Filozofia Publiczna i Edukacja Demokratyczna
Tom I • 2012 • Numer 1 • s. 94-103
filozofiapubliczna.amu.edu.pl • ISSN 2299-1875

Paradoksy

Zbigniew Tworak*

Paradoxes

Abstract: An important part of philosophical thinking are paradoxes. Many of them raise serious problems and are associated with crises of thought and revolutionary advances in the science. This paper is devoted to the notion of paradox and presents a potpourri of paradoxes. I give a very broad interpretation of the term *paradox*, far broader than will appeal to many logical purists.

Keywords: paradox, antinomy, set theoretical antinomies, semantical antinomies, paralogism, sophism

Przyjmuje się, że źródłem myślenia filozoficznego jest zdziwienie. Często wywołują je różnego rodzaju paradoksy. W niniejszym artykule przedstawione zostanie pojęcie paradoksu i przykłady paradoksalnych rozumowań. Nie podaję rozwiązań przedstawionych paradoksów, gdyż na ogół jest ich wiele i nierzadko wykorzystują one skomplikowany aparat matematyczno-logiczny.

Filozoficzne zagadnienie paradoksów wiąże się z poznaniem.

Paradoks powstaje wtedy, gdy zbiór najwyraźniej niezaprzeczalnych przesłanek prowadzi do konkluzji nienadającej się do przyjęcia, bo niezgodnej z danymi zwykłego doświadczenia i ugruntowanymi przekonaniami albo nawet wewnętrznie sprzecznej.

* Instytut Filozofii • Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
e-mail: tworak@amu.edu.pl

Paradoksy wyrażają przez to twierdzenia zaskakujące lub intrygujące. Stanowią jednocześnie obietnicę odkrycia czegoś zadziwiającego oraz otarcia się o jakąś tajemnicę. Takie rozumienie paradoksu można wywieść z greckiego *παρα-δοχα*, co oznaczało: to, co niezgodne (sprzeczne) z przyjętą opinią lub wyobrażeniem (*δοχα* znaczy: *mniemanie*, *opinia*, *sąd*, *wyobrażenie*, zaś *παρα* tłumaczy się jako: *wbrew*, *w niezgodzie*) oraz *παρα-δοξος*, co oznaczało: to, co nieoczekiwane, niewiarygodne lub niezwykłe. Oczywiście ludzie różnią się między sobą pod względem doświadczeń i żywionych przekonań. Nierzadko więc to, co jest paradoksalne dla jednej osoby, jest czymś zupełnie zrozumiałym dla innej. Krótko rzecz ujmując, nie ma paradoksów w sensie absolutnym. Najbardziej znane są paradoksy Zenona z Elei (V w. p.n.e.) przeciwko wielości i ruchowi. Na przykład paradoks zwany „Strzałą" zawiera konkluzję, że wypuszczona z łuku strzała nie posuwa się naprzód, lecz spoczywa w miejscu (i przez to nigdy nie osiągnie celu). Jest tak – argumentuje Zenon – gdyż lecąca strzała w każdej chwili swego lotu spoczywa w pewnym punkcie i nie przebiega żadnej przestrzeni, a ponieważ czas składa się z takich właśnie chwil, to strzała nie może posuwać się naprzód. Powstaje pytanie o naturę ruchu i czasu. Paradoksy stanowią też pointę wielu zagadek i żartobliwych opowiastek, takich jak opowieść o sofiście Protagorasie z Abdery (V w. p.n.e.) i jego uczniu Euatlosie, którą przytacza Diogenes Laertios w *Żywotach i poglądach słynnych filozofów* (ks. IX, 56). Otóż Protagoras udzielał Euatlosowi nauki prawa. Ponieważ Euatlos był niezamożny, zawarł z Protagorasem umowę, że zapłaci swemu nauczycielowi należne mu honorarium dopiero po pierwszym wygranym przez siebie procesie. Okres nauki się skończył, mijały też kolejne lata, a Euatlos nie podejmował żadnej sprawy. Zniecierpliwiony Protagoras sam wytoczył proces swemu uczniowi i oświadczył:

– Albo wygrasz ten proces, albo przegrasz. Jeżeli wygrasz, to powinieneś uiścić mi należność na mocy umowy. Jeżeli zaś przegrasz, to będziesz obowiązany uiścić mi należność na mocy wyroku.

Lecz Euatlos dał dowód, iż Protagoras był dobrym nauczycielem, odpowiadając mu:

– Albo wygram ten proces, albo przegram. Jeżeli wygram, to nie uiszczę należności na mocy wyroku. Jeżeli zaś przegram, to nie uiszczę należności na mocy umowy[1].

Paradoksy tworzą kolekcję bardzo różnorodną. Niektóre są sprzecznościami pojawiającymi się na granicy teorii i powszechnych mniemań, jak na przykład paradoks bliźniąt związany z teorią względności i podważający przekonanie o absolutności czasu, paradoks kota Schrödingera związany z teorią kwantów czy twierdzenie Banacha-Tarskiego orzekające o możliwości rozkładu kuli na skończenie wiele części, z których można złożyć dwie kule takie, że każda ma objętość równą objętości kuli wyjściowej. Dla ilustracji przytoczę tu trzy prostsze i mniej znane tego typu paradoksy. Pierwszy to tzw. paradoks lampy Thomsona[2]. Wyobraźmy sobie lampę, która świeci przez pół minuty i wyłącza się na ćwierć minuty, później świeci przez jedną ósmą minuty itd. Po jednej minucie (sumie nieskończonej serii 1/2 + 1/4 + 1/8 + …) proces musi się zakończyć. Jaki jest stan lampy po tym czasie? Lampa musi być oczywiście włączona lub wyłączona, mimo że nie istnieje ostatni wyraz takiego ciągu. Osobne pytanie to, czy czas daje się dzielić w nieskończoność. Drugi to paradoks Proklosa Diadochusa (V w. p.n.e.). Średnica dzieli koło na dwie równe części. Jeżeli przez koło przeprowadzimy nieskończenie wiele średnic, to półkoli będzie dwa razy więcej niż nieskończenie wiele. Czy może czegoś być dwa razy więcej niż nieskończenie wiele? Trzeci to paradoks Hotelu Hilberta (nazwa pochodzi od nazwiska niemieckiego matematyka Davida Hilberta). Wyobraźmy sobie hotel z nieskończoną liczbą pokoi ponumerowanych liczbami całkowitymi dodatnimi. Przypuśćmy, że wszystkie miejsca w tym niezwykłym hotelu są zajęte oraz że przyjeżdża do niego nowy gość, który prosi o pokój na noc. Czy można go przyjąć? Okazuje się, że tak. Wystarczy, że każdy z mieszkańców

---

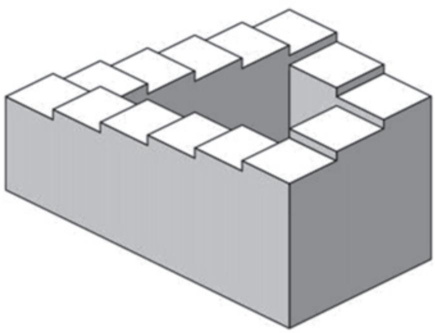
[1] Tę samą anegdotę wiąże się też z Koraksem, uważanym za pierwszego nauczyciela retoryki, i jego uczniem Tejzjaszem (V w. p.n.e.). W tej wersji dochodzi do procesu. Zamiast wyroku sędziowie mieli orzec: *Złego kruka złe jajo* (*Kakoú kórakos kaká va* – gra słów: *kórakos* znaczy po grecku „kruk").

[2] Jest to w istocie uwspółcześniona wersja słynnego paradoksu Zenona z Elei „Achilles i żółw".

hotelu przeniesie się do sąsiedniego pokoju. W ten sposób zwolni się pokój pierwszy i nowy gość będzie mógł się do niego wprowadzić[3].

Inne paradoksy są sprzecznościami mającymi naturę logiczną – powstają często na skutek popełnienia jakiegoś błędu, zwykle nieoczywistego, na którymś etapie rozumowania. Przykładem tego typu paradoksu jest słynny *paradoks łysego*, przypisywany Eubulidesowi z Miletu (IV w. p.n.e.). Otóż rozumując intuicyjnie, jesteśmy skłonni uznać, że (1) ktoś, kto ma 100 000 włosów na głowie, nie jest łysy oraz (2) ten, kto ma o jeden włos mniej niż ktoś, kto nie jest łysy, również nie jest łysy. Jednakże opierając się na tych dwóch przesłankach, łatwo otrzymamy jako wniosek twierdzenie, że ktoś, kto w ogóle nie ma włosów, nie jest łysy. Źródłem paradoksu jest przesłanka (2), a dokładniej nieostrość występującego w niej słowa „łysy”[4].

Można też wyróżnić paradoksy percepcji związane z iluzjami wzrokowymi. Czy poniższe schody prowadzą w górę, czy w dół?



Schody Penrose'a

Z tak rozumianym pojęciem paradoksu blisko związane są pojęcia *paralogizmu* (gr. *παραλογισμός*, co oznaczało:

---

[3] Okazuje się, że hotel ten może pomieścić nawet nieskończoną liczbę nowych gości. Każdy mieszkaniec pokoju oznaczonego liczbą n musi przeprowadzić się do pokoju oznaczonego liczbą $2n$.

[4] Inną wersją tego paradoksu – niejako odwróconą – jest *paradoks stosu*: (1) jedno ziarnko piasku nie tworzy stosu, (2) jeżeli n ziaren piasku nie tworzy stosu, to dodanie zaledwie jednego ziarnka również nie uczyni stosu. Stąd nawet kilka bilionów ziaren nie utworzy stosu.

fałszywy wniosek) oraz *sofizmatu* (gr. *σοφισμα*, co oznaczało: wybieg, podstęp).

Paralogizm to argument pozornie poprawny, w którym pomyłkę popełniono nieświadomie albo bez zamiaru wprowadzenia kogoś w błąd (np. w celach dydaktycznych).

Za paralogizm można uznać następujący argument uzasadniający, że $2 = 1$.

Założenie:	$a = b$.
Mnożymy obie strony równości przez a:	$a^2 = ab$.
Dodajemy do obu stron liczbę $a^2 - 2ab$:	$a^2 + a^2 - 2ab = ab + a^2 - 2ab$.
Przekształcamy:	$2(a^2 - ab) = a^2 - ab$.
Dzielimy stronami przez $a^2 - ab$:	$2 = 1$.

Błąd wkradł się podczas dzielenia: skoro przyjęliśmy na początku, że $a = b$, więc dzielenie przez $a^2 - ab$ to po prostu dzielenie przez zero. Dzielenie jakiejkolwiek liczby rzeczywistej przez zero jest zabronione (bo gdyby istniała liczba będąca ilorazem $a \neq 0$ przez 0, to jej iloczyn i 0 dałby $a \neq 0$, co jest jednak niemożliwe). A oto inny przykład paralogizmu, mający na celu zwrócenie uwagi odbiorcy na rozróżnienie między użyciem wyrażenia a jego przytoczeniem:

Jan mi się nie podoba. Mój mąż to Jan. Zatem mój mąż mi się nie podoba.

Błąd polega tu na tym, że wyraz *Jan* występujący w przesłance pierwszej jest przytoczony (wymieniony), tj. odnosi się do imienia „Jan", a nie do noszącego je człowieka, natomiast w przesłance drugiej wyraz ów jest użyty, tj. odnosi się do określonego człowieka, a nie do imienia „Jan".

Arystoteles paralogizmy oddzielił od sofizmatów.

Za taki argument można uznać następującą anegdotę, przypisywaną wspomnianemu już Eubulidesowi: Elektra wie, że Orestes jest jej bratem, ale gdy ten staje przed nią zasłonięty, nie wie, kto zacz; a zatem Elektra nie wie tego, co wie.

Sofizmat to argument pozornie poprawny przedstawiony z intencją wprawienia kogoś w zakłopotanie lub wprowadzenia go w błąd, zwykle oparty na jakimś nieuczciwym chwycie.

Jednak najbardziej frapujące paradoksy są rozumowaniami, w których bez popełniania zwykłego błędu logicznego uzasadnia się dwa zdania wzajemnie sprzeczne. Nazywa się je *antynomiami* (od gr. *ἀντινομία*, co oznaczało: wzajemna sprzeczność praw, zasad). Współczesne określenia relatywizują pojęcie antynomii do jakiegoś systemu dedukcyjnego:

Antynomią w systemie dedukcyjnym S jest dowolne wnioskowanie w S spełniające oba warunki: (1) kierowane jest zadaniem rozstrzygnięcia wyrażonym w pytaniu: *Czy α?* (dla jednoznacznego zdania oznajmującego α), oraz (2) od intuicyjnie oczywistych przesłanek prowadzi do zdań, z których jedno jest negacją drugiego (czyli do sprzeczności typu *zarazem α i nie-α* lub też, co na jedno wychodzi, *α wtedy i tylko wtedy, gdy nie-α*), mimo respektowania obowiązujących w S reguł wnioskowania[5].

Tak więc o antynomii można mówić dopiero wtedy, gdy dysponuje się zarówno pewnym językiem (sformalizowanym), jak i logiką ustalającą reguły rządzące wnioskowaniami. Zwykle dzieli się je ze względu na problematykę, której dotyczą. Wyróżnia się więc antynomie teoriomnogościowe i antynomie semantyczne[6]. Antynomie teoriomnogościowe związane są z pojęciem zbioru i jego elementu. Georg Cantor, twórca teorii mnogości, pod pojęciem zbioru rozumiał „wielość, która może być pomyślana jako jedność, to jest każdy ogół określonych elementów, które na mocy pewnego prawa mogą być złączone w jedną całość". Na tym określeniu opiera się antynomia klas niezwrotnych odkryta przez Bertranda Russella, jednego z najwybitniejszych filozofów i logików XX w. Wśród zbiorów możemy wyróżnić takie, które nie są

[5] Możliwe jest istnienie przesłanek zarazem oczywistych i fałszywych. Oczywistość jest bowiem kategorią psychologiczną, a nie logiczną.

[6] Podgrupę antynomii semantycznych stanowią tzw. antynomie definiowalności.

własnymi elementami, czyli są scharakteryzowane przez warunek $x \notin x$. Wydaje się, że jest to „normalna" własność zbiorów, więc zbiory, które mają tę własność, nazwijmy *zbiorami normalnymi*, a ich ogół oznaczmy przez R. A zatem,

(*) $$\mathrm{R} = \{x: x \notin x\}$$
$$= \text{zbiór zbiorów normalnych.}$$

Na przykład, zbiór ludzi jest zbiorem normalnym, bo zbiór ludzi nie jest człowiekiem (elementami zbioru ludzi są tylko i wyłącznie ludzie). Na podstawie wzoru (*) otrzymujemy:

(**) $x \notin \mathrm{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \notin x$.

Zapytajmy teraz, czy R jest zbiorem normalnym (czyli czy $\mathrm{R} \notin \mathrm{R}$). Aby odpowiedzieć na to pytanie, zastosujmy do zbioru R wzór (**). Daje to sprzeczność:

(***) $\mathrm{R} \notin \mathrm{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{R} \notin \mathrm{R}$.

Antynomia ta spowodowana jest „naiwnym" założeniem, iż każdy warunek wyznacza pewien zbiór. Dlatego teorię mnogości, w której obowiązuje to założenie, nazywa się „naiwną". Podobną do przedstawionej wyżej antynomii strukturę posiada następujące rozumowanie dotyczące spraw bardziej ziemskich. W miasteczku Barberville mieszka golibroda, który goli wszystkich i tylko tych mieszkańców tego miasteczka, którzy nie golą się sami. Zapytajmy teraz, czy ów golibroda goli się sam, czy nie? Niech litera B oznacza zbiór wszystkich mieszkańców Barberville, a litera G – owego golibrodę. Możemy teraz tej opowieści nadać bardziej formalną postać:

Dla każdego $x \in \mathrm{B}$, G goli x-a wtedy i tylko wtedy, gdy x nie goli x-a.

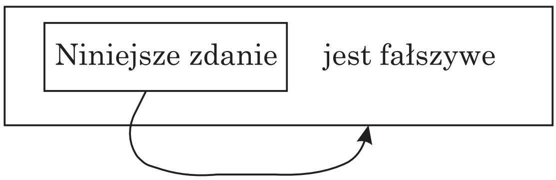
Wyrażenie to prowadzi do antynomialnej równoważności: G goli G wtw G nie goli G. Paradoks ten można rozwiązać, przyjmując, że taki golibroda nie istnieje, tj. nie istnieje ktoś spełniający zadany w anegdocie warunek.

Z kolei w antynomiach semantycznych istotną rolę odgrywają pojęcia prawdziwości, spełniania i oznaczania. Wszystkie one dotyczą relacji między pewnymi wyrażeniami danego języka a dziedziną przedmiotową opisywaną przez ten język. Eubulidesowi przypisuje się najsłynniejszą spośród antynomii semantycznych, zwaną *antynomią kłamcy*.

Dotyczy ona wypowiedzi, która stwierdza o sobie tylko, że jest fałszywa (lub nie jest prawdziwa): Niniejsze zdanie jest fałszywe[7]. Jedna z prostszych, a zarazem dość precyzyjnych jej wersji wykorzystuje nadaną zdaniu kłamcy nazwę (niech to będzie litera K):

K. K jest fałszywe.

Przyjmijmy dwie umowy: (1) K = „K jest fałszywe”; (2) „*p*” jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy *p*. Z uwagi na umowę (1) litera K jest skrótem nazwy cudzysłowowej „K jest fałszywe”. W efekcie rozważane zdanie jest samoodnośne. Ponieważ jego podmiot oznacza samo to zdanie, stwierdza więc ono o sobie samym (tylko), że jest fałszywe. Ilustruje to diagram:



Natomiast umowa (2) wyraża ideę leżącą u podstaw tzw. *korespondencyjnej koncepcji prawdy*: zdanie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest tak, jak ono głosi; np. zdanie „Sokrates tańczy” jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Sokrates tańczy. Pytanie brzmi, czy zdanie K jest prawdziwe, czy fałszywe? Otóż zastosowanie umowy (2) do zdania K daje:

„K jest fałszywe” jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy,
gdy K jest fałszywe.

Wykorzystując teraz umowę (1), otrzymujemy antynomialną równoważność:

K jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy,
gdy K jest fałszywe.

Jakie jest źródło owej antynomii? Czy jest ona wynikiem pomieszania dwóch języków: języka, o którym się mówi (tzw. języka przedmiotowego), i języka, w którym mówimy coś o tym pierwszym (tzw. metajęzyka)? Czy może

[7] Oryginalne sformułowanie Eubulidesa, niestety, się nie zachowało. W wersji Aleksandra z Afrodyzji (przełom II i III w. n.e.) wypowiedź ta ma postać: [εγώ] ψεύδομαι. Można ją tłumaczyć zarówno jako „To, co mówię, jest fałszem”, jak i jako „Ja kłamię”.

jest ona wynikiem ograniczenia się do tylko dwóch wartości logicznych: prawdy i fałszu?

Nieco odmiennej natury jest wersja, w której punktem wyjścia rozumowania jest uwaga Kreteńczyka Epimenidesa: „Wszyscy Kreteńczycy zawsze kłamią". Podczas gdy w przypadku zdania K sprzeczność wynika z samego sformułowania tego zdania (tj. żadne fakty, poza sposobem jego sformułowania, nie mogą mu antynomialności ani nadać, ani odebrać), w przypadku zdania Epimenidesa sprzeczność otrzymamy tylko w pewnych wyjątkowych okolicznościach towarzyszących jego wypowiedzeniu, a mianowicie pod warunkiem, że Epimenides jest jedynym (ostatnim) Kreteńczykiem, a owa wypowiedź jest jedyną rzeczą, jaką w ogóle powiedział. Z uwagi na tę różnicę można odróżnić *antynomię kłamcy koniecznego* i *antynomię kłamcy przygodnego*.

Przedstawione wyżej wersje antynomii kłamcy są jednozdaniowe. Znane są też wielozdaniowe wersje tej antynomii, zwane kołem kłamców. Antynomiom semantycznym poświęcony będzie osobny tekst.

Czy paradoksy pełnią jakąś użyteczną rolę w poznaniu? Za A. Tarskim, znakomitym logikiem polskim, można wyróżnić dwa skrajne podejścia do paradoksów, a do antynomii w szczególności. Jedni widzą w nich jedynie rodzaj rozrywki intelektualnej. Traktują je jako ciekawostki lub złośliwe i niepoważne żarty. Drudzy uważają je za nieuniknione w tym sensie, że jako istotny element ludzkiego myślenia raz po raz pojawiają się w naszej działalności intelektualnej, modyfikując wyjściowe przekonania (intuicje) lub wzbogacając poznanie. Na przykład według Grahama Priesta, australijskiego logika i filozofa, antynomie są wynikiem gry dwóch mechanizmów przynależnych naszej strukturze poznawczej. Jeden z nich umożliwia tworzenie „zamkniętych w sobie" totalności, a drugi pozwala „pójść dalej", generując w ten sposób sprzeczność. Za ilustrację może posłużyć tzw. metoda przekątniowa wykorzystywana w dowodach wielu ważnych twierdzeń matematycznych. Inny przykład to słynne stwierdzenie „Wiem, że nic nie wiem". Odniesione ono do siebie samego produkuje sprzeczność. Pomiędzy tymi skrajnościami mamy stanowisko pośrednie, uznające antynomie za „symptom choroby", a próby ich uniknięcia za ważną czynność w dziedzinie spekulatywnego myślenia, pokrewną *experimentum crucis* w naukach empirycznych. Z jednej strony uważa się je za zjawiska anormalne, gdyż naruszają jedną z ważnych zasad „racjonalnego dyskursu”: *Dąż do zachowania niesprzeczności własnego dyskursu*. Ściślej rzecz biorąc, naruszają logiczną zasadę niesprzeczności (nigdy zarazem α i nie-α), która wraz z zasadą wyłączonego środka (α lub nie-α) implikuje, że: (1) każde pytanie typu „Czy α?” posiada tylko jedną prawdziwą odpowiedź; (2) zdania wzajemnie sprzeczne mają różne, wykluczające się wartości logiczne. Sprzeczność uważa się za zjawisko niepożądane, a nawet destrukcyjne. Teorie sprzeczne piętnuje się jako niespójne i bezwartościowe poznawczo, gdyż zamazują różnicę między prawdą a fałszem oraz zdaniami będącymi twierdzeniami teorii a takimi, które nimi nie są[8]. Z drugiej strony wartość różnych teorii można oceniać, biorąc pod uwagę to, czy i w jaki sposób radzą sobie one z kłopotami stwarzanymi przez stosowne antynomie. Na przykład wartość formułowanych teorii prawdy można oceniać z uwagi na to, jak rozwiązują one antynomię kłamcy i inne antynomie semantyczne. Ponadto należy zauważyć, że niektóre antynomie znajdują zastosowanie w dowodach pewnych ważnych twierdzeń, takich jak twierdzenie Gödla o niezupełności arytmetyki, twierdzenie o nierozwiązywalności problemu stopu dla maszyn Turinga czy twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy.

Bibliografia

Clark M., *Paradoxes from A to Z*, Routledge, London–New York 2002.

Łukowski P., *Paradoksy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2006.

Sainsbury R.M., *Paradoxes*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.

Tworak Z., *Kłamstwo kłamcy i zbiór zbiorów. O problemie antynomii*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2004.

Żabski E., *Prawdziwe czyli fałszywe. Nowe „rozwiązania” paradoksów i antynomii*, Oficyna Wydawnicza ATUT, Wrocław 2010.

[8] Na gruncie logiki klasycznej sprzeczność implikuje wszystko.