostrzeżemy właśnie wtedy, gdy uda nam się przeprowadzić dowód niesprzeczności, przy dołączeniu pewnych pozaskończonych aksjomatów. Kiedy jednak następuje po raz pierwszy owo wyjście ponad to, co konkretnie naoczne i skończone? Ewidentnie już przy użyciu pojęć »wszystkie« i »istnieje«" (Hilbert 1923: 154).

[19] „*Tertium non datur* dla zbiorów skończonych otrzymujemy w następującej postaci: albo wszystkie przedmioty mają określoną własność, albo istnieje przedmiot, który tej własności nie ma: i jednocześnie otrzymujemy przy użyciu zwykłych symboli kwantyfikatoro-

Inaczej jest, zdaniem Hilberta, gdy wyrażenia kwantyfikatorowe odnosi się do przedmiotów, które należą do zbiorów nieskończonych, a więc gdy stosowane są w ramach matematyki infinitystycznej (transfinitystycznej, por. Hilbert 1923: 155). Trudny i nie do końca jasny tekst niemieckiego matematyka najlepiej jest oddać w sposób następujący:

> Jest dany pewien zbiór nieskończony. Przykładowo, niech będzie to przedział obustronnie otwarty liczb rzeczywistych (0, 1).
>
> Dalej, niech będzie określona pewna własność *P*. Dla przykładu, niech predykat *P*(*x*) oznacza tutaj, że *x* jest liczbą algebraiczną.
>
> Za pomocą kwantyfikatora ogólnego formułuje się następujące zdanie: (1) dla każdego *x* (ze wskazanego zbioru nieskończonego) *P*(*x*).
>
> (2) Może się zdarzyć, że zdanie (1) prowadzi do sprzeczności. Tak jest istotnie w przypadku, gdy predykat *P*(*x*) oznacza, że *x* jest liczbą algebraiczną i *x* brane jest z przedziału (0, 1). Zbiór liczb przestępnych jest przeliczalnie nieskończony, a zbiór liczb rzeczywistych z przedziału (0, 1) ma moc kontinuum. Skoro każda liczba z przedziału (0, 1) miałaby być — na podstawie zdania (1) — liczbą algebraiczną, to zbiór liczb algebraicznych nie mógłby być zbiorem przeliczalnie nieskończonym.
>
> W sytuacji, gdy zdanie (1) prowadzi do sprzeczności, należy wnioskować: (3) nieprawda, że dla każdego *x* (ze wskazanego zbioru nieskończonego) *P*(*x*).
>
> Wtedy w analizie (matematyce) klasycznej na podstawie prawa de Morgana wyprowadza się konsekwencję: (4) istnieje *x* (ze wskazanego zbioru nieskończonego) takie, że nie-*P*(*x*). W podanym przykładzie oznacza to, że istnieje liczba transcendentalna (dokładniej: istnieje liczba transcendentalna i należy ona do przedziału (0, 1)).

Hilbert wskazuje, że ostatni krok (4) nie jest (na tym etapie budowania matematyki infinitystycznej) uprawomocniony wtedy, gdy ma się do czynienia ze zbiorami nieskończonymi. Nieskończoność zbioru sprawia bowiem, że

---

wych — »dla wszystkich *a*: (*a*)«; »nieprawda, że dla wszystkich *a*: ¬ (*a*)«; »istnieje pewne *a*: (E*a*)«; »nieprawda, że istnieje pewne *a*: ¬ (E*a*)« — ścisłą ważność równoważności:

¬ (*a*) *A* (*a*) równoważne (E*a*) ¬ *A* (*a*)

i

¬ (E*a*) *A* (*a*) równoważne (*a*) ¬ *A* (*a*),

gdzie »*A* (*a*)« oznacza pewną wypowiedź ze zmienną *a*, czyli pewien predykat” (Hilbert 1923: 155).

nie jest się w stanie wskazać wyłącznie na podstawie podanego rozumowania konkretnego przedmiotu z tego zbioru, o którym zgodnie z prawdą można orzec predykat nie-*P*. Innymi słowy, przy takim rozumowaniu niepodobna wskazać konkretnej liczby z przedziału (0, 1), która jest liczbą transcendentalną. Hilbert wyciąga stąd wniosek, że — przynajmniej na tym etapie budowy matematyki infinitystycznej — nie obowiązuje (jeszcze) prawo logiki predykatów: (4) jeśli nieprawda, że dla każdego *x P*(*x*), to istnieje *x* (ze wskazanego zbioru nieskończonego), takie że nie-*P*(*x*)[20].

Należy dodać, że kwantyfikowanie po przedmiotach należących do zbiorów nieskończonych występuje już na bardzo wczesnym etapie budowy matematyki (analizy) klasycznej — przy konstrukcji liczb rzeczywistych. Nie można się obyć bez tego narzędzia, gdy liczby rzeczywiste konstruuje się za pomocą przekrojów Dedekinda zbioru liczb wymiernych albo za pomocą ciągów podstawowych liczb wymiernych. Hilbert doskonale zdawał sobie z tego sprawę.

Trzeba odnotować, że w opisanej analizie Hilbert nie powołuje się na żadnego matematyka czy logika, niemniej jego krytyka odnoszenia predykatowego prawa de Morgana do przedmiotów ze zbiorów nieskończonych do złudzenia przypomina krytykę niektórych praw logiki klasycznej przeprowadzoną przez twórcę intuicjonizmu Brouwera. Holenderski badacz podstaw matematyki od 1908 r. w dokładnie taki sam sposób odrzucał powszechną obowiązywalność predykatowego prawa de Morgana. Jego główny zarzut brał się z zasad konstruktywizmu istotnych dla intuicjonizmu: z negacji stwierdzenia mówiącego, że wszystkie przedmioty pewnej nieskończonej klasy mają pewną własność, nie wynika jeszcze istnienie przedmiotu posiadającego własność będącą negacją wspomnianej własności, ponieważ takie wnioskowanie nie zapewnia wymaganej konstrukcji owego przedmiotu (por. Brouwer 1908, 1923)[21]. Mimo

[20] „Odnieśmy się do wprowadzonych równoważności. Przy nieskończonej liczbie przedmiotów negacja sądu ogólnego (*a*) *A*(*a*) nie posiada pierwotnie żadnej treści (*Inhalt*), tak samo jak negacja sądu egzystencjalnego (E*a*) *A*(*a*). Jednakże niekiedy mogą owe negacje otrzymać sens, mianowicie wtedy, gdy stwierdzenie (*a*) *A*(*a*) zostanie odrzucone przez kontrprzykład albo gdy z (*a*) *A*(*a*) lub z (E*a*) *A*(*a*) wyprowadzona zostanie sprzeczność. Te przypadki nie są jednak przeciwstawione kontradyktorycznie (*kontradiktorisch entgegengesetzt*); wtedy bowiem, gdy *A*(*a*) nie zachodzi dla wszystkich *a*, nie wiemy jeszcze, czy rzeczywiście mamy do dyspozycji [możemy teraz wskazać — J. D.] przedmiot z własnością Nie-*A*; tak samo nie możemy powiedzieć: albo zachodzi (*a*) *A*(*a*) względnie (E*a*) *A*(*a*), albo rzeczywiście dysponujemy sprzecznościami wyprowadzonymi z tych wyrażeń. Dla zbiorów skończonych [wyrażenia] »istnieje« i »mamy do dyspozycji« są równoznaczne, dla zbiorów nieskończonych tylko to drugie pojęcie jest zawsze znaczące" (Hilbert 1923: 155-156).

[21] Co prawda, drugi tekst Brouwera został opublikowany po oddaniu do druku (29.09.1922) tekstu Hilberta, niemniej Brouwer szeroko omawiał kwestię stosowania logiki klasycznej w matematyce podczas głośnych odczytów poprzedzających publikację jego tekstu.

że Hilbert nie wspomina w tym miejscu Brouwera, to ze względu na zarysowaną zbieżność można twierdzić, że przejął on od swojego „ideologicznego" przeciwnika wspomniany element krytyki matematyki (logiki) klasycznej. Dokładniej mówiąc, z kontekstu całego tekstu wynika, że Hilbert, uwzględniając zarzuty Brouwera, starał się uodpornić budowaną matematykę sformalizowaną, właśnie w jej części infinitystycznej, na tego typu krytykę[22].

Trzeba przypomnieć, że Hilbert twierdził, że wraz z zastosowaniem kwantyfikatorów do przedmiotów ze zbiorów nieskończonych dokonuje się przejście w matematyce od tego, co finitystyczne, do tego, co infinitystyczne (dokładniej: do *transfinitum*). Pokazywał, że to przejście wymaga zasadniczej ostrożności przy przenoszeniu praw logiki klasycznej na teren matematyki infinitystycznej. Ponieważ Hilbert wykorzystał kwestię odnoszenia kwantyfikatorów do zbiorów nieskończonych do tego, by po raz pierwszy w swych tekstach odróżnić matematykę finitystyczną od infinitystycznej, to należy twierdzić, że rozróżnienie to, fundamentalne dla programu formalizmu i jego kontynuacji, ma źródło w przeprowadzonej przez Brouwera teoriodowodowej krytyce niektórych praw logiki klasycznej i ich stosowalności w matematyce. Innymi słowy, Brouwer wymusił poniekąd na Hilbercie, chcącym ratować całą matematykę klasyczną (z klasyczną logiką), podział matematyki na finitystyczną i infinitystyczną.

ZAKOŃCZENIE

W artykule wskazano niektóre inspiracje, które zasadniczo wpływały na kształtowanie się i modyfikacje Hilbertowskiego programu formalizmu. Pokazano przede wszystkim, że Hilbert nie podjął badania niesprzeczności arytmetyki dopiero po odkryciu antynomii Russella. Postawienie problemu

---

[22] W dalszej części tekstu Hilbert usiłował uzasadnić adekwatność praw logiki klasycznej dla matematyki infinitystycznej na podstawie tzw. aksjomatu pozaskończonego:

„Zgodnie z naszym planem dołączymy do czterech dotychczasowych grup aksjomatów skończonych takie, które są wyrazem pozaskończonych sposobów wnioskowań [...]. Odwołuję się teraz do myśli leżącej u podstaw zasady wyboru [*Auswahlprinzip*], wprowadzając funkcję logiczną

$\tau(A)$,

która przyporządkowuje każdemu predykatowi $A(a)$, to znaczy każdej wypowiedzi ze zmienną a, określony przedmiot $\tau(A)$. Funkcja ta winna jeszcze spełniać następujący aksjomat:

V. Aksjomat pozaskończony

$A(\tau A) \rightarrow A(a)$

[...] Aksjomat pozaskończony jest praźródłem wszystkich pozaskończonych pojęć, zasad i aksjomatów" (Hilbert 1923: 156-157).

niesprzeczności arytmetyki liczb rzeczywistych związane było z odkryciem chronologicznie pierwszej antynomii teoriomnogościowej, czyli antynomii największej liczby porządkowej. Już w 1899 r. Hilbert zadał, jako równoważne, pytanie o to, czy wielość liczb rzeczywistych jest — używając terminologii Cantorowskiej — wielością niesprzeczną [CNW]. Kwestia niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych została wyeksponowana dopiero przez odkrycie antynomii Russella.

Fundamentalne dla dojrzałego programu Hilberta jest odróżnienie matematyki finitystycznej od matematyki infinitystycznej. Wskazano, że źródeł tego rozróżnienia można szukać w Brouwerowskiej teoriodowodowej, konstruktywistycznej krytyce niektórych praw logiki klasycznej. Była to krytyka na tyle istotna, że Hilbert czuł się zobowiązany uwzględnić ją w formalistycznej rekonstrukcji matematyki klasycznej. W rezultacie wprowadził właśnie rozróżnienie między matematyką finitystyczną a infinitystyczną.

BIBLIOGRAFIA

Brouwer L. E. J. (1908), *De Onbetrouwbaarheid der logische Principes,* „Tijdschrift voor Wijsbegeerte" 2, 152-158.

Brouwer L. E. J. (1923), *Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktiontheorie,* „Journal für die reine und angewandte Mathematik" 154, 1-7.

Burali-Forti C. (1897), *Una questione sui numeri transfiniti*, „Circolo Matematico di Palermo" 11(1), 154-164.

Cantor G. (1932), *Gesammelte Abhandlungen*, E. Zermelo (Hrsg.), 443-450.

Grattan-Guiness I. (1971), *The Correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 73, 111-130.

Hilbert D. (1900a), *Mathematische Probleme*, „Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse" 3, 253-297.

Hilbert D. (1900b), *Über den Zahlbegriff*, „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 8, 180-184.

Hilbert D. (1905), *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* [w:] *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Leipzig: Teubner, 174-185.

Hilbert D. (1923), *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, „Mathematische Annalen", 88, 151-165.

Jourdain P. (1904), *On the Transfinite Cardinal Numbers of Well-Ordered Aggregates*, „The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science" 7(39), 61-75.

Murawski R. (1986), *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wyb. i oprac. R. Murawski, Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.