KULTURA I EDUKACJA

Kultura i Edukacja 2023
nr 3 (141), s. 60–75
DOI: 10.15804/kie.2023.03.04

Agnieszka Bojarska-Sokołowska*

Język eksponatów matematycznych jako kontekst budowania mentalnych ścieżek edukacyjnych zwiedzających centra nauki

The language of mathematical exhibits as a context for building mental educational paths of science centers visitors

Streszczenie
Eksponaty matematyczne są elementem kultury matematycznej i dydaktycznej. W poniższym tekście przeanalizowano elementy języka narracji eksponatów/ekspozycji, które mogą być nośnikiem określonych znaczeń tworzonych przez zwiedzających centra nauki. Podjęte w tekście analizy pozwoliły wskazać kategorie języka poleceń i pytań zawartych w tych narracjach. Są one kontekstem poznawczym dla tworzenia u zwiedzających centra matematycznych znaczeń kulturowych. Badanie zrealizowano w dwóch centrach nauki w Polsce, strategią jakościową, analizując dokumenty. Wyniki pokazały dość bogaty potencjał edukacyjny eksponatów matematycznych. Język eksponatów ujawnił możliwość szerokiego wsparcia poznawczego w rozwoju matematycznym osób zwiedzających centra. Tworzenie przekonań zgodnych z aktualną wiedzą naukową o poznawaniu matematyki i jej uczeniu się.

Słowa kluczowe:
edukacja matematyczna, kultura matematyczna, język matematyczny, interaktywne uczenie się, centra nauki

* Wydział Nauk Społecznych, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie, Polska, ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-3864-2263, e-mail: bojarska@matman.uwm.edu.pl.

Abstract
Mathematical exhibits are an element of mathematical and didactic culture. The text below analyzes the elements of the narrative language of exhibits/exhibitions, which may be the carrier of specific meanings created by visitors to science centres. The analyzes undertaken in the text made it possible to indicate the categories of the language of commands and questions contained in these narratives. They are a cognitive context for creating mathematical cultural meanings among visitors to the centres. The study was carried out in two science centers in Poland, using a qualitative strategy, analyzing documents. The results showed quite a rich educational potential of mathematical exhibits. The language of the exhibits revealed the possibility of extensive cognitive support in the mathematical development of people visiting the centres. Forming beliefs consistent with current scientific knowledge about math cognition and learning.

Keywords:
mathematical education, mathematical culture, mathematical language, cognitive functions of exhibits, interactive learning, science centers

1. WSTĘP

Centra nauki są jedną z wielu form edukacji nieformalnej, w której nabywa się nową wiedzę i umiejętności w inny sposób niż podczas sformalizowanego programu szkolnego, gdzie edukacja przebiega według relacji nauczyciel–uczeń (Warda, 5 sierpnia 2023). Po okresie pandemii placówki te ponownie otwierają się na organizowanie zwiedzającym atrakcyjnego środowiska uczenia się. Wojciech Stęchły edukację nieformalną definiuje jako „uzyskanie efektów uczenia się poprzez różnego rodzaju aktywności poza edukacją formalną i edukacją pozaformalną” (Stęchły, 2021, s. 8). Dalej autor wymienia formy, jakie może przyjąć edukacja nieformalna, tj. samodzielne uczenie się; uczenie się podczas wykonywania obowiązków domowych lub realizację swoich zainteresowań itp.

Pierwszym na świecie miejscem, w którym wykorzystano naturalną chęć zwiedzających do samodzielnego eksperymentowania, było założone przez fizyka Franka Oppenheimera, w roku 1969, Centrum „Exploratorium” w San Francisco. Według Jacka Wardy efektem działalności centrów nauki są trzy aspekty ich funkcjonowania, tj. umożliwienie dokonywania osobistych odkryć poprzez samodzielne przeprowadzenie doświadczeń; rozbudzenie ciekawości poprzez zapoznanie z nowymi zjawiskami i ideami, poprzez piękne, zaskakujące i zabawne wystawy; dostarczenie wiedzy o osiągnięciach nauki poprzez udostępnienie informacji o odkryciach i wynalazkach oraz udział w warsztatach, w których poznaje się szczegóły odkryć i rozmawia o ich skutkach (Warda, 5 sierpnia 2023). Jolanta Kruk wymienia trzy funkcje poznawcze eksponatów, tj. ludyczną, dydaktyczną i quasi-naukową. Ludyczność eksponatu wynika np. z jego wyglądu, „prostoty jego obsługi” oraz dostarczania przyjemności osobom eksperymentującym. Przykładem ludyczności eksponatów matematycznych, może być możliwość przejechania magnesami lub samochodem po wstędze Möbiusa (Bojarska-Sokołowska, 2019, s. 276). Funkcja dydaktyczna „umiejscawia się w sposób naturalny jako uzupełnienie i /lub zastąpienie szkoły, (…) uczeń otrzymuje wstępną wiedzę od nauczyciela, a eksponat służy do: prezentacji nowych treści, poglądowej ilustracji zjawiska, pogłębienia wiedzy i wyjaśnienia zjawiska, pokazania zastosowań praktycznych zdobytej wiedzy” (Karwasz i Kruk, 2012, s. 27). Maria Gołaszewska zwraca uwagę na fakt, iż oprócz dostarczania informacji eksponaty kształtują wyobraźnię zwiedzających (Gołaszewska, 1979, s. 41). Przykładem dydaktycznej funkcji eksponatów matematycznych jest uzasadnianie twierdzenia Pitagorasa, poprzez ważenie poszczególnych elementów lub przelewanie wody zawartej w dwóch mniejszych pojemnikach kwadratowych w jeden większy (Bojarska-Sokołowska, 2019, s. 292). Funkcja quasi-naukowa jest „rozwinięciem funkcji dydaktycznej – niejako jej uzupełnieniem: naukową ciekawostką. Funkcja naukowa zaczyna się tam, gdzie funkcja dydaktyczna się kończy” (Karwasz i Kruk, 2012, s. 28). Przykładem quasi-naukowej funkcji eksponatów matematycznych jest możliwość przeanalizowania dowodu twierdzenia Pitagorasa, który jest umieszczony w pierwszej księdze matematycznej – „Elementach”, lub przeanalizowanie innych dowodów tego twierdzenia (jest ich ponad 100).

2. JĘZYK MATEMATYCZNY JAKO ELEMENT KULTURY MATEMATYCZNEJ

Wanda Nowak w książce *Konwersatorium z dydaktyki matematyki* opisała sześć obszarów kultury matematycznej uczniów: wiadomości i sprawności; rozumienie formalnego charakteru matematyki; podstawy metodologiczne; doświadczenie w matematycznym działaniu; język matematyczny oraz techniki uczenia się matematyki (1989, s. 97). W artykule tym zajmiemy się piątym elementem kultury matematycznej – językiem. Stefan Turnau wyróżnił trzy składniki języka matematycznego: słowa, symbole i rysunki (Turnau, 1990, s. 58–59). Podstawowa funkcja symbolu matematycznego polega na jasnym i wyraźnym oznaczeniu czegoś i skróceniu. Jak twierdził Alfred Whitehead, „przez uwolnienie umysłu od niepotrzebnej pracy dobra notacja daje mu możność skupienia się na problemach głębszych” (Davis i in., 2001, s. 111). Język matematyczny słowny zależny jest od kontekstu, jest bliski językowi naturalnemu, zawiera jednak słowa i sformułowania takie jak np. „cosinus”, „wtedy i tylko wtedy”, które nie występują w języku potocznym. Ponadto w języku tym wiele słów, typu „grupa”, „pierścień”, „ciało” itp., jest inaczej rozumianych niż potocznie (Wybrane…, 1991, s. 147–150). Często matematyczny język nie jest dla wielu osób intuicyjny. Na przykład problem mo**że** sprawi**ć** pojęcie liczby pierwszej, której definicja matematyczna brzmi, że jest to liczba, która ma dokładnie dwa dzielniki, tzn. dzieli się przez samą siebie i przez liczbę 1. I tutaj problemem dla uczniów jest na przykład liczba 1, która nie jest liczbą pierwszą, a intuicja podpowiada, że mogłaby nią być. Kolejnym nieintuicyjnym zagadnieniem jest pojęcie funkcji, która w definicji zawiera wiele nowych słów, tj. argument, wartość, przyporządkowanie, dziedzina, zbiór wartości funkcji. Ponadto samo słowo „funkcja” ma w języku potocznym zupełnie inne znaczenie, np. pan X pełni funkcję skarbnika itp. (Sterna, 15 sierpnia 2023).

W komunikowaniu się matematycznym istotną rolę pełnią również składniki niewerbalne, tj. rysunki, schematy, grafy, tabele, wykresy, wzory itp. Aby poprawnie odczytać informacje, które one przekazują, musimy znać pewne konwencje i umowy. Współcześnie matematykę uważa się za „… urzędowy język Państwa Nauki” (Encyklopedia…, 1997, s. 148). Według Jacka Szarskiego „matematyka to przede wszystkim język służący do opisu świata, w którym żyjemy. Chodzi tu o opis zarówno ilościowy, jak i jakościowy. Matematyka dostarcza języka, a właściwie wielu języków, którymi możemy w sposób precyzyjny opisywać różnorodne zjawiska zachodzące w otaczającym nas świecie…” (za: Tocki, 2006, s. 206). Jak uważa Jerzy Tocki, przydatność języka matematycznego jest możliwa dzięki temu, że „…dla każdego obiektu i jego własności można znaleźć odpowiednią nazwę i jej ścisłe wyrażenie, rozwinięcie…” oraz „przedmioty i własności mają lub mogą mieć rozmaite nazwy i opisy” (Tocki, 2006, s. 228). Małgorzata Makiewicz wymienia dwa kierunki posługiwania się językiem matematycznym przez uczniów, tj. rozumienie i interpretacja tekstu matematycznego oraz przekazywanie własnych myśli za pomocą pojęć, wzorów i formuł (Makiewicz, 2013, s. 37–40). Stefan Turnau natomiast język działalności matematycznej dzieli na lekturę tekstu matematycznego oraz ustne i pisemne wypowiadanie myśli matematycznej. Lektura tekstu matematycznego polega na odczytywaniu wielokrotnym i w różnych porządkach symboli matematycznych; przekładanie ich na język słowny, tzn. „odformalizowanie tekstu”, formalne przekształcanie wyrażeń lub zdań dla nadania im pożądanej ścisłej formy, ewentualnie wykonanie rysunku, obliczeń lub przekształceń w celu zinterpretowania tekstu (Turnau, 1990, s. 65–66). „Odformalizowanie tekstu” polega na zapisaniu słownym języka symboli w taki sposób, aby ścisłość wypowiedzi nie uległa zmianie (Tocki, 2006, s. 229, 234). Jerzy Tocki dodaje, że „symboliczny zapis konstrukcji myślowych ułatwia znacznie kontrolę ich poprawności oraz upraszczanie, porównywanie, przekazywanie, modelowanie, przekształcanie, stosowanie i zapamiętywanie informacji” (Tocki, 2006, s. 217).

3. PODSTAWY METODOLOGICZNE I ORGANIZACJA BADAŃ WŁASNYCH

Na gruncie jakościowego rozpoznania zaplanowano badania metodą analizy dokumentów. Krzysztof Rubacha (2008, s. 157) traktuje ją jako metodę zbierania danych i nazywa „przeszukiwaniem źródeł wtórnych”. Jak podkreśla Rapley (2013, s. 158), dokumenty są analizowane zawsze w jakimś kontekście. W relacjonowanym tu badaniu został on wyznaczony przede wszystkim przez następujące pytanie problemowe: Jakie przeświadczenia (dotyczące matematyki) mogą być tworzone przez zwiedzających centra w relacji z językiem eksponatów matematycznych? Odpowiedzi na to pytanie poszukiwano w treściach i formie ekspozycji, w eksponatach, w narracji eksponatów, formułowanych problemach i ilustracjach do nich oraz możliwych sposobach użycia eksponatów i ich możliwości poznawczych. Język eksponatów jest nośnikiem określonych znaczeń tworzonych przez zwiedzających centra nauki. Można więc przekaz eksponatów matematycznych, które są nośnikami aktywności zwiedzających, włączyć do sposobu postrzegania matematyki i jej uczenia się. W artykule tym skupiono się na odpowiedzi na pytanie badawcze, w oparciu o obserwację eksponatów i analizę ich możliwości edukacyjnych dokonanych przez badacza. Problematyka ta wymaga jednak dalszych badań, które mogłyby np. badać „przeświadczenia” dotyczące matematyki ukształtowanej w umysłach odwiedzających centra.

Wyniki badań mogą posłużyć w projektowaniu efektywnych zajęć matematycznych dla dzieci i młodzieży w ramach projektów rozwijających rozwój myślenia matematycznego. Poruszane tematy, sposoby i metody przedstawienia zagadnień prezentowanych w centrach nauki mogą służyć jako inspiracja dla nauczycieli, pod kątem prowadzenia zajęć nie tylko pozalekcyjnych, w sposób bardziej motywujący dzieci i młodzież do poszukiwania własnych rozwiązań, próbowania czy nawet tworzenia.

Do badań wybrano eksponaty matematyczne z dwóch placówek: Centrum Nauki Kopernik w Warszawie i ExploraPark Park Nauki i Techniki w Wałbrzychu (por. Bojarska-Sokołowska, 2019, s. 225–290). Przy wyborze kierowano się dwiema zasadami: po pierwsze występowaniem w centrach eksponatów, ekspozycji matematycznych oraz możliwością robienia zdjęć – dokumentowanie tych przedmiotów i ich opisów. Dodano do tego zbioru dokumentów opisy interaktywnych aspektów badanych eksponatów. Dalej skatalogowano je i poddano dalszej analizie i interpretacji badawczej.

Misją Centrum Nauki Kopernik w Warszawie jest inspirowanie do doświadczania dla siebie natury, rozwijając i stosując naukę. Ponadto jednym z celów strategicznych Centrum jest: zapewnienie wysokiej jakości doświadczenia dla bezpiecznej liczby zwiedzających oraz dla zwiedzających wirtualnie; wspieranie rozwoju kompetencji przyszłości; mobilizowanie ludzi wokół ważnych tematów związanych z nauką itp. Jest to placówka powstała w roku 2010 i należy do największych centrów w Polsce. Co roku przyjmuje około miliona zwiedzających, oferując im ponad 200 interaktywnych eksponatów pogrupowanych w 19 ścieżkach tematycznych; planetarium, Teatr Robotyczny i Teatr Wysokich Napięć, warsztaty i laboratoria Pracowni Przewrotu Kopernikańskiego. Prowadzona jest działalność badawczo-rozwojowa z udziałem środowiska naukowego. Organizowane są pikniki i festiwale nauki, konferencje Pokazać Przekazać i KMO, itp. (*Centrum Nauki Kopernik*, 2023, 5 sierpnia). ExploraPark Park Nauki i Techniki w Wałbrzychu jest centrum około 30 razy mniejszym niż Centrum Nauki Kopernik. Jest to miejsce, którego głównym celem jest stworzenie dzieciom i młodzieży warunków do nauki przez zabawę, dla rodziców i nauczycieli miejscem do wspierania zainteresowań, postępów w nauce i rozwoju swoich dzieci. Jest to miejsce, które tworzy warunki do niekonwencjonalnego poznawania świata, podczas komunikacji pomiędzy dziećmi oraz dziećmi i dorosłymi, przy eksperymentowaniu, zadawaniu pytań i wspólnym poszukiwaniu rozwiązań. Centrum to odwiedza około 15 tys. osób rocznie, grupowo lub indywidualnie. Oferuje zwiedzającym ponad 150 interaktywnych zabawek, gier logicznych, modeli i programów multimedialnych. Proponuje klasom szkolnym udział w lekcjach, połączonych z wyborem jednej ze ścieżek tematycznych: mozaiki i parkietaże, matematyka w przyrodzie, matematyka a sztuka, fraktale, twierdzenie Pitagorasa, miary czasu (*ExploraPark – Centrum Aktywnej Edukacji*, 2023, 5 sierpnia). W dalszej części artykułu przyjęto w skrócie: Centrum Nauki Kopernik – CNK, ExploraPark Wałbrzych – EW).

4. ANALIZA EKSPONATÓW MATEMATYCZNYCH – WYNIKI BADAŃ JĘZYK OTWARCIA NA SAMODZIELNE POSZUKIWANIA POZNAWCZE

Analiza badanych eksponatów występujących w centrach nauki pokazuje, że zwiedzający mogą doświadczyć wsparcia poznawczego w kilku obszarach. Tymi obszarami są różnorodne konteksty liczbowe, geometryczne oraz nieco mniej kontekstów algebraicznych.

W obszarze liczbowym występują m.in. następujące konteksty liczbowe:
– **szeroki zakres liczbowy**;
Występowały liczby naturalne: małe, np. w treści zadań logicznych, kierowanych do dzieci z klas 1–3 – „Pewnego dnia miś miał dylemat…Na jednej szalce wagi położyłem 6 torebek cukru, a na drugiej 2 słoiki miodu. Gdy dorzucę słoik miodu na szklankę z cukrem, to nastąpi równowaga. Słoik miodu waży więc tyle co…" (EW, 2023) i wielkie, np. główny licznik w centrum pokazywał szacunkową na chwilę obecną liczbę mieszkańców Ziemi – 8054824155, liczniki na ekranach dotykowych pokazywały wielkość populacji w wybranych regionach: Europa i Rosja – 744613524; Azja – 4777628351; Ameryka Północna – 370843056; Ameryka Południowa i Środkowa – 670343714 (CNK, 2023). Ułamki zwykłe – zabawy klockami na porównywanie ułamków o wartościach $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (EW, 2023); konstrukcja geometryczna pierwiastków kwadratowych – ślimak pitagorejski (EW, 2023).
– **działania na liczbach**;
Dodawanie i odejmowanie liczb na liczydle chińskim. Liczby w kolorach i możliwość zobaczenia, że klocek z liczbą 10 ma taką samą długość jak np. dwa klocki razem z liczbami 5 i 5 lub 2 i 8, lub 3 i 7 itp. Dodawanie klocków z ułamkami, możliwość zobaczenia, że liczbę 1 można przedstawić jako: $1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}+ + \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ itp. Układanie komórek z liczbami w taki sposób, aby powstał kwadrat magiczny 4 na 4 – obliczanie sum odpowiednich liczb. Dzielenie z resztą dotyczyło dzielenia przez liczby 2 lub 3 liczb występujących na trójkącie Pascala. Następnie należało umieścić kulę tego samego koloru w miejsce liczby o tej samej reszcie z dzielenia. Pierwiastkowanie – przedstawiono i opisano konstrukcję ślimaka pitagorejskiego. Dzięki temu otrzymano kolejne trójki liczb spełniających twierdzenie Pitagorasa, tj. $(1, 1, \sqrt{1})$; ,$(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ itd. aż do pierwiastka z liczby 17. Potęgi liczb występowały w zapisie twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia Fermata (EW, 2023).
– **systemy pozycyjne**;
System dziesiątkowy stosowano podczas układania i odczytywania liczb na chińskim liczydle. Był on zbudowany z sześciu prętów, które oznaczały kolejne pozycje, tj. 1 pręt od dołu – wyznaczał linię jedności, 2 – linię dziesiątek, 3 – linię setek, 4 – linię tysięcy, 5 – linię dziesiątek tysięcy, 6 – linię setek tysięcy. Całe liczydło było przedzielone pionowym prętem, który wyznaczał dwie części. Pierwszy obszar po prawej stronie zawierał kule o wartości 1, drugi obszar po lewej – kule o wartości 5.

System dwójkowy binarny przedstawiono za pomocą zapisu liczby na zegarze elektronicznym. W tym celu wykorzystano narysowane koła, na odpowiedniej pozycji w rzędach: $1=2^0$, $2=2^1$, $4=2^2$ i $8=2^3$. I tak na przykład godzina 11:53:02 została przedstawiona graficznie w następujący sposób: zamalowano na kole po kolei cyfry z godziny jako jedynki, zamalowano więc dwa koła obok siebie na pozycji pierwszej; cyfra 5 – z minut zamalowano koło z poziomu 1 i koło z poziomu 3, cyfra 3 – zamalowano koło z poziomów 1 i 2, cyfry z sekund jako zero – brak zamalowania, cyfra 2 – koło z poziomu 2 (EW, 2023).

– **odkrywanie własności działań arytmetycznych**;

Powstawanie kolejnych liczby na trójkącie Pascala, poprzez wpisywanie 1 na początku i na końcu rzędu, a w środku rzędu liczby, która jest sumą dwóch liczb leżących nad nią. Powstawanie kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego – jako suma dwóch wcześniejszych liczb (EW, 2023). Liczby w kolorach, dzięki którym można było zaobserwować m.in. przemienność dodawania liczb (EW, 2023).

W obszarze geometrycznym występują różnorodne konteksty geometryczne, takie jak: mierzenie, budowanie z różnorodnych klocków parkietaży, mozaiek, brył przestrzennych; wypełnianie danej powierzchni różnego kształtu klockami, składanie struktur fraktalnych, odkrywanie jednostronności wstęgi Möbiusa, krzywe stożkowe, geometryczne udowadnianie twierdzenia Pitagorasa, składanie symetrycznych figur, odbijanie przedmiotów w kalejdoskopie, złudzenia optyczne, anamorfozy, perspektywa itp.

Zdecydowanie mniej różnorodności znajdujemy **w obszarze algebraicznym** jest to prawdopodobnie związane z tym, że funkcją eksponatów matematycznych prezentowanych w centrach nie jest wprowadzanie zwiedzających w formalny język matematyki.

Zagadnienia algebraiczne dotyczyły m.in. przedstawiania zależności, wzorów, twierdzeń zapisanych za pomocą symboli matematycznych i liter, np. „… przeciwprostokątna T_n staje się jedną z przyprostokątnych trójkąta następnego T_n+1, a druga przyprostokątna zawsze ma długość 1. Twierdzenie Pitagorasa uzasadnia tę konstrukcję pierwiastków kwadratowych liczb naturalnych jako miary przeciwprostokątnej. $(\sqrt{n})^2 + 1^2 = n + 1 = (\sqrt{n+1})^2$ (EW, 2023). Można było odnaleźć również łamigłówki w formie obrazków, które przedstawiają strukturę układu równań (zdjęcie 1).

5. JĘZYK PROBLEMÓW MATEMATYCZNYCH A FORMA ICH PREZENTACJI

W badanych eksponatach treści problemów matematycznych są przedstawione w różnych formach:

– **w formie ilustracji**;

Na przykład przedstawiono w powyższy sposób, cztery elementy Pitagorejskiej łamigłówki i strzałkę prowadzącą do drugiego rysunku, na którym narysowano kwadratowe pudełko, w które należy umieścić podane elementy (CNK, 2023).

Zdjęcie 1. Matematyczny układ równań (EW, 2023).

Zdjęcie 2. Obrazkowa zagadka (EW, 2023).

– **w formie instrukcji**;
Na instrukcji dotyczącej budowania mostu Leonarda pokazano trzy kolejne kroki jego wykonania (EW, 2023).
– **w formie krótkiego zdania lub pytania;**
Przy problemach dotyczących złudzeń optycznych umieszczono następujące polecenie: „Czy odcinki a są tej samej długości co odcinki b? Sprawdź przy pomocy linijki" (EW, 2023).
– **w formie opisowej instrukcji**;
Na przykład przy eksponacie dotyczącym rysowanie wykresu funkcji. „Spacer z funkcją. Wciśnij ,,start>> na monitorze zobaczysz wykres funkcji. Gdy zaczniesz się poruszać po torze, pojawi się drugi czerwony wykres. Spróbuj poruszać się tak, aby czerwony wykres był taki sam jak biały"(CNK, 2023).
– **w formie zadania napisanego na rysunku, który dotyczy treści i pomaga w jego rozwiązaniu, lub rysunku, który jest jedynie tłem dla zadania**;
Na przykład na rysunku przedstawiono urodzinowy stół z tortem z 7 świeczkami i talerzykami, psa i trójkę dzieci, które podają propozycje odpowiedzi: 150 minut, 15 minut, dwie i pół godziny, do treści zadania – „Jedna świeczka urodzinowa spala się w ciągu 15 minut. W jakim czasie spali się 10 urodzinowych świeczek, gdy zapalamy je w tym samym czasie?" (EW, 2023).
– **w formie obrazkowej zagadki** – zdjęcie 2.

6. JĘZYK AKTYWNOŚCI MATEMATYCZNYCH

Interakcje z badanymi eksponatami mogłyby pomóc zwiedzającym w przeprowadzaniu następujących aktywności matematycznych:
– **odkrywanie zależności**;
Podczas manipulowania eksponatem w kształcie stożka zwiedzający mogli odkryć, w jaki sposób powstają różne krzywe stożkowe. „Hiperbole i spółka. Przechylaj stożek w różne strony. Obserwuj powierzchnię płynu" (CNK, 2023).
– **przeprowadzanie uzasadnień twierdzeń;**
Podczas manipulowania na ekspozycji poświęconej twierdzeniu Pitagorasa zwiedzający mogli dojść do uzasadniania badanej zależności – „(…) Gdy ułożymy wszystkie kolorowe figury w dużym kwadracie, a następnie przełożymy je do dwóch mniejszych, to udowodnimy twierdzenie Pitagorasa, czyli twierdzenie, że powierzchnia kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego jest równa sumie powierzchni kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych tego trójkąta" (EW, 2023).
– **sprawdzanie hipotez**;
Podczas badania złudzeń optycznych zwiedzający mogli sprawdzić swoje przypuszczenia, porównując badane elementy – „Czy proste w kolorze niebieskim są równoległe? Sprawdź, przykładając pasek" (EW, 2023).
Eksplorowanie z przedmiotami daje możliwość konstruowania pojęć matematycznych, a nie tylko ich ćwiczenia. Rozwijanie myślenia operacyjnego musi być wsparte działaniem i obserwowaniem zmian w układach przedmiotów, czyli zjawisk o charakterze dynamicznym (Szemińska, 1981, s. 124).

7. JĘZYK WYJAŚNIEŃ/OPISÓW EKSPONATÓW

Gdy zwiedzający zainteresowali się danym pojęciem, mogli**:**
– przeczytać wyjaśnienie;
Na przykład przy anamorfozach – „O co chodzi? Sztuka nie zawsze odwzorowuje rzeczywistość – czasami zniekształca, przeinacza, interpretuje po swojemu. To, co widzisz, to obrazy anamorficzne. Powstałe poprzez celowe zdeformowanie proporcji w taki sposób, aby odczyt obrazu był możliwy tylko przez patrzenie na niego z ustalonej perspektywy lub odbicie go w odpowiednim zwierciadle" (CNK, 2023).

– **poprosić o pomoc i wyjaśnienie animatorów;**
W sali znajdowały się osoby specjalnie przeszkolone do udzielania wskazówek i pomocy zwiedzającym;
– przedłużyć problem, poprzez przejście do kolejnych eksponatów – „(…) Jeśli zainteresowała cię ta iluzja, poszukaj na naszych wystawach eksponatu <<Obrotki>>”(CNK, 2023).

8. JĘZYK ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI

Matematyka jawi się zwiedzającym centra jako obecna dookoła i wykorzystywana na co dzień. „Zakręć kołem i stań na żółtej linii. Co widzisz?”. Wyjaśnienie autorów ekspozycji – „Jak to możliwe, że zwyczajny obraz daje złudzenie trójwymiarowe?! Twój mózg czasem daje się oszukać. Wystarczy odpowiedni wzór wprawić w ruch obrotowy i może ci się wydawać, że np. jesteś wciągnięty do tunelu. Taką iluzję głębi, uzyskaną przy użyciu dwuwymiarowego obrazu, nazywamy efektem stereokinetycznym” (CNK, 2023).

Do poznania matematyki służą codzienne przedmioty, różnorodne klocki, piłki, dzięki którym można złożyć np. strukturę fraktalną.

9. UFANSTATYCZNIANIE JĘZYKA NARRACJI EKSPONATÓW

Autorzy czasami ufantastyczniają język narracji ekspozycji, w celu wywołania:
– **większego wrażenia na zwiedzających**;
Na przykład olbrzymi model części wielościanu wypukłego oddzielający miejsce zabaw dla najmłodszych dzieci w centrum EW.
– **lepszego zrozumienia zagadnienia**;
Na przykład olbrzymi wykres w CNK składający się z niższych i wyższych walców, które pełniły rolę wykresu słupkowego, który przedstawiał bardzo szybki przyrost CO_2 na świecie w kolejnych latach;
– rozbawienia;
Na przykład opis łodzi pitagorejskiej, który jest parafrazą do znanego fraktala-trójkąta Sierpińskiego – „(…) Gdyby Sierpiński spotkał Pitagorasa, zapewne tak opowiedziałby mu o swojej przygodzie na jeziorze: »Porywisty wiatr za każdym podmuchem wyszarpywał kawałki z trójkątnego żagla – zawsze według tej samej

reguły: wyznaczał środki boków żagla, łączył je odcinkami i wyrywał środkowy trójkąt, a z pozostałymi trójkątami robił to samo«. I zapewne zadałby pytanie: Co zostanie z żagla po nieskończenie wielu podmuchach?” (CKE, 2023).

Uczenie się w centrach nauki jest nastawione nie na wynik, lecz na proces, w którym ważny jest nie tyle sam rezultat, co podejmowane próby i odkrywane możliwości. Może być tak, że zwiedzający w ogóle nie zainteresuje się danym eksponatem matematycznym, po prostu koło niego przejdzie. Prawdopodobna jest również sytuacja, że osoba zacznie manipulować, wchodzić w interakcje z eksponatem bez przeczytania instrukcji, bez większego zainteresowania, bez żadnej refleksji. Może być również tak, że zwiedzający zaciekawi się eksponatem, wykona interakcje według instrukcji, przeczyta opisy i będzie dalej poszukiwał informacji na ten temat, np. w Internecie, w książkach czy pytał znajomych lub nauczycieli (por. Karwasz, Kruk, 2010, s. 45–46). Podczas eksploracji ważne jest otwarcie się na popełnianie błędów i samodzielne ich poprawianie. „Błąd staje się źródłem wiedzy o sobie, własnych strategiach myślenia i o innych perspektywach, punktach widzenia. Jest potrzebny, aby móc nadawać znaczenie – konstruować i rekonstruować własną wiedzę, biorąc pod uwagę różnorodność” (Kopaczyńska, 2020, 53).

10. JĘZYK OTWARCIA NA MOŻLIWOŚĆ POPEŁNIANIA BŁĘDÓW

Można było wyróżnić kategorie eksponatów, które dawały możliwość popełniania błędów i samodzielnej ich weryfikacji, np.
– **eksponat z możliwością wyboru odpowiedzi i jej sprawdzenia**;
Poprawność odpowiedzi można było sprawdzić poprzez naciśnięcie jednej z trzech opcji. Na przykład przy zadaniu „Królowo, gazety piszą, że w naszym zamku jest 6 stołów z 4 krzesłami każdy, 4 stoły z 2 krzesłami i 3 stoły, a przy każdym 6 krzeseł. To ile my mamy tych krzeseł?” (EW, 2023) podano trzy możliwe odpowiedzi: 40, 44, 50. Po naciśnięciu poprawnej odpowiedzi świeciła się zielona lampka.
Podobnie wykorzystano elektroniczną wersję przy eksponacie, na którym było po 8 mozaik archimedesowskich i bliźniaczych do nich. I należało je połączyć w pary. W tym przypadku było 56 możliwości odpowiedzi. Jednakże, gdy zwiedzający zrozumiałby problem i umiał sobie wyobrazić oraz przekształcić w myśli kolejne mozaiki archimedesowskie, mógłby ograniczyć wybór do 8 możliwości (EW, 2023).

– **eksponat z rozwiązaniem znajdującym się przy problemie lub znajdującym się w danym pomieszczeniu, ale nie przy eksponacie**;
Na przykład przy poleceniach do złożenia w odpowiednie figury geometryczne różnych tangramów rozwiązania były zakryte.
Możliwość złożenia parkietaży z elementów – klocków w kształcie Chińczyka czy kangurów można było odnaleźć w sali. I wzorując się na nich, układać je z klocków.
– **eksponat-łamigłówka, która już w instrukcji pokazywała na rysunku co trzeba zrobić, aby wykonać polecenie, jednak nie odpowiadała na pytanie, jak to należy zrobić;**
Na przykład przy łamigłówce z sześcioma klockami był pokazany wielościan gwiaździsty do złożenia, ale nie były na nim widoczne poszczególne elementy złożenia.
Podobnie przy łamigłówce w kształcie kwadratowej płytki z wyznaczonymi drogami i otworami na nich i z włożoną metalowym pierścieniem. Na rysunku pokazano, że należy tę obręcz zdjąć, a następnie z powrotem włożyć na płytkę, lecz nie było podpowiedzi, jak to należy zrobić (CNK, 2023).
– **eksponat z linijką lub innym przyrządem, za pomocą którego można sprawdzić swoje przypuszczenia**
Na przykład przy problemach związanych ze złudzeniami optycznymi: „Czy blaty stołów są tej samej wielkości? Sprawdź przy pomocy równoległoboku" (EW, 2023).
Badanymi eksponatami były również różnorodne gry matematyczne, które w mniejszym lub większym zakresie stwarzały warunki do samodzielnych poszukiwań zwiedzających centra. Zależało to od tego, czy zawierały ścisłe zasady gry lub czy można je było samodzielnie regulować i określać.
– **ścisły opis reguł**;
Na przykład gra „OЯTHO" była to gra dwuosobowa, która polegała na skoordynowaniu ruchów dwóch osób podczas przechodzenia kolejnych poziomów gry – „… każdy gracz kontroluje współrzędną piłeczki w układzie kartezjańskim. Waszym celem jest skoordynowanie działań, aby przeprowadzić piłeczkę przez trasę w jak najkrótszym czasie" –(CNK, 2023).
– **z możliwością modyfikowania zasad**;
Na przykład gra „Internet rzeczy", gracze mogli sami dobierać, które elementy najpierw rozwiązują z planszy sieci. Były zadania matematyczne zamknięte wielokrotnego wyboru, które wykonywało się na czas. Przykładowe zagadki – „Liczba pasuje do cyfry jak słowo do …", „Z ilu powierzchni składa się ta bryła?" itp. (CKN, 2023).

– **z wymyślaniem własnych zasad grania**;
Problemy z układaniem do pudełka lub składaniem różnych rzeczy przez jednego lub wielu graczy. Na przykład z klocków I. Q. Block (klocki te dają wiele możliwości złożenia) lub składanie z dwóch klocków lustrzanych symetrii. Zasady gracze ustalają samodzielnie i mogą je podczas gry modyfikować (EW, 2023).

11. PODSUMOWANIE – WNIOSKI Z BADAŃ

Badane eksponaty przedstawiają problemy matematyczne o różnorodnej trudności, bez wskazywania, które z nich są przeznaczane dla dzieci i młodzieży, a które dla osób dorosłych. Zwiedzającym proponuje się poznanie bliżej/dalszej oraz dostępnej/niedostępnej powszechnie rzeczywistości. Kolejnym korzystnym przeświadczeniem może być konieczność wykonywania doświadczeń manipulacyjnych. Język narracji eksponatów matematycznych tworzy przekonanie u zwiedzających centra, że powinni oni badać relacje matematyczne na przedmiotach. Obecnie wskazuje się na konieczność manipulowania i obserwowanie dokonywanych zmian przez eksperymentujące osoby dla rozwijania wiedzy matematycznej (Boaler, 2016, s.168 i in.). Przekaz eksponatów matematycznych wspiera rozwijanie myślenia matematycznego. Sposoby rozumowania, czym jest uczenie się matematyki i czym jest ona sama, przekazywane językiem eksponatów pozwala sformułować pewne ogólne przekonania, które mogą się pojawić w umysłach zwiedzających centra osób. Język eksponatów matematycznych może być źródłem przeświadczenia, że poznanie zaczyna się od chaosu danych, które muszą być indywidulanie rozumiane, co wynika z osobistego konstruowania znaczeń matematycznych. Język eksponatów matematycznych tworzy również przeświadczenie, że do zrozumienia pojęć i posługiwania się nimi w procesie myślenia matematycznego osoby zwiedzające nie muszą posługiwać się poprawnym matematycznym językiem – językiem symboli. Podczas interakcji z eksponatami wiedza osobista zwiedzających jest bardzo ważna i ma wielki wpływ na zrozumienie. Nie każda osoba, nawet w tym samym wieku, zainteresuje się danym eksponatem lub „bezrefleksyjnie" nim pomanipuluje. W tym przypadku eksponat spełni jedynie rolę ludyczną. Nie każda osoba również zainteresuje się problemem i zacznie poszukiwać danych informacji poza centrum, zacznie dopytywać w szkole, szukać w Internecie, a nawet na dłużej zajmować się nim (por. Karwasz, 2012, s. 27). W centrach nauki poznanie matematyki nie wymaga zewnętrznej pomocy i podporządkowania myślenia oczekiwaniom kogokolwiek. Zwiedzający mogą doświadczać błędów, nie muszą wystrzegać się niepoprawnych rozwiązań, ponieważ takowe mogą być korzystne poznawczo. Jest to przywoływany przez badaczy pogląd, który dowodzi konieczności pojawienia się błędnych pomysłów i prób uczniowskich w celu rozpoznawania wiedzy poprawnej (Heinze, 2005). Możliwość wspólnej pracy (niekoniecznie z rówieśnikiem) nad problemem przy danym eksponacie podpowiada zwiedzającym centra, że wiedza matematyczna nie jest tworzona w izolacji (indywidualnie), a jest raczej wytworem wspólnoty (wielu matematyków). Obecnie uważa się, że matematyka „jest to domena społeczna tworzona i przekazywana w różnych aspektach, jest to wspólne dobro, wspólne tworzenie i wzajemne przekazywanie. Uczeń też może i powinien tu wiele wymyślić, zaproponować, odkryć” (Filip i Rams, 2000, s. 26). Propozycje problemów, w których zwiedzający może samodzielnie stosować matematykę, tworzy przekonanie, że matematyka opisuje codzienne sytuacje, ma zastosowanie poza szkołą. Różnorodny język eksponatów oraz zmienianie lub tworzenie nowych wystaw w centrach nauki, nie stwarza sytuacji powtarzania. Zawsze można się czegoś nowego dowiedzieć, odkryć lub czymś się zachwycić.

Opisane w tym artykule badania, nie wyczerpują problemów dotyczących edukacyjnych możliwości, jakie stwarzają współcześnie centra nauki. Można by pogłębić badania w kierunku przeanalizowania „przeświadczeń” dotyczących matematyki ukształtowanych w umysłach osób zwiedzających centra nauki. Warto by było również przeprowadzić dalsze badania nad oddziaływaniem wskazanych eksponatów na aktywność matematyczną osób odwiedzających centra nauki. Ponadto w Polsce i na świecie powstają kolejne wystawy interaktywne i centra nauki, daje to możliwość dalszych badań, np. analizy porównawczej eksponatów z innych europejskich krajów lub świata.

Bibliografia

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative mathematics, inspiring messages and innovative teaching (mindset mathematics)*. Jossey-Bass.

Bojarska-Sokołowska, A. (2019). *Pozaszkolne formy edukacji matematycznej. Popularyzacja matematyki, interaktywność w kształceniu, kultura matematyczna*. Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie.

Centrum Nauki Kopernik. (2023, 1 sierpnia). https://www.kopernik.org.pl

Davis, P.J., Hersh, R. i Marchisotto E.A. (2001). *Świat matematyki*. Tłum R. Duda. Wydawnictwo Naukowe PWN.

Encyklopedia szkolna. Matematyka. (1997), red. W. Waliszewski, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Explorapark – Centrum Aktywnej Edukacji. (2023, 1 sierpnia). https://explorapark.pl

Filip, J. i Rams, T. (2000). *Dziecko w świecie matematyki*. Oficyna Wydawnicza „Impuls".

Gołaszewska, M. (1979). *Kultura estetyczna*. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Heinze, A. (2005). *Mistake-handling activities in German mathematics classroom*. W: H.L. Chick i J.L. Vincent (red.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (t. 3, s. 105–112). University of Melbourne.

Karwasz, G. i Kruk, J. (2012). *Idee i realizacje dydaktyki interaktywnej – wystawy, muzea i centra nauki*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.

Kopaczyńska, I. (2020). *Pedagogiczna kategoria błędu. Teoretyczne konteksty – praktyczne inspiracje dla edukacji wczesnoszkolnej*. Wydawnictwo Impuls.

Makiewicz, M. (2013). *O fotografii w edukacji matematycznej. Jak kształtować kulturę matematyczną uczniów*. Studenckie Koło Naukowe Młodych Dydaktyków Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego.

Nowak, W. (1989). *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN.

Rapley, T. (2013). *Analiza konwersacji, dyskursu i dokumentów*. Tłum. A. Gynor-Niemiec. Wydawnictwo Naukowe PWN.

Rubacha, K. (2008). *Metodologia badań nad edukacją*. Wydawnictwo Akademickie i Profesjonalne.

Sterna, D. i Szwajkowski, W. (15 sierpnia 2023). *Język matematyczny i Test empatii dydaktycznej dla nauczycieli matematyki*. https://osswiata.ceo.org.pl.

Stęchły, W. (2021). *Edukacja formalna wobec edukacji pozaformalnej i uczenia się nieformalnego*. Instytut Badań Edukacyjnych.

Szemińska, A. (1981). *Rozwój pojęć matematycznych u dziecka*. W: Z. Semadenii (red.), *Nauczanie początkowe matematyki. Podręcznik dla nauczyciela* (t. 1, s. 112–251). Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.

Tocki, J. (2006). *Struktura procesu kształcenia matematycznego*. cz. 1. Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Turnau, S. (1990). *Wykłady o nauczaniu matematyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN.

Warda, J. (2023, 5 sierpnia). *Doświadczenia centrów edukacyjnych w Europie*. http://teatrnn.pl/ulublin/sites/default/files/Ekpertyza_doswiadcen_centrow_edukacyjnych.pdf.

Wybrane zagadnienia dydaktyki matematyki w zadaniach. (1991). red. G. Treliński, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej im. J. Kochanowskiego w Kielcach.